95
2 vol

ITARD 052

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU PRINCIPES GENERAUX DE TOUTES LES SCIENCES

Qui ont les grandeurs pour objet.

SECOND VOLUME

Qui comprend un corps d'Analyse, ou l'art de résoudre les Questions qu'on propose sur toutes les diverses grandeurs.

Et où tout est expliqué dans un ordre naturel & facile, & les choses traitées bien plus à fond, & poussées plus loin que l'on n'a fait jusqu'ici.

Par JEAN PRESTET Prêtre, ci-devant Professeur des Mathématiques dans les Universitez d'Angers & de Nantes.

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë saint Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXXIX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

CE ſecond volume comprend l'Analyſe, ou l'art d'inventer ce qu'on veut ſur toute ſorte de grandeurs. Quoi que cette partie ſoit la plus étenduë & la plus ingénieuſe des Mathématiques; on diroit cependant qu'il n'y en a point eü de plus négligée. Mais on ceſſera d'en être ſurpris, ſi l'on conſidére que les Anciens, qui en étoient inſtruits, ont eü la vanité de la ſupprimer, afin que les hommes ne connoiſſant point par quel art ils avoient composé leurs ouvrages, conceuſſent auſſi plus d'eſtime & d'admiration pour la fecondité de leur génie. Ils étoient bien aiſes de groſſir par là dans l'eſprit des hommes la haute idée de leur ſuffiſance, & d'empêcher que leurs belles lumiéres ne devinſſent trop populaires & comme mépriſables.

Car enfin le commun du monde n'a pas une fort grande eſtime pour les connoiſſances faciles, ou qui s'apprennent à peu de frais; & j'ay vû des gens d'eſprit & même fort habiles qui ne pouvoient ſouffrir qu'on éclaircît leurs difficultez ſur certains ſujets, en les obligeant de faire attention à des veritez qu'ils dédaignoient de conſidérer, parce qu'elles ne leur ſembloient pas aſſez difficiles. Ils y cherchoient je ne ſçay quels myſteres, & ils euſſent été pleinement ſatisfaits, ſi on les eût conduit par de longs circuits & par des routes rudes & difficiles aux véritez même qu'on leur faiſoit voir à leurs pieds & toucher au doigt.

Diophante eſt celuy des anciens où l'on entre-voit davantage les veſtiges de cet art ſecret qui leur a tant acquis de réputation. Et Monſieur Viéte eſt le premier qui en a réparé les ruines en ce ſiécle, & qui l'a portée bien plus haut que l'on n'avoit fait avant luy. Mais on peut bien avancer ſans crainte que la méthode de Monſieur Deſcartes eſt autant au deſſus de celle de Monſieur Viéte que celle-ci l'eſt au deſſus autres. Et je ne croi pas que l'on en puiſſe jamais découvrir qui l'emporte ſur elle, ni qui ait tout enſemble autant d'étenduë & de fecondité, autant de facilité, & autant de lumiére.

Ce n'eſt que ſur de vaines conjectures ou par un mouvement d'envie que des gens ont voulu faire croire de ſon vivant même qu'il avoit tiré ſa méthode des autres, & particuliérement d'un certain Harriot Anglois, qu'il n'avoit jamais lû, comme il le déclare dans une de ſes lettres. Et lorſque Monſieur Wallis, un peu trop jaloux de la gloire que la France s'eſt acquiſe dans les Mathématiques, vient renouveller cette accuſation ridicule, on eſt en droit de ne le point croire, puis qu'il parle ſans preuve.

Monſieur Hudde Hollandois, qui n'eſt point ſuſpect, puis qu'il n'avoit aucun intérêt à ſoûtenir l'honneur des Auteurs François, eſt bien plus équitable dans le jugement qu'il porte de Monſieur Deſcartes. On voit, dit-il, écrivant à un de „ ſes amis, dans ce petit traité de ſa Géométrie tant de mar- „ ques d'une ſcience admirable & profonde, & tant de décou- „ vertes de cet eſprit ſublime, qui ſont plus générales incom- „ parablement, plus utiles, & plus élevées au deſſus du com- „ mun que toutes celles des anciens Auteurs, que quiconque „ l'entend, & compare ſes écrits aux leurs, ne peut jamais s'i- „ maginer, comme quelques-uns l'ont fait, qu'il ait emprunté „ des autres l'art de ſon Analyſe; de même que perſonne n'eſt „ aſſez déraiſonnable, pour croire que le Soleil emprunte ſa „ lumiére des étoiles.

„ Et je ne prétens faire aucun tort aux anciens Géométres „ ou Mathématiciens, en les comparant à des aſtres lumineux; „ car je ſçai qu'il y a des étoiles qui ſont en elles-mêmes plus „ grandes & plus éclatantes que le Soleil: mais elles ne le ſont „ pas à l'égard de nous qui demeurons ſur la terre. Parmi ceux- „ là j'ai une eſtime particuliére pour Archiméde, pour Dio- „ phante, & pour pluſieurs hommes célébres de nôtre ſiécle „ & du précédent. Et j'avoüe qu'ils ont acquis par leurs ou- „ vrages beaucoup de réputation dans le monde. Mais ils „ avoüeroient eux-mêmes, s'ils revenoient aujourd'huy ſur terre, que la lumiére de Descartes y éclatte bien plus que la « leur. Ils tâcheroient d'en recevoir un nouveau jour, & ils « avertiroient les hommes de la préférer à toutes leurs lumié- « res; parce qu'il est plus sûr & plus agréable de joüir de la lu- « miére du Soleil, qu'on découvre à sa faveur plus d'objets & « plus aisément, & qu'on les distingue beaucoup mieux qu'à « la foible lueur des étoiles. «

Cependant je ne voudrois pas dire, comme cet Auteur semble l'insinuer, que Monsieur Descartes n'ait tiré du secours des sçavans hommes qui l'ont précédé. Il faut rendre justice à tout le monde. Je ne doute point que les anciennes découvertes, dont il paroît parfaitement instruit, & que les autres plus nouvelles, dont il pouvoit avoir connoissance, ne luy ayent donné du jour & des ouvertures, pour porter les choses peu à peu, & comme par degrez, à ce haut point de perfection, où un ordre éxact & suivi l'a fait arriver.

Il est vrai qu'il n'a pas écrit pour toute sorte de personnes, & qu'il faut être habile pour le pouvoir entendre; parce qu'il ne commence presque que par où les autres ont fini, qu'il supprime les principes de la plus grande partie de ses régles, & leurs démonstrations; & qu'il suppose qu'on soit déja parfaitement versé dans toutes les opérations des nombres & des lettres.

C'est ce qui m'a obligé de rechercher avec soin les principes de son Analyse; & j'en ai, ce me semble découvert de plus simples que ceux sur lesquels il paroît l'avoir établie. Car j'en déduis par ordre non seulement toutes ces diverses régles, mais j'en tire aussi beaucoup d'autres plus courtes & plus utiles. J'en déduis même analytiquement certaines connoissances tres-universelles, qu'il ne croit pas qu'on puisse découvrir par d'autres voyes que par celles des sections coniques & de la Géométrie composée.

Je m'arrête bien moins aux régles de Monsieur Viéte & à sa méthode, & je néglige absolument les suppositions qu'il a coûtume d'emprunter de la voye syntéthique, ne tentant les résolutions de toutes ses questions que par les seules régles de la pure Analyse. J'en use à peu prés de la même sorte à l'égard des régles & de la méthode de Diophante, mais avec un peu plus de ménagement. Car comme il tire de la synthése beaucoup moins de suppositions que Monsieur Viéte, je ſuis bien aiſe que l'on puiſſe entre-voir dans mes raiſonnemens ce qu'il ſupprime fort ſouvent dans le cours & la ſuite des ſiens, & ſur tout lors que cela ſe peut ſans rien diminuer de l'étenduë ou de la facilité des réſolutions.

Car on doit remarquer qu'il y a deux ſortes de queſtions; les unes définies ou déterminées, ou qui ne peuvent recevoir qu'un certain nombre fixe & déterminé de réſolutions, comme une ſeule, ou ſeulement deux, ou trois, ou quatre, &c; ce qu'il faut découvrir au juſte: & les autres indéfinies ou indéterminées, qui peuvent recevoir une infinité de réſolutions différentes; ce qu'il faut découvrir, autant qu'il eſt poſſible, ſans aucune reſtriction, ou dans toute ſon étenduë, c'eſt-à-dire en telle ſorte que les grandeurs qu'on vient à découvrir ſous des expreſſions littérales puiſſent marquer indifféremment chacune des grandeurs en particulier qui peuvent ſatisfaire, quoy qu'il y en ait une infinité.

Mais cela n'eſt pas toûjours facile, parce que les difficultez s'élevent aſſez ſouvent à des degrez ſi hauts, qu'il eſt comme impoſſible de les abbaiſſer juſqu'au ſimple où tout eſt connu, ſans y mettre des reſtrictions, qui font toûjours que la réſolution devient moins infinie, & d'autant moins qu'il y a plus de reſtrictions. Car quoi qu'on ſatisfaſſe encore infinîment à tout ce qu'on demande, nonobſtant ces reſtrictions; il reſte pourtant dans la nature une infinité de grandeurs, qui pourroient y ſatisfaire auſſi de la même ſorte, & qui ne ſont pas compriſes dans la réſolution infinie qu'on a découverte.

Quelquesfois même les reſtrictions ſont en ſi grand nombre, que le cours ſuivi des raiſonnemens ne peut plus former qu'une réſolution, quoi qu'on apperçoive avec évidence que la nature en fournit une infinité. Quand je parle de ces réſolutions des queſtions indéterminées, il faut toûjours entendre qu'elles ſont incommenſurables, ou que les grandeurs qui doivent ſatisfaire ſont toutes commenſurables avec l'unité. On rejette entiérement dans ces ſortes de queſtions toutes les grandeurs incommenſurables qui pourroient ſatisfaire, comme incapables de contenter l'eſprit, à cauſe de ce qu'elles ont d'obſcur & d'incompréhenſible. Et c'eſt ſur tout pour les éviter qu'on employe l'Algébre.

Je me ſers ordinairement du mot de *grandeurs* au lieu de

premier les principales régles que l'Analyse observe dans toutes ses parties ; comme ce qui regarde la dénomination des grandeurs, la maniére d'exprimer par des égalitez tout ce que les questions supposent, & les diverses comparaisons que l'on est obligé de faire des deux membres de ces égalitez pour découvrir ce qu'on veut connoître. On enseigne ensuite à résoudre par l'application de ces mêmes régles les questions déterminées ou indéterminées, qui ne sont linéaires ou planes, marquant comment on peut discerner la nature des unes & des autres. Le second Livre traite plus en détail de l'Analyse simple & déterminée. On y renferme & résoût généralement les questions linéaires & déterminées qui se trouvent dispersées en divers endroits dans les six Livres de Diophante, & dans les cinq des Zététiques de Monsieur Viéte. Et on y comprend encore d'autres résolutions.

Le troisiéme Livre traite aussi en détail de l'Analyse simple & indéterminée. Mais toutes les questions que l'on y renferme, & qui sont pour la pluspart tirées de Diophante, n'obligent qu'à chercher deux grandeurs qui ayent entr'elles certains rapports que l'on détermine. Le quatriéme Livre est de la résolution des doubles & des triples égalitez. On y explique & démontre clairement & d'une maniére tout-à-fait abbrégée ce que Diophante & ses Commentateurs, & ce que Monsieur De Fermat ont inventé sur cette matiére. Et on achêve ce qu'ils n'ont qu'ébauché là-dessus, ou ce qu'ils ont passé sous silence.

Le cinquiéme Livre est encore de l'Analyse simple ou plane & indéterminée, & comprend beaucoup de questions de Diophante, où l'on demande au moins trois quarrez qui ayent entr'eux les rapports que l'on détermine. Mais le sixiéme, qui est aussi de l'Analyse indéterminée, ne comprend que des questions de ce même Auteur, & quelques-unes assez curieuses de Mr De Fermat, où il y a toûjours quelque cube ou quelqu'autre puissance d'un plus haut degré.

Le septiéme Livre est de l'Analyse indéterminée des triangles rectangles. Aprés quoi on ne laisse plus rien à expliquer de ce qui regarde cet Auteur. Car sa doctrine des nombres polygones est renfermée dans le premier volume au douziéme Livre.

On commence au huitiéme Livre à traiter de l'Analyse composée,

composée, ou de la résolution des égalitez qui ont plusieurs degrez. Et on donne au neuviéme des régles générales & les plus abbrégées qu'il se peut pour les résolutions des égalitez du troisiéme & du quatriéme degré. Et on marque ensuite comment on peut se conduire, lors qu'on veut découvrir des régles générales pour les autres degrez, où les diviseurs du dernier terme ne peuvent servir à donner la résolution.

Si on s'imagine que ce volume soit trop ample, quoi qu'il soit court pour la multitude des matiéres que l'on y comprend; il sera facile de l'abbréger, en ne lisant d'abord que ce qui est précisément nécessaire, c'est-à-dire le premier Livre, qu'il faut étudier avec soin, & les questions des Livres suivans où l'on verra le mot de *principe*. Il est bon de voir encore quelque chose du second, laissant si l'on veut ce qu'on y trouvera de plus difficile, car il y a des questions où le calcul est rude. Aprés cela on pourra passer au huitiéme Livre, & continuer jusqu'à la page 432[e], où le neuviéme est presque fini. Le reste servira d'exercice à ceux qui désireront de temps en temps en apprendre quelque chose, ou cultiver ce qu'ils sçauront déja, & mettre leurs régles en pratique. Ils pourront même faire choix des questions remarquables, qu'une main désigne au commencement, & ils passeront ce qu'ils voudront des autres. Car quoi que les questions soient rassemblées avec ordre, & selon leurs divers genres depuis le second Livre jusqu'au huitiéme; elles sont néanmoins comme détachées les unes des autres, en telle sorte qu'on a la liberté dé s'appliquer à celles qu'on voudra, sans que cela fasse aucun préjudice à l'intelligence des autres.

Au reste qu'on ne soit pas surpris, si je n'entreprens point de faire ici une histoire de l'Algébre & de l'Analyse. C'est, ce me semble, sans aucun fondement légitime que Monsieur Wallis prétend me chicaner & m'intenter un procés là-dessus, lors qu'il avance dans son grand ouvrage de *l'Algébre historique & pratique*, que mes premiers *Elemens des Mathématiques*, qu'il attribuë à une personne plus habile que moy, sont un recuëil de tous ou de la pluspart des Ecrivains de ce genre, mais où le Lecteur n'est point interrompu par le récit des noms de ces divers Autheurs, dont il suppose que je me suis servi, excepté de deux de ma nation, pour user de ses termes, qui sont Messieurs Descartes & Viéte. Il en pouvoit bien ajoûter quelques-uns, à qui je rends justice dans les occasions.

Il est pourtant vrai qu'alors javois lû peu d'Auteurs sur l'Algébre, & que M^r Descartes estoit presque l'unique sur qui je me fusse formé. Il n'y avoit pas quatre ans, quand on commença d'imprimer mon Livre, que j'avois commencé d'étudier les premiers principes de l'Analyse & de la Géométrie. Et ainsi il n'est pas vrai-semblable que j'eusse pû lire & digérer en si peu de temps une foule de Livres, que l'ancienne méthode fait ordinairement paroître obscurs & difficiles jusques dans les moindres choses. Je n'étois pas même en état d'en rassembler une bibliothéque, quand je l'eusse souhaité; & deux ou trois, qui m'étoient par hazard tombez entre les mains, m'avoient fait perdre entiérement l'envie d'en rechercher & d'en lire d'autres. Lors même qu'on m'avertit du Livre de Monsieur Wallis, je ne sçavois que le nom d'un seul des Auteurs Anglois qu'il y nomme, & la grande réputation de son Harriot n'étoit pas encore venuë jusqu'à moi.

Mais il importe peu d'informer ici le public de ce qui me regarde en particulier; ou plûtôt je dois avoüer que je suis redevable à ce sçavant homme du témoignage obligeant qu'il rend à mes écrits, en prétendant qu'ils sont un assemblage de ce que tous ou la plus part des Auteurs ont écrit sur cette matiére. On peut bien croire qu'il est bon connoisseur, puis qu'il y a plus de 50 ans qu'il a commencé de s'appliquer aux Mathématiques, qu'il en a employé plusieurs avec beaucoup de succez & de gloire à les enrichir de divers ouvrages, & qu'il en a soigneusement étudié l'histoire. Il est vrai que je le prierois volontiers de m'apprendre où l'on trouve les régles que je donne pour la résolution des troisiéme & quatriéme degrez, dont quelques-unes mêmes ont parû impossibles à M^r Descartes. Mais j'aime mieux luy donner gain de cause, puis que j'estime son mérite, que d'entrer en dispute avec luy sur ce qui me regarde. Et je veux bien qu'on croye qu'il y a peu de mon invention, non seulement dans mon premier ouvrage, mais même en celuy-ci; pourvû qu'il soit facile d'y voir clairement & dans un bon ordre, & d'y apprendre à fond ce qu'on verroit peut être avec moins d'étenduë & d'enchaînement comme démembré & dispersé dans un grand nombre d'autres, dont il seroit difficile de percer les obscuritez; & qu'on se puisse épar-

TABLE
DES MATIERES
Qui sont comprises dans les neuf Livres de ce second volume.

NOUVEAUX

l'excés dont a surpasse b est égal aux deux grandeurs ensemble z & c. Et $zz - az + bc \propto o$, marque que le quarré zz moins le plan az plus la grandeur bc n'est d'aucune valeur ou ne donne rien, ou que $zz - az + bc$ est égale à zéro. La marque $\propto$ de l'égalité sera celle dont on se servira dans la suitte, ainsi qu'on l'a déja fait en divers endroits du premier volume.

Ces sortes d'expressions, comme $a - b \propto z + c$, se nomment *égalitez*. Et ce qu'on trouve de part & d'autre du signe $\propto$ de l'égalité est appellé *membre de la même égalité*; $a - b$ le premier, & $z + c$ le second. Et pareillement dans l'égalité $zz - az + bc \propto o$, le premier membre est $zz - az + bc$, & le second membre est o ou zéro.

PROBLEME GENERAL.

1. *AYant proposé un Problême ou une question à résoudre, pour en donner la résolution.*

On dénommera chaque grandeur, les connuës par les premiéres lettres a, b, c, d, &c; & les inconnuës par les derniéres z, y, x, v, &c. Et ensuitte considérant la question comme si elle étoit déja résoluë, on exprimera par des égalitez toutes les conditions supposées, ou tout ce qu'on accorde & qu'on connoît déja. Et enfin on réduira successivement & par ordre ces diverses égalitez, en ajoûtant à chacun de leurs membres des grandeurs égales, ou retranchant des grandeurs égales de chacun, ou multipliant, ou divisant chacun par des grandeurs égales, ou enfin en tirant de chacun des racines égales & semblables. Et on réïterera toutes ces diverses opérations autant & selon qu'il est nécessaire, jusques à ce que l'inconnu reste seul d'une part, & le connu qui luy est égal de l'autre. Et alors la question sera pleinement résoluë. Divers exemples & même tout ce second volume pourront fixer & éclaircir avec plus d'étenduë ces régles générales.

2. Et pour faire ces réductions des égalitez méthodiquement & par ordre. On cherche premiérement la valeur d'une même inconnuë dans chaque égalité qui l'enferme. Et l'on compare une de ces valeurs avec chaque autre; ce qui fournit des égalitez nouvelles, dans chacune desquelles on cherche en même sorte la valeur d'une autre inconnuë. Et comparant de nouveau une de ces valeurs avec chaque autre, on tire encore d'autres égalitez qui servent à leur tour pour trouver les valeurs d'une autre inconnuë, avec lesquelles on forme aussi des égalitez. Et ainsi de suitte jusqu'à la derniére qui n'aura plus qu'une inconnuë dont on recherche enfin la valeur.

3. Et substituant alors cette valeur à la place de l'inconnuë qui luy est égale, dans la valeur d'une autre inconnuë où l'inconnuë découverte est seule; la nouvelle devient parfaitement connuë. Et substituant les deux valeurs de ces deux inconnuës dans celle d'une nouvelle inconnuë, où ces deux seules se rencontrent; la nouvelle devient toute connuë. Et continuant jusqu'à la fin de la même sorte & dans un ordre rétrograde, on con-

noît enfin chacune des grandeurs qui étoient inconnuës. Tout ceci n'eſt qu'une expoſition un peu plus étenduë de quelques régles du problême. Et les queſtions ſuivantes en fourniront divers éclairciſſemens.

Et s'il eſt plus commode, on fait encore la réduction des égalitez, en les joignant alternativement enſemble ou une à une, ou deux à une, ou une à trois, ou deux à deux, & ainſi du reſte ſelon qu'il ſera néceſſaire, ou qu'on le pourra juger à propos. Ou bien encore en les retranchant de la ſorte les unes des autres. Ou ſi l'on veut, en les multipliant ou diviſant les unes par les autres; & enfin ſelon les divers changemens que l'on y peut faire pour en déduire la connoiſſance de ce qui eſt caché.

I QUESTION.

4. *SI deux perſonnes dépenſent* 100 *écus, & l'une* 40 *plus que l'autre. On demande ce que chacune aura dépenſé?*

Examen des ſuppoſitions.

Pour réſoudre la queſtion. Je la conſidére comme étant déja pleinement réſoluë; & nommant z le nombre inconnu des écus qu'a dépenſé la premiére perſonne, & y celuy des écus qu'a dépenſé l'autre; je dis ſelon la premiére des deux ſuppoſitions; les deux nombres inconnus z & y de tous les écus font 100 écus étant pris enſemble, & j'exprime cette ſuppoſition, en l'écrivant comme par abbréviation dans cette égalité $z + y \propto 100$. Et je dis enſuitte ſelon la ſeconde des ſuppoſitions; le plus grand nombre z des écus qu'a dépenſé la premiére perſonne ſurpaſſe de 40 le plus petit y des écus qu'a dépenſé l'autre. Et ainſi ajoûtant 40 au moindre y, je formerai cette égalité $z \propto y + 40$; ou ſi on veut ôter 40 du plus grand nombre z, je formerai cette autre égalité $z - 40 \propto y$: Le choix eſt arbitraire ou indifférent pour ces deux égalitez. Pour me déterminer je choiſis la derniére $z - 40 \propto y$.

Grand nombre. *Petit.* { 1^{ere} *ſuppoſition* { 2de *ſuppoſition*
z y { 1^{ere} *égalité* $z + y \propto 100$. { 2^{e} *égalité* $z - 40 \propto y$.

Premiére maniére de réſolution.

Je cherche enſuitte dans chacune des deux égalitez $z + y \propto 100$, & $z - 40 \propto y$, la valeur d'une même inconnuë z; ôtant y dans la premiére de chacun des deux membres $z + y$ & 100, ce qui fournit l'égalité nouvelle $z \propto 100 - y$: & ajoûtant 40 dans la ſeconde à chacun des deux membres $z - 40$ & y, ce qui fournit auſſi l'égalité $z \propto y + 40$. Et comme ces deux égalitez nouvelles $z \propto 100 - y$ & $z \propto y + 40$ ont pour leurs premiers membres la même inconnuë z; il eſt clair que la premiére valeur $100 - y$ de z eſt au juſte égale à la ſeconde $y + 40$. Ce que j'exprime écrivant ſimplement cette autre égalité $100 - y \propto y + 40$, où il ne reſte qu'une inconnuë y. Et pour réſoudre enfin cette egalité, ou pour y découvrir la juſte valeur de l'inconnuë y; j'ajoûte y à chacun de ſes membres, ce qui fournit encore l'égalité $100 \propto 2y + 40$, où je retranche en-

Voyez la page ſuivante.

core 40 de chacun des deux membres, afin que l'inconnuë s'y puisse rencontrer toute seule d'une part. Cela fournit cette autre égalité $60 \propto 2y$. Et prenant les moitiez de ses membres, je trouve l'égalité $30 \propto y$. Et connoissant y, je substituë sa valeur connuë 30 pour y dans l'égalité $z \propto 100 - y$, ou dans l'autre $z \propto 40 + y$. Et je trouve l'égalité $z \propto 70$. De sorte que les deux personnes ont dépensé, la premiére 70 écus, & la seconde 30 écus.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{1ere égalité} \\ z + y \propto 100. \\ \underline{-y \propto -y} \\ z \;*\; \propto 100 - y. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \textit{2e égalité} \\ z - 40 \propto y. \\ \underline{+40 \propto +40} \\ z \;*\; \propto y + 40. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{llll} & \textit{Nouvelle}\ 100 - y & \propto & y + 40 \\ & \underline{\quad +y} & \underline{\propto} & \underline{+y} \\ 4^e & 100 \;* & \propto & 2y + 40 \\ & \underline{-40} & \underline{\propto} & \underline{-40} \\ 5^e & 60 \;* & \propto & 2y \;* \quad \textit{Et}\ 30 \propto y \end{array}\right.$$

$$\textit{Donc}\ 100 - y \propto 100 - 30 \propto z \propto 40 + y \propto 40 + 30 \propto 70. \quad (z \propto 70.\ y \propto 30.$$

Autre maniére.

Ou s'il est plus commode; aprés avoir consideré les deux égalitez $z + y \propto 100$, & $z - y \propto 40$; j'ajoûte ensemble les deux premiers membres $z + y$ & $z - y$ d'une part, & de l'autre les deux autres membres 100 & 40. D'où je tire une égalité nouvelle $2z \propto 140$, où prenant la moitié de chacun des deux membres, je trouve l'égalité $z \propto 70$. Et ôtant 70 de la somme 100 des deux z & y; le reste 30 est la valeur de l'inconnuë y.

Ou de la premiére égalité $z + y \propto 100$ ôtant la seconde $z - y \propto 40$, c'est à dire ôtant le premier membre $z - y$ du premier $z + y$, & le second 40 du second 100; je tire une nouvelle égalité $2y \propto 60$, où prenant la moitié de chacun des deux membres, je trouve l'égalité $y \propto 30$. Et ôtant y ou 30 de la somme 100 des deux z & y; le reste 70 est la valeur de l'inconnuë z.

$$\left\{\begin{array}{rl} \textit{A la premiére égalité} & z + y \propto 100. \\ \textit{ajoûter la seconde} & \underline{z - y \propto \ 40.} \\ \textit{somme \& nouvelle égalité} & 2z \;*\; \propto 140. \\ \textit{sa moitié} & z \;*\; \propto \ 70. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rl} \textit{De la 1ere égalité} & z + y \propto 100 \\ \textit{ôter la seconde} & \underline{z - y \propto \ 40} \\ \textit{Reste \& nouvelle égalité} & * \ 2y \propto 60 \\ \textit{sa moitié} & * \ \ y \propto 30 \end{array}\right.$$

Resolution generale.

Et pour résoudre la question généralement: Soit c la somme des deux nombres ensemble z & y, & d l'excez dont le grand z surpasse le moindre y. On aura donc par la premiére supposition l'égalité $z + y \propto c$; & par la seconde l'égalité $z - y \propto d$. Et ajoûtant ensemble d'une part les deux premiers membres $z + y$ & $z - y$, & de l'autre les deux autres membres c & d; on aura l'égalité nouvelle $2z \propto c + d$; & prenant la moitié de chacun des deux membres, on aura $z \propto \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$. Et ôtant alors z ou sa valeur $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$ de la somme c des deux z & y; ou bien ôtant la diffe-

RESOLUTION GENERALE.

Pour résoudre la question généralement. Je nomme z le plus grand ou le premier des nombres, & y le second, & x le troisiéme ; & a la somme 100 de tous les trois ensemble, & b l'excez dont le premier z surpasse le second y, & c l'excez dont le second y surpasse le troisiéme x.

Et considérant attentivement toutes les suppositions qui sont accordées, je dis par la premiére : z & y & x font la somme a ensemble, & j'écris la premiére égalité $z + y + x \propto a$. Et par la seconde supposition ; puisque le premier z surpasse le second y de l'excez b, si j'ajoûte b au second y, j'auray la seconde égalité $z \propto y + b$. Et par la troisiéme supposition ; si j'ajoûte au troisiéme x l'excez c dont le second y le surpasse, j'auray la troisiéme égalité $y \propto x + c$.

Et voyant que l'inconnuë y est dans chacune des trois égalitez, j'en cherche trois valeurs ; l'une par la premiére $z + y + x \propto a$, en ôtant de chacun de ses membres les grandeurs z & x, ce qui donne une nouvelle égalité $y \propto a - z - x$.

Et pour avoir par la seconde $z \propto y + b$ une valeur de la même y, j'ôte b de chacun des deux membres, & j'ay cette autre égalité $z - b \propto y$.

Et pour trouver aussi par la troisiéme égalité une valeur de l'inconnuë y, je n'y change rien, puisque sa valeur $x + c$ est déja marquée.

Je compare ensuitte la premiére valeur $a - z - x$ de l'inconnuë y avec la seconde $z - b$, & encore avec la troisiéme $x + c$. Ce qui fournit ces deux égalitez $a - z - x \propto z - b$, & $a - z - x \propto x + c$. Et je cherche par chacune une valeur de la même x qui s'y rencontre, Par la premiére $a - z - x \propto z - b$, en ajoûtant à chacun de ses membres les grandeurs x & b, & retranchant aussi de chacun l'inconnuë z, ce qui donne l'égalité $a - 2z + b \propto x$. Et pour l'autre $a - z - x \propto x + c$, j'ôte c de chaque membre, & j'ajoûte x à chacun. Ce qui fournit l'égalité $a - z - c \propto 2x$; Et prenant la moitié de chacun de ses membres, je trouve celle-ci $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}c \propto x$.

Et comparant enfin les deux valeurs $a - 2z + b$ & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}c$ de l'inconnuë x, je cherche par l'égalité $a - 2z + b \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}c$ une valeur de z, ajoûtant $2z$ à chacun de ses membres plus $\frac{1}{2}c$, & ôtant $\frac{1}{2}a$ de chacun. Ce qui fournit l'égalité $\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c \propto \frac{3}{2}z$. Et multipliant chaque membre par 2 pour ôter la fraction, l'égalité sera $1a + 2b + 1c \propto 3z$. Et divisant par 3 de part & d'autre pour avoir une valeur connuë du nombre z, je trouve l'égalité $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \propto z$. Et substituant pour z sa valeur connuë $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$ dans l'égalité $y \propto z - b$; je trouve $y \propto \frac{1}{3}a$

$-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$. Et mettant encore pour z sa même valeur dans l'égalité $a-2z+b \propto x$, je trouve $\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \propto x$.

1

$$\begin{array}{lll}
\text{1}^{\text{ere}}\ \textit{supposition} & \text{2}^{\text{e}}\ \textit{supposition} & \text{3}^{\text{e}}\ \textit{supposition} \\
\text{1}^{\text{ere}}\ \textit{égalité}\quad z+y+x \propto a. & \text{2}^{\text{e}}\ \textit{égalité}\quad z \propto y+b. & \text{3}^{\text{e}}\ \textit{égalité}\ y \propto x+c. \\
\qquad -z\ -\ x \propto -z-x. & \qquad -b \propto -b & \\
\text{4}^{\text{e}}\ \textit{égalité}\quad *\ y\ * \propto a-z-x \propto & z-b \propto y\ *. & \text{5}^{\text{e}}\ y \propto a-z-x \propto x+c. \\
\qquad b-z+x \propto -z+b+x. & & \qquad -c+x \propto x-c \\
\qquad a+b-2z \propto *\ \ *\ x. & & \qquad a-z-c \propto 2x.
\end{array}$$

$$\text{6}^{\text{e}}\ \textit{égalité}\ x \propto a+b-2z \propto \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}c.$$

$$-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+2z \propto -\frac{1}{2}a+2z+\frac{1}{2}c.$$

$$\text{7}^{\text{e}}\ \textit{égalité}\ \frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c \propto *\ \frac{3}{2}z\ *.\ \textit{Et}\ a+2b+c \propto 3z.$$

Donc $z \propto \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c$. ($y \propto \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$. ($x \propto \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c$.

AUTRE RESOLUTION.

La même question se peut résoudre encore plus facilement en cette sorte. Ayant nommé les grandeurs comme auparavant. Je dis : la seconde y vaut $x+c$, & la premiére z vaut $y+b$ ou $x+b+c$, & les trois ensemble z & y & x ou $x+b+c$ & $x+c$ & x font une somme $3x+b+2c$ qui est égale à la somme a connuë. J'écris donc l'égalité $3x+b+2c \propto a$. Et ôtant b & $2c$ de chacun de ses membres ; je trouve l'égalité $3x \propto a-b-2c$. Et divisant par 3 chacun des nouveaux membres ; je découvre enfin l'égalité $x \propto \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c$. Et y ou $x+c$ est $\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$. Et z ou $y+b$ est $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c$.

1

1ere *égalité* $z+y+x \propto a$. (2e $z \propto y+b$. (3e $y \propto x+c$. (*Donc* $z \propto x+b+c$.

(*Et* $z+y+x \propto 3x+b+2c \propto a$. (*Et* $3x \propto a-b-2c$. (*Et* $x \propto \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c$. &c.

COROLLAIRE ET PRINCIPE GENERAL.

7. JE tire de la résolution précédente ce principe général ou cette résolution générale. Que si l'on connoît une somme a de trois diverses grandeurs z & y & x, & l'excez b dont la plus grande z surpasse la moyenne y, & l'excez c dont la moienne y surpasse la moindre x ; la grande z vaut toûjours $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c$, ou comprend au juste un tiers de la somme a plus 2 tiers du premier excez b plus un tiers du second excez c. Et la seconde

y vaut toûjours $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$, ou le tiers de la somme a & le tiers du second excez c moins un tiers du premier excez b ; & la troisiéme x vaut $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c$, ou le tiers de la somme a moins un tiers du premier excez b moins encore 2 tiers du second excez c.

En exposant desormais ces sortes de résolutions générales, on supprimera les expressions communes du langage ordinaire, se contentant des seules expressions litterales ou numériques, les litterales étant plus capables de fixer la vûë de l'esprit & de l'éclairer, & même de ménager son attention & son application.

Somme a des trois z, y, x. Et b excez dont z surpasse y. Et c excez dont y surpasse x.

(1^{ere} $z \propto \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$. (2^{e} $y \propto \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. (3^{e} $x \propto \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c$.

III QUESTION.

8. *TRois personnes ayant chacune déboursé un certain nombre d'écus, il se trouve que la premiére & la seconde ensemble en ont débourse* 82 *plus que la troisiéme, & la premiére & troisiéme ensemble* 400 *plus que la seconde, & la seconde & troisiéme ensemble* 556 *plus que la premiére. On demande ce ce que chacune a débourse ?*

Pour résoudre la question, & pour la résoudre généralement. Je nomme z le premier nombre inconnu des écus, le second y, & le troisiéme x ; & prenant a pour 82, & b pour 400, & c pour 566 ; je dis par la premiére des suppositions : $z + y \propto x + a$. Et par la seconde : $z + x \propto y + b$. Et par la troisiéme : $y + x \propto z + c$.

Comparant ensuitte ces trois égalitez la premiére avec la seconde, & la premiére avec la troisiéme, & la seconde avec la troisiéme ; j'ajoûte ensemble les deux premiers membres $z + y$ & $z + x$ d'une part, & de l'autre les deux autres $x + a$ & $y + b$, & je trouve l'égalité $2z + y + x \propto y + x + a + b$, & ôtant $y + x$ de chacun de ses membres, je trouve $2z \propto a + b$.

J'ajoûte aussi les deux premiers membres $z + y$ & $y + x$ d'une part, & de l'autre les deux autres $x + a$ & $z + c$, & j'ai l'égalité $z + 2y + x \propto z + x + a + c$, & ôtant $z + x$ de chacun de ses membres, je trouve $2y \propto a + c$.

Et j'ajoûte pareillement d'une part les deux premiers membres $z + x$ & $y + x$, & de l'autre les deux autres $y + b$ & $z + c$, & j'ai l'égalité $z + y + 2x \propto z + y + b + c$, & ôtant $z + y$ de chacun de ses membres, je trouve $2x \propto b + c$.

Je prens enfin la moitié de chacun des deux membres dans chacune des trois égalitez nouvelles $2z \propto a + b$, & $2y \propto a + c$, & $2x \propto b + c$. Et je trouve $z \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & $y \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$, & $x \propto \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Et reprenant 82 pour a, & 400 pour b, & 566 pour c ; le premier nombre z est

eſt 241, & le ſecond y eſt 324, & le troiſiéme x eſt 483. Et la queſtion étant réſoluë par lettres eſt réſoluë généralement.

1^{ere} grandeur z. 2^e y. 3^e x. *1^{er} excez* $a \propto 82$. 2^d $b \propto 400$. 3^e $c \propto 566$.

	1^{ere} *ſuppoſition.*	2^e *ſuppoſition.*	3^e *ſuppoſition.*
	1^{ere} $z+y \propto x+a$.	2^e $z+x \propto y+b$	3^e $y+x \propto z+c$
	2^e $z+x \propto y+b$	3^e $y+x \propto z+c$	1^{ere} $z+y \propto x+a$
Sommes	$2z+y+x \propto y+x+a+b$.	$z+y+2x \propto z+y+b+c$.	$z+2y+x \propto z+x+a+c$.
	$-y-x \propto -y-x$	$-z-y \propto -z-y$	$-z-x \propto -z-x$
	$2z\ *\ * \propto **\ a+b$	$*\ *\ 2x \propto **\ b+c$	$*\ 2y \propto **\ a+c\ *$
Réſolution générale	$z \propto \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \propto 241$.	$x \propto \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \propto 483$.	$y \propto \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c \propto 324$.

QUATRIEME QUESTION.

9. *QUatre perſonnes ont gagné chacune un certain nombre d'écus; les trois premiéres enſemble 50 plus que la quatriéme, les deux premiéres & la quatriéme enſemble 40 plus que la troiſiéme, la premiére la troiſiéme & la quatriéme enſemble 30 plus que la ſeconde, & la ſeconde la troiſiéme & la quatriéme enſemble 20 plus que la premiére. On demande quel eſt le gain de chacune en particulier?*

Pour réſoudre la queſtion généralement ou d'une maniére infinie. Je nomme z le premier des nombres inconnus, & y le ſecond, & x le troiſiéme, & v le quatriéme; & prenant a pour 50, & b pour 40, & c pour 30, & d pour 20. Je dis par la premiére ſuppoſition; les trois premiéres z & y & x ont a plus que la quatriéme v, ce que j'exprime en écrivant l'égalité $z+y+x \propto v+a$.

J'exprime pareillement la ſeconde ſuppoſition par l'égalité $z+y+v \propto x+b$. Et la troiſiéme par la troiſiéme égalité $z+x+v \propto y+c$. Et la derniére par la quatriéme égalité $y+x+v \propto z+d$.

Je tire enſuitte une valeur de z de chaque égalité, ôtant $y+x$ de chacun des deux membres dans la premiére, & $y+v$ de chacun des deux dans la ſeconde, & $x+v$ dans la troiſiéme, & d dans la quatriéme. Et comparant la premiére valeur de z avec chacune des trois autres, j'ai trois égalitez nouvelles $v+a-y-x \propto x+b-y-v$. Et $v+a-y-x \propto y+c-x-v$. Et $v+a-y-x \propto y+x+v-d$. Et ajoûtant de part & d'autre $x+y+v-b$ dans la premiére, & $y+x+v-c$ dans la ſeconde, & $y-x-v+d$ dans la troiſiéme; je

1^{ere} grandeur z. 2^e y. 3^e x. 4^e v. (*1^{er} excez* $a \propto 50$. 2^e $b \propto 40$. 3^e $c \propto 30$. 4^e $d \propto 20$.

1^{ere} *égalité.*	2^e *égalité.*	3^e *égalité.*	4^e *égalité.*
$z+y+x \propto v+a$.	($z+y+v \propto x+b$.	($z+x+v \propto y+c$.	($y+x+v \propto z+d$.
$-y-x \propto -y-x$.	$-y-v \propto -y-v$.	$-x-v \propto -x-v$.	$-d \propto -d$.
($z \propto v+a-y-x$.	($z \propto x+b-y-v$.	($z \propto y+c-x-v$.	($y+x+v-d \propto z$.

I COROLLAIRE ET RESOLUTION GENERALE.

SI donc il y a quatre grandeurs z, y, x, v, telles que la premiére la ſeconde & la troiſiéme enſemble ayent un excez a ſur la quatriéme, & la premiére la ſeconde & la quatriéme enſemble un excez b ſur la troiſiéme, & la premiére la troiſiéme & la quatriéme enſemble un excez c ſur la ſeconde, & enfin la ſeconde la troiſiéme & la quatriéme enſemble un excez d ſur la premiére; les quatre grandeurs ſeront les quarts de celles que l'on expoſe ici.

(1ere $a+b+c-d$. (2e $a+b-c+d$. (3e $a-b+c+d$. (4e $-a+b+c+d$.

II COROLLAIRE

ET SUITTE INFINIE DE RESOLUTIONS GENERALES.

Pour cinq grandeurs.

Et s'il y a cinq grandeurs z, y, x, v, t, telles que les quatre premiéres enſemble ayent un excez a ſur la 5e, & les trois premiéres & la 5e enſemble un excez b ſur la quatriéme, & les deux premiéres & les deux derniéres enſemble un excez c ſur la troiſiéme, & la premiére & les trois derniéres un excez d ſur la ſeconde, & les quatre derniéres un excez e ſur la premiére; les cinq grandeurs ſeront les 6es parties de celles que l'on expoſe ici.

Réſolution générale.

(1ere $a+b+c+d-2e$. (2e $a+b+c-2d+e$. (3e $a+b-2c+d+e$.
(4e $a-2b+c+d+e$. (5e $-2a+b+c+d+e$.

Exemple. ($a \propto 6$. $b \propto 54$. $c \propto 44$. $d \propto 50$. $e \propto 56$. ($z \propto 7$. $y \propto 10$. $x \propto 13$. $v \propto 8$. $t \propto 32$.

Pour ſix grandeurs.

Et s'il y avoit ſix grandeurs, & que les excez alternatifs ſemblables aux précédens fuſſent $a, b, c, d, e . f$; les grandeurs ſeroient les 8es parties de celles-ci.

Réſolution générale.

(1ere $a+b+c+d+e-3f$. (2e $a+b+c+d-3e+f$. (3e $a+b+c-3d+e+f$.
(4e $a+b-3c+d+e+f$. (5e $a-3b+c+d+e+f$. (6e $-3a+b+c+d+e+f$.

Exemple. $\begin{cases} a \propto 29. \; b \propto 5. \; c \propto 33. \; d \propto 47. \; e \propto 49. \; f \propto 41. \\ z \propto 5. \; y \propto 1. \; x \propto 2. \; v \propto 9. \; t \propto 23. \; s \propto 11. \end{cases}$

Pour ſept grandeurs.

Et s'il y en avoit ſept; chaque excez ſeroit alternativement retranché 4 fois de la ſomme des autres, & les diviſions ſeroient faites par 10. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini, comme l'expoſent ces trois rangs de nombres infiniment continuez. De ſorte que s'il y avoit 45 grandeurs; ôtant 3 de 45, chaque excez à ſon tour ſeroit retranché 42 fois de la ſomme des autres. Et ajoûtant 1 à 42, & doublant 43, les diviſions ſeroient faites par 86. Et pareillement s'il y avoit 144 grandeurs ; ôtant 3 de 144, chaque excez à son tour seroit retranché 141 fois de la somme des autres. Et ajoûtant 1 à 141, & doublant 142, les divisions seroient faites par 284. Et ainsi des autres.

Nombre des grandeurs	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. &c.
Nombre des retranchemens	. . . 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. &c.
Divisions faites par	. . 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

COROLLAIRE GENERAL ET PROBLEME II.

10. *Pour réduire avec ordre & méthodiquement une égalité, ou pour y exclurre une certaine inconnuë de l'un de ses deux membres & la laisser toute seule dans l'autre.*

PREMIERE REGLE.

11. On efface également dans chacun de ses membres ce qu'on y trouve avec un même signe + ou avec un même signe —, & effaçant encore au membre, où on veut laisser l'inconnuë, tout ce qu'on y trouve avec cette inconnuë ; on le rejette à l'autre membre, où on l'écrit sous des signes contraires. Et effaçant aussi la même inconnuë dans cet autre membre, lorsqu'elle s'y rencontre ; on la rejette à celuy dans lequel on veut qu'elle reste seule, & on l'écrit aussi sous des signes contraires.

Quand on observera desormais cette premiére régle, on dira simplement que c'est *par transposition.* Et l'égalité nouvelle pourra s'appeller *transposée.*

PREMIER EXEMPLE.

Si l'égalite par exemple est $z - c \propto b$. Effaçant $- c$ au membre où est z, & écrivant $+ c$ dans l'autre membre; l'égalité, que je nomme *réduitte*, est $z \propto b - c$. Et ses membres sont égaux, parce qu'on n'a fait qu'ajoûter aux deux égaux de la précédente une même grandeur c.

Et si l'égalité est $z + c \propto b$; ôtant ou effaçant $+ c$ du membre où est z, & écrivant $- c$ dans l'autre membre, l'égalité réduitte est $z \propto b - c$. Et ses membres sont égaux, parce qu'on n'a fait qu'ôter des égaux de la précédente une même grandeur c.

Réduction par transposition.

1ere égalité	$z - c \propto b$	*1ere égalité*	$z + c \propto b$
Par addition	$+ c \propto + c$	*Par soustraction*	$- c \propto - c.$
Réduitte	$z \;\; * \propto b + c.$	*Réduitte*	$z \;\; * \propto b - c.$

SECOND EXEMPLE.

Et si l'égalité est $z + a - b \propto a - b + c$. Effaçant $+ a$ & $- b$ dans chacun des deux deux membres, l'égalité réduite est $z \propto c$. Ses membres sont égaux, parce qu'on n'a fait qu'ajoûter aux deux de la précédente une

même grandeur b, & ôter de chacun une même grandeur a.
Et pareillement si l'égalité est $z - c + d \propto b + c - d - 3z$. Effaçant déja $- c + d$ dans le membre où est z, j'écris $+ c - d$ dans l'autre avec ce qu'il avoit déja; & effaçant aussi $- 3z$ dans cet autre membre, j'écris $3z$ avec l'inconnuë z. Et l'égalité réduitte est $4z \propto b + 2c - 2d$.

Et si l'égalité est $a - z \propto b + c$. Afin que l'inconnuë z soit seule & positivement dans l'un des deux membres, je l'efface dans celuy où elle est avec le signe $-$, & j'écris $+ z$ dans l'autre membre. Et j'efface aussi $b + c$ dans cet autre pour écrire au premier $- b - c$.

Réduction par transposition.

$$\left\{\begin{array}{l} z + a - b \propto a - b + c. \\ \underline{- a + b \propto - a + b} \\ z \;*\; * \propto * \;*\; c. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} z - c + d \propto b + c - d - 3z. \\ \underline{3z + c - d \propto c - d + 3z} \\ 4z \;*\; * \propto b + 2c - 2d. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a - z \propto b + c. \\ \underline{- b - c + z \propto - b - c + z} \\ a - b - c \;* \propto * \;*\; z \end{array}\right.$$

SECONDE REGLE.

12. SI l'inconnuë est divisée par quelque grandeur. On effacera le dénominateur de cette fraction, & tout le reste sera multiplié par ce même dénominateur.

PREMIER EXEMPLE.

Comme si l'égalité est $\frac{z}{c} \propto b$; effaçant c au membre où est z, & multipliant l'autre membre par c, l'égalité réduitte est $z \propto bc$. Et ses membres sont égaux, parce qu'on a multiplié les égaux de la précédente par une même grandeur c.

Réduction par multiplication.

Egalité proposée $\left\{ \frac{z}{c} \propto b. \right.$ *sa réduitte.* $z \propto bc$. $\left\{ \right.$ *Proposée* $\frac{z}{13} \propto 20$. *Réduitte* $z \propto 260$.

SECOND EXEMPLE.

Et si l'égalité est $\frac{z}{c} + d \propto b + e$. Effaçant c dans la fraction $\frac{z}{c}$, & multipliant tout le reste par c; l'égalité sera $z + cd \propto bc + ce$, & sa réduite $z \propto bc + ce - cd$.

Egalité proposée $\left\{ \frac{z}{c} + d \propto b + e. \right.$ $\left\{ \right.$ *Transposée* $\frac{z}{c} \propto b + e - d$. $\left\{ \right.$ *Réduitte* $z \propto bc + ce - cd$.

TROISIEME REGLE.

13. SI l'inconnuë est multipliée par quelque grandeur; on effacera cette grandeur adjointe à l'inconnuë, & on divisera tout le reste par la même grandeur.

PREMIER EXEMPLE.

Comme si l'égalité est $cz \propto bd$. Effaçant c au membre où est z, & multipliant l'autre membre par c; l'égalité réduite est $z \propto \frac{bd}{c}$.

Réduction par division.

Egalité proposée $\left\{ cz \propto bd. \right\}$ *sa Réduitte* $z \propto \frac{bd}{c}$. $\left\{ \textit{Proposée}\ \frac{10}{13}z \propto 20. \right\}$ *Réduitte* $z \propto 26$.

SECOND EXEMPLE.

Et si l'égalité est $cz - bd \propto ac + de$. Effaçant c dans cz, & divisant tout le reste par c; l'égalité sera $z - \frac{bd}{c} \propto a + \frac{de}{c}$, & sa réduitte $z \propto a + \frac{de + bd}{c}$.

Réduction par division.

Proposée $cz - bd \propto ac + de$. (*Transposée* $cz \propto ac + de + bd$. (*Réduitte* $z \propto \frac{ac + de + bd}{c}$.

QUATRIEME REGLE.

14. ET si l'inconnuë est une puissance seconde, ou troisiéme, ou quatriéme, ou cinquiéme, ou quelqu'autre encore plus composée & qui forme elle seule un des membres. On prendra la racine quarrée, ou cubique, ou quatriéme, ou cinquiéme, ou autre linéaire de chacun des deux membres.

EXEMPLES.

Comme si l'égalité est $zz \propto bc$. Ayant tiré de part & d'autre la racine quarrée, la réduitte sera $z \propto \sqrt{bc}$. Et si l'égalité est $z^3 \propto abb - acd$. Ayant tiré de part & d'autre la racine cubique; la réduitte sera $z \propto \sqrt{C.\ \overline{abb - acd}}$. La raison est que les racines semblables des puissan-

b. 40. 8. ces égales, sont [b] égales.

Réduction par extraction des racines.

$\{$ *1ere égalité* $zz \propto bc$. (*sa réduitte* $z \propto \sqrt{bc}$. $\{$ *1ere* $z^3 \propto abb - acd$. ($z \propto \sqrt{C.\ \overline{abb - acd}}$.

I COROLLAIRE ET PROBLEME III.

PREMIER CAS.

15. POur réduire en général une égalité $zz + az \propto b$, où l'un des membres comprend un quarré zz de l'inconnuë par une connuë a, & où l'autre membre b est entiérement connu.

On ajoûtera dans chacun des deux membres le quarré $\frac{1}{4}aa$ de la moitié $\frac{1}{2}a$ de la grandeur connuë a. Et ensuitte on tirera la racine quarrée de chacun des deux membres de l'égalité nouvelle $zz + az + \frac{1}{4}aa \propto b + \frac{1}{4}aa$. Ce qui donnera l'égalité $z + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$. Et si on veut que le côté du quarré $zz + az + \frac{1}{4}aa$ soit une grandeur défective $-z - \frac{1}{2}a$; l'égalité sera $-z - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$. Et la premiére de ces égalitez donnera par transposition une valeur $z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, qui sera toûjours réelle. Et la seconde au contraire donnera toûjours une valeur fausse $z \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$. On parlera plus bas de ces valeurs fausses.

$$\text{Egalité proposée} \left\{ \begin{array}{l} zz + az \propto b. \\ zz + 6z \propto 16. \end{array} \right. \qquad 2^{e}\ \text{égalité} \left\{ \begin{array}{l} zz + az + \frac{1}{4}aa \propto b + \frac{1}{4}aa. \\ zz + 6z + 9 \propto 25. \end{array} \right.$$

$$3^{e}\ \text{des côtez} \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}. \\ z + 3 \propto 5. \end{array} \right. \qquad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -z - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}. \\ -z - 3 \propto 5. \end{array} \right.$$

$$1^{ere}\ \text{Réduitte} \left\{ \begin{array}{l} z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ z \propto 2 \end{array} \right. \qquad 2^{e} \left\{ \begin{array}{l} z \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ z \propto -8 \end{array} \right.$$

SECOND CAS.

16. ET si l'égalité est $zz - az \propto b$; la grandeur z aura une valeur réelle $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, & une valeur fausse $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

$$\text{Egalité proposée} \left\{ \begin{array}{l} zz - az \propto b. \\ zz - 6z \propto 16. \end{array} \right. \qquad 2^{e}\ \text{égalité} \left\{ \begin{array}{l} zz - az + \frac{1}{4}aa \propto b + \frac{1}{4}aa. \\ zz - 6z + 9 \propto 25. \end{array} \right.$$

$$3^{e}\ \text{des côtez} \left\{ \begin{array}{l} z - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}. \\ z - 3 \propto 5. \end{array} \right. \qquad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -z + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}. \\ -z + 3 \propto 5. \end{array} \right.$$

$$1^{ere}\ \text{Réduitte} \left\{ \begin{array}{l} z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ z \propto 8. \end{array} \right. \qquad 2^{e} \left\{ \begin{array}{l} z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ z \propto -2. \end{array} \right.$$

TROISIEME CAS.

17. ET si l'égalité est $zz - az \propto -b$; l'inconnuë z aura une valeur

Soit nommée $2z$ la somme inconnuë des deux nombres, & $2y$ leur différence, ou le plus [b] grand $z+y$ & le plus petit $z-y$. Et qu'ayant b. 5.
pris b pour 39, on prenne $2b$ pour 78 qui vaut 2 fois 39.

Par la premiére des deux suppositions; la somme $2z$ étant retranchée de la somme $2zz+2yy$ des quarrez $zz+2zy+yy$ & $zz-2zy+yy$, l'un du grand nombre $z+y$, & l'autre du moindre $z-y$; le reste est $2b$. D'où je tire cette égalité $2zz+2yy-2z \propto 2b$, ou sa moitié $zz+yy-z \propto b$. Et par la seconde supposition, la somme $2z$ étant ajoûtée au plan $zz-yy$ du nombre $z+y$ par l'autre $z-y$; la somme nouvelle est b. D'où je tire cette autre égalité $zz-yy+2z \propto b$.

Considérant ensuitte les deux égalitez $zz+yy-z \propto b$, & $zz-yy+2z \propto b$, je les ajoûte ensemble, c'est-à-dire que j'ajoûte ensemble d'une part les deux premiers membres $zz+yy-z$ & $zz-yy+2z$, & de l'autre les deux membres b & b. Et cela me donne l'égalité nouvelle $2zz+z \propto 2b$, ou sa moitié $zz+\frac{1}{2}z \propto b$. Et ajoûtant de part & d'autre, selon la régle du problême précédent, le quarré $\frac{1}{16}$ de la fraction $\frac{1}{4}$ qui est la moitié de l'autre $\frac{1}{2}$ qui multiplie z, je trouve $zz+\frac{1}{2}z+\frac{1}{16} \propto b+\frac{1}{16}$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, j'ay enfin l'égalité $z+\frac{1}{4} \propto \sqrt{b+\frac{1}{16}}$, ou par transposition $z \propto -\frac{1}{4}+\sqrt{b+\frac{1}{16}}$.

Et pour connoître y, je prens l'égalité $zz+yy-z \propto b$, ou sa transposée $yy \propto b+z-zz$. Et mettant pour z sa valeur, & pour zz le quarré de la même valeur; je connois $yy \propto 9$, ou $y \propto 3$. Et la question est résoluë. La premiére personne avoit $z+y$ ou 9 écus, &

Somme $2z$ *des nombres. Différence* $2y$. *Le grand* $z+y$. *le petit* $z-y$.

1[ere] *égalité* $2zz+2yy-2z \propto 2b$. 2[e] $\underline{zz-yy+2z \propto b}$.

A sa moitié $\left\{ zz+yy-z \propto b \right.$ ... *ajoûter la* 2[e] $\underline{zz-yy+2z \propto b}$

Transposer $zz+yy-z \propto b$.
6[e] *égalité* $yy \propto b+z-zz$.
sa réduite $y \propto \sqrt{b+z-zz}$.

3[e] *égalité* $2zz^{*}+z \propto 2b$

sa moitié $\left\{ \begin{array}{l} zz^{*}+\frac{1}{2}z \propto b \\ +\frac{1}{16} \propto \frac{1}{16} \end{array} \right.$

4[e] *égalité* $zz+\frac{1}{2}z+\frac{1}{16} \propto b+\frac{1}{16}$. (5[e] *des côtez* $z+\frac{1}{4} \propto \sqrt{b+\frac{1}{16}} \propto \sqrt{39\frac{1}{16}}$.

$\left\{ z \propto -\frac{1}{4}+\sqrt{b+\frac{1}{16}} \propto 6. \right.$ $\left\{ y \propto \sqrt{b+z-zz} \propto \sqrt{39+6-36} \propto 3. \right.$

la seconde $z - y$ ou 3. La somme 12 des écus étant ôtée de la somme 90 des quarrez 81 & 9 laisse 78 ; & étant ajoûtée à leur plan 27 la somme est 39.

II COROLLAIRE ET PROBLEME IV.

20. ☞ Pour réduire toute égalité $y^4 + ayy \propto b$, dont un membre $y^4 + ayy$ comprend un quarré du quarré de l'inconnuë y plus un produit ayy du quarré de la même inconnuë par une connuë a. On prendra l'égalité réduitte $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}$. Car prenant z pour yy, on aura zz pour y^4, & l'égalité $zz + az \propto b$ pour l'autre $y^4 + ayy \propto b$ que l'on propose. Comme donc z ou yy est $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$; on aura y ou $\sqrt{z} \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}$. Et si l'égalité est $y^4 - ayy \propto b$; la réduitte sera $y \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}$.

Premier Cas.

Egalité $y^4 + ayy \propto b \propto zz + az \propto b$.

sa Réduitte $yy \propto z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

Donc
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}.$$
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}.$$

Second Cas.

Egalité $y^4 - ayy \propto b \propto zz - az \propto b$.

sa Réduitte $yy \propto z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

Donc
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}.$$
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}}.$$

Et si l'égalité est $y^4 - ayy \propto -b$; la réduitte est $y \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}$.

Et enfin si elle est $y^4 + ayy \propto -b$; la réduitte est $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}$.

Et s'il y avoit y^6 & ay^3, on écriroit le signe $\sqrt{3^c}$ ou $\sqrt{C}$. Et s'il y avoit y^8 & ay^4 ; on écriroit le signe $\sqrt{}\sqrt{}$ ou $\sqrt{4^c}$. Et ainsi du reste.

Troisiéme Cas.

Egalité $y^4 - ayy \propto -b \propto zz - az \propto -b$.

sa Réduitte $yy \propto z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$.

Donc
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}.$$
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}.$$

Quatriéme Cas.

Egalité $y^4 + ayy \propto -b \propto zz - az \propto -b$.

sa Réduitte $yy \propto z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$.

Donc
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}.$$
$$y \propto \sqrt{z} \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}}.$$

III COROLLAIRE ET PROBLEME V.

PREMIER CAS.

21. Et si on veut supposer que $zz - az$ surpasse la grandeur connuë b; ayant pris x pour l'excez b; l'égalité sera $zz - az \propto b + x$. Et on aura une valeur $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x}$, qui surpassera $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$. Et ce seroit le contraire; si $zz - az$ étoit moindre que b.

$$\left\{\begin{matrix} zz - az \\ zz - 6z \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} b. \\ 16. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x} \\ z \propto 3 + \sqrt{25 + x} \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ 3 + 5 \propto 8. \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} zz - az \\ zz - 6z \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} b. \\ 16. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b - x} \\ z \propto 3 + \sqrt{25 - x} \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ 3 + 5 \propto 8. \end{matrix}$$

SECOND CAS.

22. Et si $zz + az$ surpasse b, ou vaut moins que b; on trouvera de la même sorte une des limites qui vaut moins que z, ou qui surpasse z.

$$\left\{\begin{matrix} zz + az \\ zz + 6z \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} b. \\ 16. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x} \\ z \propto -3 + \sqrt{25 + x} \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ -3 + \sqrt{25} \propto 2. \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} zz + az \\ zz + 6z \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} b. \\ 16. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x} \\ z \propto -3 + \sqrt{25 + x} \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}. \\ -3 + \sqrt{25} \propto 2. \end{matrix}$$

TROISIEME CAS.

23. Et si $zz + b$ surpasse az, ou vaut moins que cette grandeur; on trouvera aussi une des limites qui vaut plus ou moins que l'inconnuë z.

$$\left\{\begin{matrix} zz + b \\ zz + 8 \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} az. \\ 6z. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + x}. \\ z \propto 3 + \sqrt{1 + x}. \end{matrix}\right. \textit{surpasse} \begin{matrix} \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}. \\ 3 + 1 \propto 4. \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} zz + b \\ zz + 8 \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} az. \\ 6z. \end{matrix} \left\{\begin{matrix} z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + x}. \\ z \propto 3 - \sqrt{1 + x} \end{matrix}\right. \textit{moins que} \begin{matrix} \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}. \\ 3 - 1 \propto 2. \end{matrix}$$

QUATRIEME CAS.

24. **E**T enfin si $zz + az$ vaut plus ou moins que la grandeur défective $-b$; la valeur z sera pareillement plus grande ou moindre que la grandeur défective $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + az \\ zz + 6z \end{array}\right. \textit{surpasse} \begin{array}{l} -b. \\ -8. \end{array} \left\{\begin{array}{l} z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + x} \\ z \propto -3 + \sqrt{1 + x}. \end{array}\right. \textit{surpasse} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}. \\ -3 + 1 \propto -2. \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} zz + az \\ zz + 6z \end{array}\right. \textit{moins que} \begin{array}{l} -b. \\ -8. \end{array} \left\{\begin{array}{l} z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + x} \\ z \propto -3 + \sqrt{1 + x} \end{array}\right. \textit{moins que} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}. \\ -3 + 1 \propto -2. \end{array}$$

DEFINITIONS.

25. **L**Es problêmes seront appellez *linéaires*, si les inconnuës n'ont point divers degrez, ou ne sont point multipliées les unes par les autres dans la derniére égalité que l'on veut réduire, & qui exprime toutes les suppositions. Et alors on dira aussi que cette égalité est une *égalité linéaire*.

26. Mais si les inconnuës ont divers degrez, ou sont multipliées les unes par les autres en diverses maniéres dans la derniére égalité ; on dira que les problêmes sont de *plusieurs degrez*, ou qu'ils ont *plusieurs dimensions*. Et quelquesfois on les nommera *problêmes composez*. Et on dira aussi que l'égalité est *composée* ou *de plusieurs degrez*.

27. Si l'égalité peut avoir cette forme $zz - az \propto b$, ou celle-ci $zz - az - b \propto 0$; on dira qu'elle est *du second degré*, & que le problême dont elle expose toutes les suppositions est un problême *plan* ou *de deux dimensions*. Et ce seroit la même chose, si l'égalité avoit cette autre forme $zz + az - b \propto 0$, ou celle-ci $zz - az + b \propto 0$, ou encore celle-ci $zz + az + b \propto 0$.

28. Et si l'égalité peut avoir cette forme $z^3 + azz - bz - c \propto 0$, ou $z^3 - azz + bz - c \propto 0$, &c ; on dira qu'elle est *du troisiéme degré*, & que le problême, dont elle exprime toutes les suppositions est un problême *de trois dimensions*. Et on diroit aussi la même chose, si l'égalité avoit cette forme $z^3. * bz. c \propto 0$, ou celle-ci $z^3. azz. * c \propto 0$. Je suppose indifféremment le signe $+$ ou $-$, où je n'en marque point, excepté z^3.

Et je dirai pareillement que le problême ou la question est *de quatre dimensions*, & l'égalité qui en exprime toutes les suppositions aussi *du quatriéme degré*, si elle peut avoir une des six formes que j'expose icy. Mais la forme $z^4. * bzz. * d \propto 0$ marqueroit seulement une égalité du ſecond dégré. On ſuppoſe $+$ où il y a z^4, & indifféremment $+$ ou $-$ pour le reſte.

$$(1^{ere}\ forme\ z^4.\ az^3.\ bzz.\ cz.\ d \propto 0.\ (2^e\ z^4.az^3.bzz.{*}d \propto 0.\ (3^e\ z^4.az^3.{*}cz.d \propto 0.$$

$$(4^e\ z^4 {*}\ bzz.cz.d \propto 0.\quad (5^e\ z^4.\ az^3 {*}{*}\ d \propto 0.\quad (6^e\ z^4 {*}{*}\ cz.d \propto 0.$$

Et on dénommera de la même ſorte & ſuivant le même ordre les autres égalitez plus compoſées, & les problêmes dont elles expriment toutes les conditions. Et on ſuppoſera ordinairement le ſecond membre nul ou égal à zéro, ſi l'on manque d'avertir du contraire.

29. Je dirai que chaque partie d'une égalité compoſée, où l'inconnuë eſt au même degré, eſt un des *termes* de l'égalité; le premier terme eſt celle où l'inconnuë monte au plus haut degré, & le ſecond terme celle où l'inconnuë a un degré moins que dans le premier, & le troiſiéme celle où l'inconnuë eſt auſſi moins élevée d'un degré qu'elle n'eſt au ſecond. Et ainſi du reſte juſqu'au dernier terme où l'inconnuë ne ſe trouve point. Dans l'égalité par exemple $z^4 - az^3 + bzz + cz - d \propto 0$, le premier terme eſt z^4, & le ſecond eſt $-az^3$, & le troiſiéme bzz, & le quatriéme cz, & le cinquiéme ou dernier eſt $-d$. Et dans l'égalité $z^4 - az^3 + bzz * - d \propto 0$, le quatriéme terme eſt nul. Ce qu'on nommera *un terme évanoüi*. Et dans l'égalité $z^4 * * + cz - d \propto 0$, le ſecond terme & le troiſiéme ſont deux termes évanoüis, & cz eſt le quatriéme terme.

30. En ordonnant une égalité, on écrit ſucceſſivement tous ſes termes, diſpoſant toûjours l'un ſous l'autre tout ce qui appartient à un même terme. Comme ſi l'on veut ordonner une égalité $z^3 - azz + abz - bzz + acz - czz + bcz - abc \propto 0$; dont le ſecond membre eſt $-azz - bzz - czz$, & le troiſiéme $abz + acz + bcz$, on écrit & diſpoſe ainſi tous ſes termes.

$$z^3 \begin{array}{l} -azz \\ -bzz \\ -czz \end{array} \begin{array}{l} +abz \\ +acz \\ +bcz \end{array} -abc \propto 0. \qquad \textit{ou pour abbréger} \qquad z^3 \begin{array}{l} -a \\ -b \\ -c \end{array} zz \begin{array}{l} +ab \\ +ac \\ +bc \end{array} z -abc \propto 0.$$

31. On dira qu'un problême eſt *réel*, lorſqu'on n'y ſuppoſe aucune abſurdité. Et qu'il eſt *imaginaire*, ſi les ſuppoſitions qu'on y fait ſe détruiſent, ou s'il y a quelque contradiction.

Les valeurs connuës des lettres inconnuës de l'égalité ſeront nommées *racines* de l'égalité: *racines vraies*, ſi elles ſont poſitives; & *racines fauſſes*, ſi elles ſont négatives. Et je dirai qu'elles ſont *imaginaires*, ſi elles ne ſont ni vraies, ni fauſſes, ni égales à rien, ou qu'elles enferment une contradiction. On doit parler ailleurs des égalitez compoſées, & des différentes racines qu'elles peuvent avoir.

32. Je dirai qu'un problême eſt *indéfini*, lorſqu'on en peut donner une infinité de réſolutions différentes. Et qu'il eſt *indéterminé*, ſi l'on en peut donner pluſieurs différentes.

Et je dirai encore qu'on preſcrit les limites d'une réſolution indéterminée ou même indéfinie, lorſqu'on aſſigne ou qu'on expoſe la plus grande & la moindre des diverſes grandeurs qui peuvent chacune également ſatisfaire au problême ou réſoudre la queſtion poſitivement.

VI QUESTION ET PRINCIPE GENERAL.

33. *Connoiſſant la ſomme de diverſes grandeurs, de trois par exemple, & les ſommes alternatives de toutes moins chacune; pour trouver les grandeurs?*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & x la troiſiéme; & pris s pour la ſomme connuë des trois grandeurs, & a pour celle des deux premiéres, & b pour celle de la premiére & de la troiſiéme, & d pour celle de la ſeconde & de la troiſiéme. Puiſque les trois font s, & les deux premiéres a; la troiſiéme eſt neceſſairement $s - a$. Et puiſque les trois font s, & la premiére & la troiſiéme b; la ſeconde eſt $s - b$. Et la premiére par la même raiſon ſera $s - c$. Et la queſtion eſt réſoluë infiniment. Mais afin qu'il n'y ait point de contradiction dans les ſuppoſitions; il faut que la ſomme connuë s ſoit égale à la ſomme $3s - a - b - c$ des trois z, y, x. Et ſuppoſant 45 pour s, & 20 pour a, & 40 pour b, & 30 pour c; on trouvera 15 pour z, & 5 pour y, & 25 pour x.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

($z + y + x \propto s \propto a + x \propto b + y \propto c + z$. ($z \propto s - c$. ($y \propto s - b$. ($x \propto s - a$.

Exemple. ($a \propto 20$. $b \propto 40$. $c \propto 30$. $s \propto 45$. ($z \propto 15$. $y \propto 5$. $x \propto 25$.

VII QUESTION.

34. *Pour trouver trois grandeurs, dont on connoît les ſommes alternatives.*

Ayant nommé la premiére z, la ſeconde y, & la troiſiéme x; & a la ſomme connuë des deux premiéres z & y, & b celle de la premiére z & de la troiſiéme y, & d celle de la ſeconde y & de la troiſiéme x; la premiére ſuppoſition fournit la premiére égalité $z + y \propto a$. Et la ſeconde la ſeconde égalité $z + x \propto b$. Et la troiſiéme la troiſiéme égalité $y + x \propto c$. Et pour trouver chacune des valeurs; j'ajoûte enſemble ces trois égalitez, en prenant d'une part les trois premiers membres enſemble $z + y$ & $z + x$ & $y + x$, & de l'autre les trois autres, a, b, c. Ce qui fournit l'égalité $2z + 2y + 2x \propto a + b + c$, ou ſa moitié $z + y + x \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Et retranchant alors de la ſomme des trois chacune des ſommes alternatives, ou ôtant de cette derniére égalité chacune des trois que l'on a ſup-

1ere. $z + y \propto a \propto 20$. (5e. $z + y + x \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. (5e. $z + y + x \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.

2e. $z + x \propto b \propto 40$. 1ere. $\underline{- z - y \propto - a}$. 2e. $\underline{- z - x \propto - b}$.

3e. $\underline{y + x \propto c \propto 30}$. $x \propto -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \propto 25$. $y \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \propto 5$.

4e. $2z + 2y + 2x \propto a + b + c \propto 90$. ($z \propto a - y \propto b - x \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \propto 15$.

posées; ce qui se fera ôtant le premier terme du premier, & le second du second; j'aurai enfin $z \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, & $y \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, & $x \propto -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Et la question sera résoluë généralemenr. Mais afin qu'elle soit positive; il est absolument nécessaire que chacune des sommes alternatives a, b, c, soit moindre que les deux autres ensemble.

VIII QUESTION.

35. *Pour trouver quatre grandeurs, dont on connoît les sommes alternatives, en supposant qu'elles soient prises trois à trois.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x, & la quatriéme v; & a la somme déterminée des trois premiéres, & b la somme des deux premiéres & de la quatriéme, & c la somme de la premiére & des deux derniéres, & d la somme des trois derniéres; La 1[ere] des suppositions fournira la 1[ere] égalité $z + y + x \propto a$. Et on trouvera par la 2[e] la 2[e] égalité $z + y + v \propto b$. Et par la 3[e] la 3[e] égalité $z + x + v \propto c$. Et par la 4[e] la 4[e] égalité $y + x + v \propto d$. Et ajoûtant ensemble d'une part les quatre premiers termes de ces quatre égalitez, & de l'autre les quatre autres; je trouve l'égalité $3z + 3y + 3x + 3v \propto a + b + c + d$, ou son tiers $z + y + x + v \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d$. Et retranchant de la somme connuë des quatre chacune des sommes alternatives, ou ôtant de cette derniére égalité chacune des quatre que l'on a supposées, j'aurai enfin les égalitez $z \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}d$, & $y \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d$, & $x \propto \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d$, & $v \propto -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d$. Et la question est résoluë généralement. Mais afin qu'elle soit positive; le double de chacune des sommes alternatives doit être nécessairement plus petit que toutes les autres alternatives ensemble, par éxemple $2a$ moindre que $b + c + d$. &c.

1[ere]. $z + y + x \propto a \propto 27$. 6[e]. $z + y + x + v \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \propto \frac{93}{3} \propto 31$.

2[e]. $z + y + v \propto b \propto 24$.

3[e]. $z + x + v \propto c \propto 22$.

4[e]. $y + x + v \propto d \propto 20$.

5[e]. $\overline{3z + 3y + 3x + 3v} \propto a + b + c + d$.

Exemple, Et résolution génerale.

$$\left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}d \propto 11. \\ y \propto \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d \propto 9. \\ x \propto \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \propto 7. \\ v \propto -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \propto 4. \end{array}\right.$$

SUITTE INFINIE DE RESOLUTIONS GENERALES.

36. *Si l'on connoît de la même sorte toutes les sommes alternatives de diverses grandeurs prises ensemble moins chacune*; *pour trouver ces diverses grandeurs.*

On prendra une somme générale des sommes alternatives, & on retranchera ensuitte dans un ordre rétrograde de cette somme générale chacune des sommes alternatives à son tour autant de fois qu'il y a de grandeurs moins une. Et divisant chacun des restes par le nombre des grandeurs diminué de l'unité, les divers exposans résoûdront la question. Comme si les sommes alternatives des cinq grandeurs $z, y, x, v, t,$ prises quatre à quatre sont les grandeurs connuës a, b, c, d, e; on prendra la somme entiére $a + b + c + d + e$, & on en ôtera par ordre 4 fois chacune des alternatives e, d, c, b, a. Et les cinq restes $a + b + c + d - 3e$ & $a + b + c - 3d + e$ & $a + b - 3c + d + e$ & $a - 3b + c + d + e$ & $-3a + b + c + d + e$ étant chacun divisez par 4 résoudront la question. Et si l'on demandoit 45 grandeurs; on ôteroit chacune des sommes alternatives 44 fois de leur somme entiére, & la division seroit faite aussi par 44. Et ainsi du reste.

Pour 5 grandeurs

$$\begin{cases} 1^{ere}.\ z \propto \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d - \frac{3}{4}e. \\ 2^{e}.\ y \propto \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c - \frac{3}{4}d + \frac{1}{4}e. \\ 3^{e}.\ x \propto \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}e. \\ 4^{e}.\ v \propto \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}e. \\ 5^{e}.\ t \propto -\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}e. \end{cases}$$

Pour 6 grandeurs.

$$\begin{cases} 1^{ere}.\ z \propto \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{5}e - \frac{4}{5}f. \\ 2^{e}.\ y \propto \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}d - \frac{4}{5}e + \frac{1}{5}f. \\ 3^{e}.\ x \propto \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c - \frac{4}{5}d + \frac{1}{5}e + \frac{1}{5}f. \\ 4^{e}.\ v \propto \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{5}e + \frac{1}{5}f. \\ 5^{e}.\ v \propto \frac{1}{5}a - \frac{4}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{5}e + \frac{1}{5}f. \\ 6^{e}.\ f \propto -\frac{4}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}d + \frac{1}{5}e + \frac{1}{5}f. \end{cases}$$

IX QUESTION.

37. *Connoissant les sommes successives de quatre grandeurs prises deux à deux successivement; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde, & x la troisiéme, & v la quatriéme; & a la somme connuë de la premiére & de la seconde, & b celle de la seconde & de la troisiéme, & c la somme de la troisiéme & de la quatriéme, & d la somme de la quatriéme & de la premiére; on aura par la premiére supposition $z + y \propto a$. Et par la seconde $y + x \propto b$. Et par la troisiéme $x + v \propto c$. Et par la quatriéme $v + z \propto d$. Et transposant ces égalitez, je trouve $y \propto a - z$ pour la premiére, & $y \propto b - x$ pour la seconde, & $x \propto c - v$ pour la troisiéme, & $z \propto d - v$ pour la quatriéme. Et comparant les deux valeurs $a - z$ & $b - x$ de la même y, je trouve l'égalité $a - z \propto b - x$, ou par transposition $x \propto z + b - a$. Et comparant les valeurs $c - v$ & $z + b - a$ de la même x, je forme l'égalité $c - v \propto z + b - a$, ou par transposition $a - b + c - v \propto z$. Et comparant aussi les valeurs $d - v$ & $a - b + c - v$ de z; je forme l'égalité $a - b + c - v \propto d - v$, ou $a - b + c \propto d$, qui

qui ne peut fournir aucune valeur de l'inconnuë v ; parceque chacun des membres eſt entiérement connu, ou contient l'inconnuë également & ſous un même ſigne.

Et cela eſt une marque aſſurée que la queſtion eſt indéterminée, & qu'une des conditions, que l'on y ſuppoſe, eſt inutile ou répétée 2 fois ; puiſque les grandeurs a, b, c, étant déja déterminées, la quatriéme d ne doit pas l'être de nouveau, ne pouvant pas être arbitraire ou priſe à diſcretion, parce qu'elle égale néceſſairement la grandeur $a - b + c$.

Et la grandeur v n'ayant point une valeur particuliére, ou tout à fait connuë & déterminée par les égalitez ; elle eſt arbitraire ou indéterminée, & ſa valeur peut être priſe à diſcrétion. Mais afin que la réſolution puiſſe être poſitive ; l'arbitraire v ſera moindre que c, à cauſe de l'égalité $x \propto c - v$; & moindre auſſi que d, à cauſe de l'égalité $z \propto d - v$; mais elle doit ſurpaſſer $d - a$, à cauſe de l'égalité $y \propto a - d + v$; car les valeurs des grandeurs x, z, y, ſont priſes poſitivement. Si on vouloit que d fuſt arbitraire ; on pourroit changer une des ſuppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ \textit{égalité}\ z + y \propto a. \\ 1^{ere}\ \textit{transposée}\ y \propto a - z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2^{e}.\ y + x \propto b. \\ 2^{e}.\ y \propto b - x. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 3^{e}.\ x + v \propto c. \\ 3^{e}.\ x \propto c - v. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 4^{e}.\ v + z \propto d. \\ 4^{e}.\ z \propto d - v. \end{array}\right.$$

($a - z \propto b - x$. (*Sa tranſpoſée* $x \propto z + b - a \propto c - v$. (*Et* $z \propto a - b + c - v \propto d - v$.

Réſolution infinie.

(1^{ere}. $z \propto a - b + c - v$. (2^{e}. $y \propto b - c + v$. (3^{e}. $x \propto c - v$. (4^{e}. *v arbitraire.*

Exemple.

Si on vouloit ſuppoſer par éxemple a pour 13, & b pour 15, & c pour 19, & $d \propto a - b + c$ pour 17 ; le nombre arbitraire v, qui doit être entre c & $d - a$, & encore entre d & $d - a$, auroit ſes juſtes limites entre 17 & 4. C'eſt pourquoi prenant ſucceſſivement pour v chacun des nombres naturels qui ſont entre 4 & 17, on trouvera 12 réſolutions differentes : la premiére où les quatre nombres ſeront 12, 1. 14, 5 ; & la ſeconde où ils ſeront 11, 2, 13, 6. Et ainſi du reſte, comme on l'expoſe ici. Et ſi on vouloit prendre une fraction pour v, qui fuſt entre 5 & 17 ; on pourroit trouver une infinité de réſolutions. De ſorte que la queſtion eſt indéterminée, ſi tous les nombres ſont entiers ; & indéfinie, ſi l'on veut prendre auſſi des fractions.

$a \propto 13.\ b \propto 15.\ c \propto 19.\ d \propto 17 \propto a - b + c.\ z \propto d - v.\ y \propto a - d + v.\ x \propto c - v.$ *v arbitraire.*

Quatrième v	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Troiſième x	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.
Second y	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Premier z	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.

X QUESTION.

38. *Connoiſſant les ſommes ſucceſſives de cinq grandeurs priſes deux à deux ſucceſſivement ; pour trouver les grandeurs.*

conde $a - z$, & la troisiéme $-a + b + z$, & la quatriéme $a - b + c - z$, & la cinquiéme $z - a + b - c + d$. Et ainsi de suitte jusques à l'infini.

Suppositions.	*Résolution infinie.*
1ere. $z + y = a$. Et $y = a - z$.	1ere. z arbitraire entre a & $a - b$.
2e. $y + x = b$. Et $y = b - x = a - z$.	2e. $y = -z + a$. &c.
3e. $x + v = c$. Et $x = c - v = -a + b + z$.	3e. $x = z - a + b$.
4e. $v + t = d$. Et $v = d - t = a - b + c - z$.	4e. $v = -z + a - b + c$.
5e. $t + s = e$. Et $t = e - s = -a + b \cancel{- c + d + z}$.	5e. $t = z - a + b - c + d$.
6e. $s + z = f$ $= a - b + c - d + e$.	6e. $s = -z + a - b + c - d + e$.

Lorsque le nombre des grandeurs est impair.

40. Si le nombre des grandeurs est impair. Ayant disposé par ordre toutes les grandeurs connuës, on écrira d'abord la premiére avec $+$, & la seconde avec $-$, & la troisiéme avec $+$, & la quatriéme avec $-$; & ainsi de suitte jusques à la derniere. Et aprés cela on écrira les deux premiéres avec $+$, & les autres alternativement avec $-$ & $+$. Et de nouveau la premiére avec $-$, & la seconde & troisiéme avec $+$, & toutes les autres alternativement avec $-$ & $+$. Et ensuitte la premiére avec $+$, & la seconde avec $-$, & la troisiéme & quatriéme avec $+$, & toutes les autres alternativement avec $-$ & $+$. Et encore de la même sorte la premiére avec $-$, & la seconde avec $+$, & la troisiéme avec $-$, & la quatriéme & cinquiéme avec $+$, & toutes les autres alternativement avec $-$ & $+$. Et ainsi du reste. Et divisant par 2 toutes les grandeurs qu'on aura trouvées, les exposans résoudront la question, comme on l'a déja observé dans la résolution de la question 10e, & comme on peut encore l'observer dans celle-ci.

Suppositions.	*Résolution générale.*	
1ere $z + y = a = 4$.	$2z = a - b + c - d + e - f + g - h + i = 2$.	$z = 1$.
2e. $y + x = b = 5$.	$2y = a + b - c + d - e + f - g + h - i = 6$.	$y = 3$.
3e. $x + v = c = 8$.	$2x = -a + b + c - d + e - f + g - h + i = 4$.	$x = 2$.
4e. $v + t = d = 10$.	$2v = a - b + c + d - e + f - g + h - i = 12$.	$v = 6$.
5e. $t + s = e = 13$.	$2t = -a + b - c + d + e - f + g - h + i = 8$.	$t = 4$.
6e. $s + r = f = 16$.	$2s = a - b + c - d + e + f - g + h - i = 18$.	$s = 9$.
7e. $r + q = g = 12$.	$2r = -a + b - c + d - e + f + g - h + i = 14$.	$r = 7$.
8e. $q + p = h = 17$.	$2q = a - b + c - d + e - f + g + h - i = 10$.	$q = 5$.
9e. $p + z = i = 13$.	$2p = -a + b - c + d - e + f - g + h + i = 24$.	$p = 12$.

ONZIEME QUESTION.

PREMIER CAS.

41. *Pour trouver deux grandeurs, dont la somme étant ajoûtée au produit des deux, la nouvelle somme soit une certaine grandeur déterminée.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & a la somme connuë du plan des deux grandeurs; la supposition fournira l'égalité $zy + z + y = a$. Et ôtant y de chaque membre, on aura l'égalité $zy + 1z = a - y$, dont chaque membre étant divisé par $y + 1$, afin d'avoir la seule inconnuë z

cond $yy - 1y$. Et ajoûtant y de part & d'autre, la grandeur a ſurpaſſera le quarré yy, & l'arbitraire y ſera moindre que $\sqrt{a}$.

XII QUESTION.

45. *Pour trouver deux grandeurs, telles que le plan de leur ſomme par une grandeur connuë ſoit égal au produit de leur plan par une grandeur pareillement connuë.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & a la grandeur connuë qui multiplie leur ſomme, & b l'autre connuë qui multiplie leur plan; j'exprime tout ce qu'on a ſuppoſé dans l'égalité $az + ay \propto bzy$. Et enſuitte ôtant az de chaque membre, je trouve l'égalité $ay \propto bzy - az$, dont chaque membre étant diviſé par $by - a$, pour avoir d'une part la ſeule inconnuë z; je trouve une valeur $z \propto \frac{ay}{by - a}$. Et la queſtion eſt infiniment réſoluë, puiſque la grandeur y eſt encore arbitraire, ou qu'elle peut être priſe à diſcretion. Il faut pourtant prendre garde que le dénominateur ne ſera pas poſitif, ſi by ne ſurpaſſe pas la grandeur connuë a. De ſorte que diviſant par b de part & d'autre, le premier expoſant ou l'arbitraire y doit ſurpaſſer néceſſairement $\frac{a}{b}$.

1ere.	2e.	*Somme.*	*Plan.*	*Suppoſition.*	2e *égalité.*	*Réſolution infinie.*
z.	y.	$z + y$.	zy.	$az + ay \propto bzy$.	$ay \propto bzy - az$.	y *arbitraire.* $z \propto \frac{ay}{by - a}$.

Exemples. $\{a \propto 3.\ b \propto 2.\ y \propto 2.\ z \propto 6.$ $\{a \propto 3.\ b \propto 2.\ y \propto 3.\ z \propto 3.$ $\{a \propto 3.\ b \propto 2.\ y \propto 4.\ z \propto \frac{12}{5}.$

XIII QUESTION.

PREMIER CAS.

46. *Pour trouver trois grandeurs, dont les plans alternatifs ayant receu chacun ſes deux côtez, les ſommes ſoient chacune une grandeur connuë.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y, & la troiſiéme x; & a la ſomme connuë des deux premiéres & de leur plan, & b la ſomme connuë de la premiére & de la ſeconde & de leur plan, & c la ſomme connuë de la ſeconde & de la troiſiéme & de leur plan. La premiére ſuppoſition & la réſolution de la queſtion onziéme fourniront l'égalité $y \propto \frac{a - z}{z + 1}$. Et la ſeconde ſuppoſition & la même réſolution fourniront encore l'égalité $x \propto \frac{b - z}{z + 1}$. Et la troiſiéme ſuppoſition & la même réſolution fourniront de la même ſorte l'égalité $y \propto \frac{c - x}{x + 1}$, où ſubſtituant pour x ſa valeur $\frac{b - z}{z + 1}$, je trouve $y \propto \frac{cz + z - b + c}{b + 1}$. Et comparant les deux valeurs de

Ayant dénommé les grandeurs comme au premier cas, on trouvera en ordonnant à peu prés ses raisonnemens de la même sorte les valeurs qu'on veut découvrir.

1ere supposition. $\left\{ zy - z - y \propto a. \ (y \propto \frac{a+z}{z-1}. \right.$ *2e supposition.* $\left\{ zx - z - x \propto b. \ (x \propto \frac{b+z}{z-1}. \right.$ *3e supposition.* $\left\{ yx - y - x \propto c. \ (y \propto \frac{c+x}{x-1}. \right.$

$\left\{ y \propto \frac{a+z}{z-1} \propto \frac{c+x}{x-1}. \right. \left\{ a+z \propto \frac{cz+xz-c-x}{x-1}. \right. \left\{ ax+xz-a-z \propto cz+xz-c-x. \right.$

$\left\{ ax+x \propto cz+z+a-c. \right. \left\{ x \propto \frac{cz+z+a-c}{a+1} \propto \frac{b+z}{z-1}. \right. \left\{ cz+z+a-c \propto \frac{ab+1b+az+1z}{z-1}. \right.$

$(czz+zz-2cz+az-1z-a+c \propto ab+b+az+1z. \ (Ou \ czz+zz-2cz-2z \propto ab+a+b-c.$

$\left\{ zz-2z \propto \frac{ab+a+b-c}{c+1}. \right. \left\{ Ou \ zz-2z+1 \propto \frac{ab+a+b+1}{c+1}. \right. \left\{ z-1 \propto \sqrt{\frac{ab+a+b+1}{c+1}}. \right.$

Résolution générale. $\left\{ z \propto 1+\sqrt{\frac{ab+a+b+1}{c+1}}. \right. \left\{ y \propto 1+\sqrt{\frac{ac+a+c+1}{b+1}}. \right. \left\{ x \propto 1+\sqrt{\frac{bc+b+c+1}{a+1}}. \right.$

Exemple. $(a \propto 11. \ b \propto 19. \ c \propto 14. \ (z \propto 1+4 \propto 5. \ y \propto 1+3 \propto 4. \ x \propto 1+5 \propto 6.$

XIV QUESTION.

48. *Pour trouver trois grandeurs telles que le plan des deux premières soit égal au produit de leur somme par une grandeur connuë, & le plan de la première & de la seconde égal au produit de leur somme par une grandeur connuë, & le plan de la première & de la troisiéme encore égal au produit de leur somme par une grandeur connuë.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x; & a la grandeur connuë qui multiplie les deux premiéres z & y ensemble, & b la connuë qui multiplie la premiére z & la troisiéme y prises ensemble, & c enfin celle qui multiplie la seconde y & la troisiéme x encore prises ensemble. On aura par la premiére supposition la 1ere égalité $zy \propto az + ay$. Et par transposition $zy - az \propto ay$. Et divisant chaque membre par $y - a$, on aura une valeur $z \propto \frac{ay}{y-a}$. Et la seconde supposition fournit une seconde égalité $zx \propto bz + bx$. Et par transposition $zx - bz \propto bx$. Et divisant chaque membre par $x - b$, on aura une valeur $z \propto \frac{bx}{x-b}$. Et comparant les deux valeurs de z, on aura une égalité nouvelle $z \propto \frac{bx}{x-b} \propto \frac{ay}{y-a}$, dont chaque membre étant multiplié par $x - b$, donne $bx \propto \frac{ayx - aby}{y-a}$. Et cette égalité étant encore multipliée par $y - a$ pour ôter les fractions, on aura l'égalité $byx - abx \propto ayx - aby$. Et par transposition $aby - ayx + byx \propto abx$. Et divisant de part & d'autre par $bx + ab - ax$, on aura une valeur $y \propto \frac{abx}{ab - ax + bx}$. Et la troisiéme supposition fournit à son tour une troisiéme égalité $yx \propto cy + cx$. Et par transposition $yx - cy \propto cx$. Et divisant de part & d'autre par $x - c$, on aura une valeur $y \propto \frac{cx}{x - c}$. Et comparant cette valeur de l'inconnuë y avec l'autre valeur $\frac{abx}{ab - ax + bx}$, on formera l'égalité $\frac{cx}{x - c} \propto \frac{abx}{ab - ax + bx}$, dont chaque membre étant divisé par x donne $\frac{c}{x - c} \propto \frac{ab}{ab - ax + bx}$. Et multipliant cette égalité par $x - c$, on aura $c \propto \frac{abx - abc}{ab - ax + bx}$, où tout étant encore multiplié par $ab - ax + bx$, on aura l'égalité $abc - acx + bcx \propto abx - abc$. Et par transposition $2abc \propto abx + acx - bcx$. Et divisant de part & d'autre par $ab + ac - bc$, on aura enfin une valeur entiérement connuë $\frac{2abc}{ab + ac - bc}$ de la grandeur x. Et mettant pour x sa valeur dans chacune des égalitez $y \propto \frac{cx}{x - c}$ & $z \propto \frac{bx}{x - b}$; on trouve $y \propto \frac{2abc}{ab - ac + bc}$ & $z \propto \frac{2abc}{-ab + ac + bc}$. Et la question est résoluë généralement. Mais afin que les valeurs soient positives ; chacun des plans ab, ac, bc, doit être moindre que les deux autres ensemble.

1^ere^ égalité. $zy \propto az + ay$. *Sa transposée.* $zy - az \propto ay$. *Divisée.* $z \propto \frac{ay}{y - a}$. *2^e^ égalité.* $zx \propto bz + bx$. *Sa transposée.* $zx - bz \propto bx$.

Divisées. $z \propto \frac{bx}{x - b} \propto \frac{ay}{y - a}$. *Par multiplication.* $byx - abx \propto ayx - aby$. *Transposée.* $aby - ayx + byx \propto abx$.

Par division. $y \propto \frac{abx}{ab - ax + bx}$. *3^e^ égalité.* $yx \propto cy + cx$. *Sa transposée.* $yx - cy \propto cx$. *Divisées.* $y \propto \frac{cx}{x - c} \propto \frac{abx}{ab - ax + bx}$.

Par division. $\frac{c}{x - c} \propto \frac{ab}{ab - ax + bx}$. *Par multiplication.* $abc - acx + bcx \propto abx - abc$. *Transposée.* $2abc \propto abx + acx - bcx$.

Résolution générale. $x \propto \frac{2abc}{ab + ac - bc}$. $y \propto \frac{2abc}{ab - ac + bc}$. $z \propto \frac{2abc}{-ab + ac + bc}$.

Exemple. $a \propto 3$. $b \propto 5$. $c \propto 4$. $z \propto \frac{120}{7} \propto 17\frac{1}{7}$. $y \propto \frac{120}{23} \propto 5\frac{5}{23}$. $x \propto \frac{120}{17} \propto 7\frac{1}{17}$.

XV QUESTION.

49. *Pour trouver deux grandeurs dont le plan soit un cube parfait, qui aura pour côté un produit de la premiére par le quarré de la seconde.*

Ayant nommé z la 1^ere^ grandeur, & la 2^e^ y, & x le côté du cube inconnu

connu. Par la premiére des deux ſuppoſitions, le plan zy des grandeurs & le cube x^3 ſont égaux. Et diviſant l'un & l'autre par y, on aura l'égalité $z \propto \frac{x^3}{y}$. Et par la ſeconde ſuppoſition, le côté x du cube & le produit zyy de la 1ere grandeur z par le quarré yy de la 2e y ſont encore égaux. Et diviſant l'un & l'autre par y, l'égalité ſera $z \propto \frac{x}{yy}$. Et comparant les valeurs de z, on aura une égalité nouvelle $\frac{x^3}{y} \propto \frac{x}{yy}$, dont chaque membre étant diviſé par x, on aura $\frac{xx}{y} \propto \frac{1}{yy}$. Et multipliant de part & d'autre par yy, & diviſant les produits égaux yxx & 1 par xx, on trouvera enfin $y \propto \frac{1}{xx}$. Et mettant pour y ſa valeur $\frac{1}{xx}$ dans l'égalité $z \propto \frac{x^3}{y}$, ou dans l'autre $z \propto \frac{x}{yy}$; on trouvera $z \propto x^5$. Et la queſtion ſera infiniment réſoluë. On pourroit prendre encore $\frac{1}{x^5}$ pour z, & xx pour y. La grandeur x eſt arbitraire.

Suppoſitions.	*Comparaiſons.*	*Réſolution infinie.*
1ere. $zy \propto x^3$. (2e. $zyy \propto x$.	$z \propto \frac{x^3}{y} \propto \frac{x}{yy}$. ($xxy \propto 1$.	$y \propto \frac{1}{xx}$. $z \propto x^5$.

Exemples.	*arbitraire* $x \propto 2$. $y \propto \frac{1}{4}$. $z \propto 32$.	$x \propto \frac{1}{2}$. $y \propto 4$. $z \propto \frac{1}{32}$.
	Cube $zy \propto x^3 \propto 8$. *Côté* $x \propto zyy \propto 2$.	$zy \propto x^3 \propto \frac{1}{8}$. $zyy \propto \frac{1}{2}$.

XVI QUESTION.

50. E*T ſi le produit de la premiére par le quarré de la ſeconde doit former un cube parfait, qui ait pour racine cubique un plan de deux grandeurs.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y, & x le côté inconnu du cube. On aura par la premiére ſuppoſition $zyy \propto x^3$. D'où l'on tirera $z \propto \frac{x^3}{yy}$. Et par la ſeconde $zy \propto x$. D'où l'on tirera encore $z \propto \frac{x}{y}$. Et comparant les deux valeurs de z, on aura l'égalité $\frac{x}{y} \propto \frac{x^3}{yy}$, dont chaque membre

Suppoſitions.	*Comparaiſons.*	*Réſolution infinie.*
1ere. $zyy \propto x^3$. (2e. $zy \propto x$.	$z \propto \frac{x^3}{yy} \propto \frac{x}{y}$. ($xx \propto y$.	$z \propto \frac{1}{x}$. $y \propto xx$.

Exemples.	*arbitraire* $x \propto 2$. $z \propto \frac{1}{2}$. $y \propto 4$.	$x \propto \frac{1}{2}$. $z \propto 2$. $y \propto \frac{1}{4}$.
	Cube $x^3 \propto zyy \propto 8$. *Côté* $zy \propto x \propto 2$.	$zyy \propto \frac{1}{8}$. $zy \propto \frac{1}{2}$.

étant multiplié par $\frac{yy}{x}$, on trouvera enfin $y \propto xx$. Et mettant pour y sa valeur xx dans $z \propto \frac{x}{y}$, ou dans $z \propto \frac{x^3}{yy}$; on aura $z \propto \frac{1}{x}$. Et la question sera résoluë infiniment; on pourra prendre pour x telle grandeur arbitraire qu'on voudra.

XVII QUESTION.

51. *Pour trouver deux grandeurs, dont le plan soit une puissance* 4^e *& parfaitte, qui ait pour racine* 4^e *un produit de la premiére par le cube de la seconde.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & x la racine 4^e ou linéaire de la puissance 4^e & parfaite égale au plan des deux grandeurs; la premiére des deux suppositions fournira une premiére égalité $zy \propto x^4$. Et divisant par y, on trouvera $z \propto \frac{x^4}{y}$. Et la seconde supposition fournira aussi une seconde égalité $zy^3 \propto x$, laquelle étant divisée par y^3, donnera une valeur $z \propto \frac{x}{y^3}$. Et comparant les deux valeurs de z, on formera l'égalité $\frac{x}{y^3} \propto \frac{x^4}{y}$, dont chaque membre étant multiplié par y^3, donne $1x \propto x^4yy$. Et divisant par x^4, on aura $\frac{1}{x^3} \propto yy$. Et il est clair que la grandeur $\frac{1}{x^3}$ ou yy ne peut être en même temps & cubique & quarrée, que la racine cubique $\frac{1}{x}$ ne soit un quarré parfait, ou la quarrée y un cube parfait. Prenant donc pour la grandeur x, qui est arbitraire, un quarré arbitraire vv, ou $\frac{1}{vv}$ pour $\frac{1}{x}$, on aura $\frac{1}{x^3} \propto yy \propto \frac{1}{v^6}$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $y \propto \frac{1}{v^3}$. Et substituant pour y sa valeur $\frac{1}{v^3}$ dans l'égalité $z \propto \frac{x}{y^3}$, ou dans l'autre $z \propto \frac{x^4}{y}$, & pour x aussi sa valeur vv dans l'une ou l'autre des mêmes valeurs de z; on aura enfin $z \propto v^{11}$. Et la question sera infiniment résoluë; puisqu'ayant rempli toutes les conditions, la grandeur v est encore arbitraire.

Suppositions.	*Comparaisons.*	*Résolution infinie.*
1^ere. $zy \propto x^4$. (2^e. $zy^3 \propto x$.	$z \propto \frac{x^4}{y} \propto \frac{x}{y^3}$. ($yy \propto \frac{1}{x^3}$.	$y \propto \frac{1}{v^3}$. $z \propto v^{11}$.

Exemples.	*arbitraire* $v \propto 2$. $z \propto 2048$. $y \propto \frac{1}{8}$.	$v \propto \frac{1}{2}$. $z \propto \frac{1}{2048}$. $y \propto 8$.
	$zy \propto 256 \propto v^8$. $zy^3 \propto 4 \propto vv$.	$zy \propto \frac{1}{256}$. $zy^3 \propto \frac{1}{4}$.

XVIII QUESTION.

52. *Et si le produit de la premiére grandeur par le cube de la seconde est une puissance 4^e & parfaitte, qui ait pour racine 4^e un plan des deux grandeurs.*

Ayant encore nommé la premiére z, & la seconde y, & x la racine 4^e ou linéaire de la puissance 4^e & parfaite; on aura par la premiére supposition $zy^3 \propto x^4$. Et divisant par y^3, on aura $z \propto \frac{x^4}{y^3}$. Et par la seconde supposition $zy \propto x$. Et divisant par y, on aura $z \propto \frac{x}{y} \propto \frac{x^4}{y^3}$. Et si on multiplie par y^3 ces deux valeurs de z; l'égalité sera $yyx \propto x^4$. Et divisant par x, on aura $yy \propto x^3$. Et le côté y du cube x^3 ou yy est un cube parfait, & le côté x du quarré yy ou x^3 est aussi un quarré. De sorte que l'arbitraire x sera un quarré arbitraire vv. Et $yy \propto x^3 \propto v^6$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on trouvera $y \propto v^3$. Et substituant pour y sa valeur v^3, & pour x sa valeur vv dans l'une des égalitez $z \propto \frac{x}{y} \propto \frac{x^4}{y^3}$, on aura enfin $z \propto \frac{1}{x}$. Et la question sera résoluë infiniment.

Suppositions.	*Comparaisons.*	*Résolution infinie.*
1^{ere}. $zy^3 \propto x^4$. (2^e. $zy \propto x$.	$z \propto \frac{x^4}{y^3} \propto \frac{x}{y}$. ($x^3 \propto yy$.	$y \propto v^3$. $z \propto \frac{1}{v}$.

Exemples.	*arbitraire* $v \propto 2$. $z \propto \frac{1}{2}$. $y \propto 8$.	$v \propto \frac{1}{2}$. $z \propto 2$. $y \propto \frac{1}{8}$.
	$zy^3 \propto 256$. $zy \propto 4$.	$zy^3 \propto \frac{1}{256}$. $zy \propto \frac{1}{4}$.

PRINCIPE GENERAL.

POUR LA RESOLUTION.

Des égalitez indéterminées du second degré.

53. Lorsqu'on a exprimé toutes les suppositions d'un problême, & qu'un certain quarré indéterminé, plus ou moins quelque plan du côté indéterminé par une grandeur connuë, plus ou moins encore si l'on veut une grandeur connuë, doit former un quarré parfait; on feint que le côté de ce quarré parfait est une grandeur arbitraire plus ou moins le côté indéterminé. Ou généralement, lorsqu'une grandeur complêxe doit former un quarré ou une puissance parfaite; on feint en telle sorte le côté linéaire du quarré ou de la puissance, qu'aprés toutes les comparaisons nécessaires la grandeur indéterminée puisse être rabbaissée jusqu'au degré linéaire. Et le reste alors est facile. Divers exemples formeront dans la suitte une idée plus claire & plus distincte de ces régles abbrégées.

EXEMPLE ET QUESTION XIX.

54. *POur trouver deux grandeurs, dont le plan ſoit un cube parfait, qui ait pour ſon côté cubique un produit de la première par le quarré de la ſeconde, & de plus que la ſeconde avec ſon quarré faſſe un quarré parfait.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y, & x le côté du cube parfait; on trouvera déja par la réſolution de la queſtion 15^e que la premiére z eſt $\frac{1}{x^5}$, & la ſeconde $y \propto xx$. Ce qui ſatisfait déja aux deux premiéres des trois ſuppoſitions. Et pour remplir la troiſiéme, je conſidére que la ſomme $y + yy$ ou $xx + x^4$ eſt un nombre quarré; ou la diviſant par le quarré xx, que l'expoſant $1 + xx$ eſt encore un quarré, dont le côté ſurpaſſe x. Et afin de former ce quarré, je prens $v - x$ pour ſon côté. Et l'égalité eſt $v - x \propto \sqrt{1 + xx}$. Et quarrant chaque membre, elle eſt $vv - 2vx + xx \propto 1 + xx$. Et par tranſpoſition $vv - 1 \propto 2vx$. Et diviſant par $2v$, on aura $\frac{vv - 1}{2v} \propto x$. Et mettant $\frac{vv - 1}{2v}$ pour x dans l'égalité $\frac{1}{x^5}$, & encore dans l'autre $y \propto xx$; la queſtion ſera infiniment réſoluë. Mais la grandeur v, qui eſt arbitraire, doit ſurpaſſer 1, afin que le numérateur $vv - 1$ ſoit poſitif.

Suppoſitions. *Comparaiſons.*

$$\left\{ zy \propto x^3. \ (zyy \propto x. \ (y + yy \propto tt. \right\} \left\{ z \propto \frac{x^3}{y} \propto \frac{x}{yy}. \ (y \propto \frac{1}{xx}. \ (z \propto x^5. \right\} \left\{ Ou \ y \propto xx. \ (z \propto \frac{1}{x^5}. \right.$$

$$(\textit{Quarré} \ tt \propto y + yy \propto xx + x^4. \ (\textit{Quarré} \ \frac{tt}{xx} \propto 1 + xx \propto vv - 2vx + xx.$$

Réſolution infinie. $$\left\{ x \propto \frac{vv - 1}{2v}. \ y \propto \frac{v^4 - 2vv + 1}{4vv}. \ z \propto \frac{32v^5}{v^{10} - 5v^8 + 10v^6 - 10v^4 + 5vv - 1}. \right.$$

Exemple. $$\left\{ v \propto 2. \ y \propto \frac{9}{16}. \ z \propto \frac{1024}{243}. \ zy \propto \frac{64}{27}. \ zyy \propto \frac{4}{3}. \ y + yy \propto \frac{225}{256}. \right.$$

XX QUESTION.

55. *COnnoiſſant le premier terme, & la différence, & la ſomme entiére d'une progreſſion arithmétique; pour trouver le nombre des termes, & le dernier de tous.*

Ayant nommé le premier a, la différence d, & la ſomme entiére f; & y le nombre inconnu des termes, & le dernier terme z. La proprieté de la progreſſion arithmétique fournira le dernier terme $z \propto a + dy - 1d$, & la ſomme entiére de la progreſſion, qui eſt un produit de la ſomme $2a + dy - 1d$ des extrêmes par la moitié du nombre y des termes, ſera $ay + \frac{1}{2}dyy - \frac{1}{2}dy \propto f$. Et tout étant multiplié par 2, on aura l'égalité $2ay$

$+ 2a^3d + 2yd^4 + 6d^3s$ étant divisé par $4d$ donneroit un exposant qui résoût la question. Et on pourra trouver de la même sorte les suittes infinies des résolutions générales avec le secours des cellules du rang paralléle que l'on aura dû prendre.

Résolution générale pour la somme des cubes.

$$\left\{ \frac{t^4 - a^4 - yd^4 - 4d^3s - 2dt^3 + 2a^3d + 2d^4y + 6d^3s}{4d} \propto \frac{t^4 - a^4 - yd^4 - 4d^3s - 6rdd}{4d} \propto q. \right.$$

Suitte infinie de résoltions generales.

Pour les 4^{es} puissances. *Pour les 6^{es} puissances.* *&c.*

$$\left\{ \frac{t^5 - a^5 - yd^5 - 5d^4s - 10rd^3 - 10qdd}{5d} \propto p. \right. \quad \left\{ \frac{t^6 - a^6 - yd^6 - 6d^5s - 15rd^4 - 20qd^3 - 15pdd}{6d}. \right. \&c.$$

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND.

DE L'ANALYSE SIMPLE ET DETERMINE'E.

DEFINITION.

JE nomme *Analyſe ſimple & déterminée*, celle où les queſtions déterminées ſont exprimées par des égalitez, dont les inconnuës ne ſont que linéaires & planes ; & qu'on peut aiſément réſoudre par les ſeules régles preſcrites dans le Livre précédent.

PROBLEME GENERAL.

1. POur abbréger les régles générales de la réſolution des problêmes.

Au lieu de dénommer toutes les inconnuës différentes par diverſes lettres, & de tirer autant d'égalitez des ſuppoſitions qu'il y a d'inconnuës ; on peut ſouvent employer moins de lettres, & tirer auſſi moins d'égalitez, par le moyen de certains raiſonnemens faciles, ou de certaines connoiſſances familiéres, comme on le verra dans la pluſpart des réſolutions de cette ſeconde partie, où néanmoins on ne ſuppoſera que des véritez faciles & déja découvertes qui ſeront nommées *principes*.

I PRINCIPE.

2. SI on connoît la ſomme f de pluſieurs grandeurs, & les ſommes alternatives de toutes moins chacune, comme a la ſomme de toutes

moins la premiére, & b de toutes moins la seconde, & c de toutes moins la troisiéme. Et ainsi du reste. On ôtera de la somme s entiére la somme a de toutes moins la premiére, & le reste $s - a$ sera la premiére grandeur. Et la seconde sera pareillement $s - b$, & la troisiéme $s - c$.

$s \propto 45.\ a \propto 20.\ b \propto 40.\ c. \propto 30. \begin{cases} \quad 1^{\text{ere}} \qquad\qquad 2^{\text{e}} \qquad\qquad 3^{\text{e}} \\ s - a \propto 25.\ s - b \propto 5.\ s - c \propto 15. \end{cases}$

II PRINCIPE ET I QUESTION.

3. *Pour trouver deux grandeurs dont la somme & la différence sont déja connuës.*

Ayant nommé la grande z, & retranché de z la différence ou l'excez $2b$, le reste $z - 2b$ sera la moindre, & les deux étant ensemble égales à la somme $2a$, on forme l'égalité $2z - 2b \propto 2a$. Ou par transposition $2z \propto 2a + 2b$. Et prenant la moitié, on trouve $z \propto a + b$. Et la moindre ou $z - 2b$ est $a - b$.

$\begin{cases} \textit{Somme.} \\ 2a \propto 100. \end{cases} \begin{cases} \textit{Différence.} \\ 2b \propto 40. \end{cases} \begin{cases} \textit{Theorême \& résolution générale.} \\ \textit{La grande } z \propto a + b \propto 70.\ (\textit{La moindre } z - 2b \propto a - b \propto 30. \end{cases}$

II QUESTION.

4. *Connoissant la somme de trois grandeurs, & l'excez dont la premiére surpasse la seconde, & l'excez dont la seconde surpasse la troisiéme; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé x la 3^{e} ou la moindre; la 2^{e}, qui la doit surpasser de c, est $x + c$: Et la 1^{ere}, qui surpasse la seconde de b, est $x + b + c$. Et les trois étant égales ensemble à la somme a; on forme l'égalité seule $3x + b + 2c \propto a$. Ou par transposition $3x \propto a - b - 2c$. &c.

$\begin{cases} a.b.c. \textit{ Résolution} \\ 34.3.8. \textit{ générale.} \end{cases} \begin{cases} 3^{\text{e}}.\ x \propto \dfrac{a - b - 2c}{3}. \\ x \propto 5. \end{cases} \begin{cases} 2^{\text{e}}.\ x + c \propto \dfrac{a - b + c}{3}. \\ 5 + 8 \propto 13. \end{cases} \begin{cases} 1^{\text{ere}}.\ x + b + 2c \propto \dfrac{a + 2b + c}{3}. \\ 5 + 3 + 8 \propto 16. \end{cases}$

COROLLAIRE GENERAL.

5. Il est aisé d'observer dans cette résolution & dans une infinité de semblables, que les raisonnemens formez par la vûë seule de l'esprit ne différent point de ceux que l'on fait en observant pas à pas les régles generales; si ce n'est en ce que l'opération tacite ou secrette, que forme intérieurement l'esprit en luy-même, est plus promte que l'opération sensible de la plume.

Car si on nomme y la 2^{e} grandeur, & la 1^{ere} z; la 3^{e} supposition fournit l'égalité $y - c \propto x$, ou $y \propto x + c$. Et la 2^{e} supposition fournit l'égalité $z - b \propto y$, ou $z \propto y + b \propto x + b + c$. De sorte que les expressions $x + c$ & $x + b + c$ de la 2^{e} y & de la 1^{ere} z tirées de ces deux égalitez, dont on a chargé le papier, sont les mêmes que l'esprit a pû former d'abord tacitement en luy-même.

$\begin{cases} 3^{\text{e}} \textit{ supposition.} \\ y - c \propto x.\ y \propto x + c. \end{cases} \begin{cases} 2^{\text{e}} \textit{ supposition.} \\ z \propto y + b \propto x + b + c. \end{cases} \begin{cases} 1^{\text{e}} \textit{ supposition.} \\ z + y + x \propto 3x + b + 2c. \ \&c. \end{cases}$

III

TROISIÉME QUESTION.

PREMIER CAS.

6. POur trouver deux grandeurs z & y qui ayent un même rapport que deux connuës b & c, & dont la somme a soit encore connuë.

La seconde y étant une 4e proportionelle aux trois b, c, z, sera $\frac{cz}{b}$. Et comme a est la somme des deux z & y, l'égalité sera $z + \frac{cz}{b} \propto a$. Et multipliant par b, on aura $bz + cz \propto ab$, laquelle étant divisée par $b + c$, donne $z \propto \frac{ab}{b+c}$. Et la seconde y ou $\frac{cz}{b}$ est $\frac{ac}{b+c}$.

$$1^{ere}\ \textit{suppo-sition.} \left\{\begin{array}{l} b.\ c :: z.\ y. \\ 3.\ 1 :: z.\ y. \end{array}\right. \quad 2^{e}. \left\{\begin{array}{l} z + y \propto a. \\ z + y \propto 60. \end{array}\right. \quad \textit{Résolution générale.} \left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{ab}{b+c}. \quad y \propto \frac{ac}{b+c}. \\ z \propto 45. \quad y \propto 15. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

7. ET si la différence des deux z & y est a, & qu'elles ayent encore un même rapport que les deux grandeurs déterminées b & c. Si b surpasse c, l'égalité sera $z - y \propto z - \frac{cz}{b} \propto a$. D'où l'on tirera celle-ci $bz - cz \propto ab$, ou $z \propto \frac{ab}{b-c}$.

$$1^{o}. \left\{\begin{array}{l} b.\ c :: z.\ y. \\ 3.\ 1 :: z.\ \frac{1}{3}z. \end{array}\right. \quad 2^{o}. \left\{\begin{array}{l} z - \frac{cz}{b} \propto a. \\ 1z - \frac{1}{3}z \propto 60. \end{array}\right. \quad \textit{Résolution générale.} \left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{ab}{b-c}. \quad y \propto \frac{cz}{b} \propto \frac{ac}{b-c}. \\ z \propto 90. \quad y \propto \frac{90}{3} \propto 30. \end{array}\right.$$

IV QUESTION.

PREMIER CAS.

8. POur diviser une grandeur connuë a en deux parties z & y, en sorte qu'ayant ajoûté à la premiére z une grandeur connuë d, la somme $z + d$ & la seconde y ayent un même rapport que deux connuës b & c.

La seconde y étant une quatriéme proportionelle aux trois b, c, $z + d$, sera $\frac{cz + cd}{b}$. Et comme a est la somme des deux z & y, l'égalité sera $z + y \propto z + \frac{cz + cd}{b} \propto a$. Ou $bz + cz + cd \propto ab$. Et $bz + cz \propto ab - cd$. Ou $z \propto \frac{ab - cd}{b+c}$. Et $y \propto \frac{ac + cd}{b+c}$. Et ab doit surpasser cd.

$$1^{o}. \left\{\begin{array}{l} z + y \propto a. \\ z + y \propto 57. \end{array}\right. \quad 2^{o}. \left\{\begin{array}{l} b.\ c :: z + d.\ y. \\ 3.\ 2 :: z + 8.\ y. \end{array}\right. \quad \textit{Résolution générale.} \left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{ab - cd}{b+c}. \quad y \propto \frac{ac + cd}{b+c}. \\ z \propto 31. \quad y \propto 26. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

9. ET si a étoit la différence des parties z & y, & que b surpassast c; l'égalité seroit $z\frac{-cz-cd}{b} \propto a$. Ou $bz - cz \propto ab + cd$. &c.

$$1^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} z - y \propto a. \\ z - y \propto 17. \end{array}\right. \quad 2^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} b.c :: z + d.y. \\ 5.3 :: z + 11.y. \end{array}\right. \begin{array}{r} \textit{Résolution} \\ \textit{générale.} \end{array}\left\{\begin{array}{ll} z \propto \frac{ab+cd}{b-c}. & y \propto \frac{ac+cd}{b-c}. \\ z \propto 59. & y \propto 42. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

10. ET si les deux parties z & y font a, & que d soit retranchée de z; l'égalité sera $z\frac{+cz-cd}{b} \propto a$. Ou $bz + cz \propto ab + cd$. &c.

$$1^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} z + y \propto a. \\ z + y \propto 80. \end{array}\right. \quad 2^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} b.c :: z - d.y \propto \frac{cz-cd}{b}. \\ 3.1 :: z - 4.y \propto \frac{1z-4}{3}. \end{array}\right. \begin{array}{r} \textit{Résolution} \\ \textit{générale.} \end{array}\left\{\begin{array}{ll} z \propto \frac{ab+cd}{b+c}. & y \propto \frac{ac-cd}{b+c}. \\ z \propto 61. & y \propto 19. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

11. ET si a est la différence des parties z & y, & que d soit encore retranchée de z; l'égalité est $z\frac{-cz+cd}{b} \propto a$. Ou $bz - cz \propto ab - cd$. &c.

$$1^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} z - y \propto a. \\ z - y \propto 31. \end{array}\right. \quad 2^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} b.c :: z - d.y \propto \frac{cz-cd}{b}. \\ 4.3 :: z - 20.y \propto \frac{3z-60}{4}. \end{array}\right. \begin{array}{r} \textit{Résolution} \\ \textit{générale.} \end{array}\left\{\begin{array}{ll} z \propto \frac{ab-cd}{b-c}. & y \propto \frac{ac-cd}{b-c}.\ a. \\ z \propto 64. & y \propto 33. \end{array}\right.$$

V QUESTION.

PREMIER CAS.

12. SI deux grandeurs connuës a & b sont chacune au dessous de la juste grandeur z, & que le rapport des connuës g & p soit celuy des deffauts $z - a$ & $z - b$; pour trouver la juste grandeur z.

Ce qui manque à la moindre b pour égaler z surpasse ce qui manque à la grande a pour égaler la même inconnuë z. De sorte que si g surpasse p, on suppose un même rapport entre g & p qu'entre les deffauts $z - b$ & $z - a$. Et multipliant d'une part un extrême par l'autre, & de l'autre part l'un des moyens par l'autre, on aura l'égalité $pz - pb \propto gz - ag$. Et par transposition $gz - pz \propto ag - pb$. &c. Et la question est pleinement résoluë.

$$\left\{\begin{array}{l} z - b.\ z - a :: g.\ p. \\ z - 40.\ z - 30 :: 3.2. \end{array}\right. \textit{Et}\left\{\begin{array}{l} pz - pb \propto gz - ag. \\ 2z - 80 \propto 3z - 90. \end{array}\right. \begin{array}{r} \textit{Résolution} \\ \textit{générale.} \end{array}\left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{ag-bp}{g-p}\ \textit{juste grandeur.} \\ z \propto 60. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

13. ET si les connuës a & b sont chacune au dessus de la juste grandeur, & que g surpasse p ; la proportion étant $a - z.\ b - z :: g.\ p.$ l'égalité sera $ap - pz \propto bg - gz$. Ou par transposition $gz - pz \propto bg - ap$. &c. Et bg doit surpasser ap, ou b surpasser $\frac{ap}{g}$.

$$\left\{\begin{array}{l} a-z.\ b-z::g.p. \\ 140-z.60-z::3.1. \end{array}\right. \text{Et} \left\{\begin{array}{l} ap-pz \propto bg-gz. \\ 140-1z \propto 180-3z. \end{array}\right. \begin{array}{r}\textit{Résolution}\\ \textit{générale.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} z\propto \frac{bg-ap}{g-p}. \\ z\propto 20. \end{array}\right. \textit{juste grandeur.}$$

TROISIEME CAS.

14. ET si la connuë a est au dessus, & l'autre b au dessous de la juste grandeur z, & que la proportion soit $a - z.\ z - b :: g.\ p.$ l'égalité est $ap - pz \propto gz - bg$. Ou $ap + bg \propto gz + pz$. &c.

$$\left\{\begin{array}{l} a-z.z-b::g.p. \\ 180-z.z-60::5.1. \end{array}\right. \text{Et} \left\{\begin{array}{l} ap-pz \propto gz-bg. \\ 180-1z \propto 5z-300. \end{array}\right. \begin{array}{r}\textit{Résolution}\\ \textit{générale.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} z\propto \frac{ap+bg}{g+p}. \\ z\propto 80. \end{array}\right. \textit{juste grandeur.}$$

QUATRIEME CAS.

15. ET si les connuës a & b sont chacune ajoûtées à la juste grandeur z, & que les sommes $z + a$ & $z + b$ ayent un même rapport que les deux connuës g & p ; l'égalité est $pz + ap \propto gz + bg$. Et supposant toûjours que g surpasse p ; on aura par transposition $ap - bg \propto gz - pz$. &c. Et ap doit surpasser bg.

$$\left\{\begin{array}{l} z+a.z+b::g.p. \\ z+50.z+7::4.3. \end{array}\right. \text{Et} \left\{\begin{array}{l} pz+ap \propto gz+bg. \\ 3z+150 \propto 4z+28. \end{array}\right. \begin{array}{r}\textit{Résolution}\\ \textit{générale.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} z\propto \frac{ap-bg}{g-p}. \\ z\propto 122. \end{array}\right. \textit{juste grandeur.}$$

CINQVIEME CAS.

16. ET si la connuë a est ajoûtée à la juste grandeur z, & que la connuë b soit retranchée de la même z, & qu'il y ait un même rapport entre la somme $z + a$ & le reste $z - b$ qu'entre les connuës g & p ; l'égalité sera $pz + ap \propto gz - bg$. Et supposant toûjours que g surpasse p ; on aura par transposition $gz - pz \propto ap + bg$. &c.

$$\left\{\begin{array}{l} z+a.z-b::g.p. \\ z+5.z-8::4.3. \end{array}\right. \text{Et} \left\{\begin{array}{l} pz+ap \propto gz-bg. \\ 3z+15 \propto 4z-32. \end{array}\right. \begin{array}{r}\textit{Résolution}\\ \textit{générale.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} z\propto \frac{ap+bg}{g-p}. \\ z\propto 47. \end{array}\right. \textit{juste grandeur.}$$

SIXIEME CAS.

17. ET si la connuë a est ajoûtée à la juste grandeur, & que l'inconnuë z soit retranchée de la connuë b, & qu'il y ait un même rapport entre la somme $z + a$ & la différence $b - z$ qu'entre les connuës g & p ;

l'égalité eſt $pz + ap \propto bg - gz$, ou $gz + pz \propto bg - ap$. &c. Et bg doit ſurpaſſer ap.

$$\left\{\begin{array}{l} z + a.\ b - z :: g.p. \\ z + 5.\ 25 - z :: 2.3. \end{array}\right. \text{Et} \left\{\begin{array}{l} pz + ap \propto bg - gz. \\ 3z + 15 \propto 50 - 2z. \end{array}\right. \begin{array}{l} \textit{Réſolution} \\ \textit{générale.} \end{array} \left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{bg - ap}{g + p}. \\ z \propto 7. \end{array}\right. \textit{juſte grandeur.}$$

VI QUESTION.

PREMIER CAS.

18. *Pour trouver deux grandeurs, dont la ſomme ſoit une grandeur connuë, & une connuë la ſomme auſſi de certaines parties de la premiére & de certaines de la ſeconde.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y; & leur ſomme a, & b la ſomme des parties déterminées de la premiére & des parties déterminées de la ſeconde; ſi la fraction $\frac{c}{d}$ dénomme les parties de la premiére z, & la fraction $\frac{e}{f}$ les parties de la ſeconde y. On aura par la premiére des ſuppoſitions l'égalité $z + y \propto a$, ou $z \propto a - y$. Et par la ſeconde ſuppoſition, l'égalité $\frac{c}{d}z + \frac{e}{f}y \propto b$. Ou multipliant de part & d'autre par df, on aura $cfz + dey \propto bdf$. Ou $cfz \propto bdf - dey$. Et $z \propto \frac{bdf - dey}{cf} \propto a - y$. Et multipliant par cf, on aura $bdf - dey \propto acf - cfy$. Et par tranſpoſition, $bdf - acf \propto dey - cfy$, ſi de ſurpaſſe cf; ou $cfy - dey \propto acf - bdf$, ſi cf ſurpaſſe de.

$$\left\{\begin{array}{l} z + y \propto a.\ \frac{c}{d}z + \frac{e}{f}y \propto b. \\ z + y \propto 60.\ \frac{1}{3}z + \frac{1}{5}y \propto 14. \\ z + y \propto 60.\ \frac{1}{5}z + \frac{1}{3}y \propto 14. \end{array}\right. \begin{array}{l} \textit{Réſolution} \\ \textit{générale.} \end{array} \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{bdf - acf}{de - cf} \propto 15.\ z \propto \frac{ade - bdf}{de - cf} \propto 45. \\ y \propto \frac{acf - bdf}{cf - de} \propto 45.\ z \propto \frac{bdf - ade}{cf - de} \propto 15. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

19. Et ſi la connuë a eſt la ſomme des deux z & y, & b la différence qui ſe trouve entre certaines parties de la premiére z & certaines de la ſeconde y. Ou ſi la premiére égalité eſt $z + y \propto a$, ou $z \propto a - y$. Et la ſeconde $\frac{c}{d}z - \frac{e}{f}y \propto b$. On aura l'égalité $cfz - dey \propto bdf$, ou $cfz \propto bdf + dey$. Et $z \propto \frac{bdf + dey}{cf} \propto a - y$. Et $bdf + dey \propto acf - cfy$, ou enfin $dey + cfy \propto acf - bdf$. &c. Et ac ſurpaſſe bd.

$$\left\{\begin{array}{l} z + y \propto a. \\ z + y \propto 84. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{c}{d}z - \frac{e}{f}y \propto b. \\ \frac{1}{4}z - \frac{1}{3}y \propto 7. \end{array}\right. \begin{array}{l} \textit{Réſolution} \\ \textit{générale.} \end{array} \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{acf - bdf}{de + cf}.\ z \propto \frac{ade + bdf}{de + cf}. \\ y \propto 24.\ \quad z \propto 60. \end{array}\right.$$

$+ y$. Et $dey - bdf \propto acf + cfy$, ou $dey - cfy \propto acf + bdf$. &c. Et de ſurpaſſe cf, ou la fraction $\frac{e}{f}$ l'autre $\frac{c}{d}$.

VII QUESTION.

23. Deux grandeurs a & b étant déterminées, pour en trouver deux telles z & y, que la connuë a étant ajoûtée à la premiére z & retranchée de la ſeconde y, la ſomme $z + a$ & le reſte $y - a$ ayent un même rapport que deux connuës c & d. Et que la connuë b étant ajoûtée à la ſeconde y & retranchée de la premiére z, la ſomme $y + b$ & la différence $z - b$ ayent un même rapport que deux connuës e & f.

Par la premiére ſuppoſition, la proportion ſera $z + a . y - a :: c . d$. Et multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens, on aura l'égalité $dz + ad \propto cy - ac$, ou $dz \propto cy - ac - ad$. Et $z \propto \frac{cy - ac - ad}{d}$. Et par la ſeconde ſuppoſition $y + b . z - b :: e . f$. D'où l'on tire pareillement cette égalité $fy + bf \propto ez - be$. Ou $z \propto \frac{fy + be + bf}{e} \propto \frac{cy - ac - ad}{d}$. Et multipliant chaque membre par de, on aura l'égalité $dfy + bde + bdf \propto cey - ace - ade$. Ou $ace + ade + bde + bdf \propto cey - dfy$. &c. Et ce ſurpaſſe df.

Suppoſitions. *Réſolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} z + a . y - a :: c . d . \\ z + 15 . y - 15 :: 2 . 1 . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y + b . z - b :: e . f . \\ y + 25 . z - 25 :: 3 . 1 . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{ace + ade + bde + bdf}{ce - df} \propto 47 . \\ z \propto \frac{acf + adf + bce + bcf}{ce - df} \propto 49 . \end{array}\right.$$

VIII QUESTION.

24. Pour coupper une grandeur connuë a en deux z & y, & la même a encore en deux autres x & v, en telle ſorte que la plus grande z du premier partage & la moindre x du ſecond ayent un même rapport que deux connuës c & d; & la moindre y du premier & la grande v du ſecond un même que deux connuës e & f.

Par la premiére ſuppoſition $z \propto a - y$. Et par la ſeconde $x \propto a - v$. Et par la troiſiéme $c . d :: z . x \propto \frac{dz}{c} \propto a - v$. Et $dz \propto ac - cv$. Ou $z \propto \frac{ac - cv}{d} \propto a - y$. Et $ac - cv \propto ad - dy$. Et $ac - ad + dy \propto cv$. Ou $\frac{ac - ad + dy}{c} \propto v$. Et par la quatriéme ſuppoſition $e . f :: y . v$

Suppoſitions. *Réſolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} z + y \propto a \propto x + v . \\ z + y \propto 5 \propto x + x . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} c . d :: z . x . \\ 2 . 1 :: z . x . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} e . f :: y . v . \\ 1 . 3 :: y . v . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{acf - ace}{cf - de} \propto 4 . \ x \propto \frac{adf - ade}{cf - de} \propto 2 . \\ y \propto \frac{ace - ade}{cf - de} \propto 1 . \ v \propto \frac{acf - adf}{cf - de} \propto 3 . \end{array}\right.$$

$\propto \frac{fy}{e} \propto \frac{ac - ad + dy}{c}$. Et multipliant chaque membre par ce, on trouve l'égalité $cfy \propto ace - ade + dey$. Ou $cfy - dey \propto ace - ade$. &c. On suppose que c surpasse d, & qu'au contraire la grandeur e est moindre que l'autre f.

IX QUESTION.

25. Pour coupper une grandeur connuë a en deux z & y, & la même a en deux autres x & v, & encore la même a en deux nouvelles s & t; en telle sorte que la grande z du premier partage & la moindre x du second ayent un même rapport que deux connuës c & d; & que la grande v du second & la moindre t du troisiéme ayent un même rapport que deux connuës e & f; & la grande s du troisiéme & la moindre y du premier un même que deux connuës g & h.

Par la premiére supposition $z \propto a - y$. Et par la seconde $x \propto a - v$. Et par la troisiéme $t \propto a - s$. Et par la quatriéme $c.\, d :: z.\, x \propto \frac{dz}{c} \propto a - v$. Et $dz \propto ac - cv$. Ou $z \propto \frac{ac - cv}{d} \propto a - y$. Ou $ac - cv \propto ad - dy$. Et $dy \propto ad - ac + cv$. Ou $y \propto \frac{ad - ac + cv}{d}$. Et par la cinquiéme supposition $e.\, f :: v.\, t \propto \frac{fv}{e} \propto a - s$. Et $fv \propto ae - es$. Ou $v \propto \frac{ae - es}{f}$. Et par la sixiéme supposition $g.\, h :: s.\, y \propto \frac{hs}{g} \propto \frac{ad - ac + cv}{d}$. Et $dhs \propto adg - acg + cgv$. Ou $dhs + acg - adg \propto cgv$. Et $\frac{dhs + acg - adg}{cg} \propto v \propto \frac{ae - es}{f}$. Et $dfhs + acfg - adfg \propto aceg - cegs$. Ou $dfhs + cegs \propto aceg + adfg - acfg$. &c.

Suppositions.

$$\begin{cases} a \propto z + y \propto x + v \propto t + s. \\ 25 \propto z + y \propto x + v \propto t + s. \end{cases} \begin{cases} c.\, d :: z.\, x. \\ 3.\, 1 :: z.\, x. \end{cases} \begin{cases} e.\, f :: v.\, t. \\ 2.\, 1 :: v.\, t. \end{cases} \begin{cases} g.\, h :: s.\, y. \\ 4.\, 1 :: s.\, y. \end{cases}$$

Résolution générale.

$$\begin{cases} z \propto \frac{acfh - aceh + aceg}{dfh + ceg}. \\ y \propto \frac{adfh - acfh + aceh}{dfh + ceg}. \end{cases} \begin{cases} x \propto \frac{adfh - adeh + adeg}{dfh + ceg}. \\ v \propto \frac{adeh - adeg + aceg}{dfh + ceg}. \end{cases} \begin{cases} t \propto \frac{adfh - adfg + acfg}{dfh + ceg}. \\ s \propto \frac{aceg + adfg - acfg}{dfh + ceg}. \end{cases}$$

$$\{ z \propto 21.\ y \propto 4.\ x \propto 7.\ v \propto 18.\ t \propto 9.\ s \propto 16.$$

X QUESTION.

26. Pour coupper une grandeur connuë a en trois z, y, x, telles que la somme $z + y$ des deux premiéres & la troisiéme x ayent un même rapport que deux connuës c & d; & la somme $y + x$ de la secon-

de & troisiéme & la premiére z un même que deux connuës e & f.

Par la premiére supposition $z + y + x \propto a$. Ou $x \propto a - z - y$. Et par la seconde $c.\,d :: z + y.\,x \propto \frac{dz + dy}{c} \propto a - z - y$. Et $dz + dy \propto ac - cz - cy$. Ou $cz + dz \propto ac - cy - dy$. Et $z \propto \frac{ac - cy - dy}{c + d}$. Et par la troisiéme supposition $e.\,f :: y + x.\,z$. Et $ez \propto fy + fx$. Ou $ez - fy \propto fx$. Et $\frac{ez - fy}{f} \propto x \propto a - z - y$. Ou $ez - fy \propto af - fz - fy$. Ou $ez + fz \propto af$. Et $z \propto \frac{af}{e + f} \propto \frac{ac - cy - dy}{c + d}$. Et le tout étant multiplié par $e + f$, & le produit ensuitte par $c + d$; on aura l'égalité $acf + adf \propto ace + acf - cey - cfy - dey - dfy$. Ou $cey + dey + cfy + dfy \propto ace - adf$. &c. Et ce doit surpasser df.

{ 1^{ere} *supposition.* $z + y + x \propto a$. { 2^{e}. $z + y.\,x :: c.\,d$. { 3^{e}. $y + x.\,z :: e.\,f$.

Résolution générale.

$$\left\{ z \propto \frac{af}{e + f} \propto \frac{acf + adf}{ce + de + cf + df}.\quad \right\{ y \propto \frac{ace - adf}{ce + de + cf + df}.\quad \left\{ x \propto \frac{ade + adf}{ce + de + cf + df}. \right.$$

Exemple. { $a \propto 12.\ c \propto 3.\ d \propto 1.\ e \propto 5.\ f \propto 1.$ { $z \propto 2.\ y \propto 7.\ x \propto 3.$

XI QUESTION.

27. POur trouver trois grandeurs z, y, x, telles que la différence $z - y$, dont la premiére surpasse la seconde, soit à la troisiéme x, comme une connuë c est à une connuë d; & que la différence $y - x$, dont la seconde surpasse la troisiéme, soit à la premiére z, comme une connuë e est à une connuë f; & de plus que la différence, dont la troisiéme x surpasse une connuë b, soit à la seconde y, comme une connuë g est à une connuë h.

Par la premiére supposition $c.\,d :: z - y.\,x \propto \frac{dz - dy}{c}$. Et par la seconde $e.\,f :: y - x.\,z$. Et $ez \propto fy - fx$. Ou $fx \propto fy - ez$. Et $x \propto \frac{fy - ez}{f} \propto \frac{dz - dy}{c}$. Ou $cfy - cez \propto dfz - dfy$. Ou $cfy + dfy \propto cez + dfz$. Et $z \propto \frac{cfy + dfy}{ce + df}$. Et par la troisiéme supposition $g.\,h :: x - b.\,y$. Et $gy \propto hx - bh$. Ou $gy + bh \propto hx$. Et $x \propto \frac{gy + bh}{h} \propto \frac{dz - dy}{c}$. Et $cgy + bch \propto dhz - dhy$. Ou $bch + cgy + dhy \propto dhz$. Et $z \propto \frac{bch + cgy + dhy}{dh} \propto \frac{cfy + dfy}{ce + df}$. Et multipliant chaque membre par $ce + df$, & les produits égaux de nouveau par dh, on trouve l'égalité $bcceh + bcdfh + ccegy + cdfgy + cdehy$

$+ cdehy + ddfhy \propto cdfhy + ddfhy$. Ou $bceh + bdfh \propto dfhy - cegy - dfgy - dehy$. &c.

$$\left\{ 1^{ere} \textit{ supposition.} \begin{array}{l} c.d :: z - y.x. \\ 1.3 :: z - y.x. \end{array} \right\} \left\{ 2^{e} \begin{array}{l} e.f :: y - x.z. \\ 1.5 :: y - x.z. \end{array} \right\} \left\{ 3^{e} \begin{array}{l} g.h :: x - h.y. \\ 1.4 :: x - 4.y. \end{array} \right.$$

Résolution générale.

$$(z \propto \frac{bdfh + bcfh}{dfh - deh - ceg - dfg} \propto 10. \quad (y \propto \frac{bdfh + bceh}{dfh - deh - ceg - dfg} \propto 8. \quad (x \propto \frac{bdfh - bdeh}{dfh - deh - ceg - dfg} \propto 6.$$

XII QUESTION.

28. POur coupper une grandeur a en trois z, y, x, telles que certaines parties de la premiére z plus certaines de la seconde y soient égales à quelques autres de la seconde y plus certaines de la troisiéme x, & encore égales à d'autres de la troisiéme x plus quelques nouvelles de la premiére z.

Que les fractions c & d dénomment les parties prises d'abord de la premiére & seconde grandeur, & les fractions f & e les autres de la seconde y & celles de la troisiéme x prises en second lieu, & les fractions h & g les nouvelles de la troisiéme x & de la premiére z. On aura donc par la seconde des suppositions $cz + dy \propto ex + fy$. Et $z \propto \frac{ex + fy - dy}{c}$. Et par la troisiéme $cz + dy \propto gz + hx \propto ex + fy$. Ou $gz \propto ex + fy - hx$. Et $z \propto \frac{ex + fy - hx}{g} \propto \frac{ex + fy - dy}{c}$. Ou $cex + cfy - chx \propto egx + fgy - dgy$. Ou $cfy + dgy - fgy \propto egx - cex + chx$. &c. De sorte que si les trois grandeurs ne faisoient point a, la grandeur y seroit arbitraire, & on auroit la résolution infinie que l'on expose ici.

$$\left\{ \begin{array}{l} cz + dy \propto ex + fy \propto gz + hx. \\ \frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y \propto \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y \propto \frac{2}{3}z + \frac{1}{5}x. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textit{Résolution infinie.} \quad x \propto \frac{cfy + dgy - fgy}{eg + ch - ce} \propto 5. \\ \textit{arbitraire} \quad y \propto 4. \quad z \propto \frac{dey - dhy + fhy}{eg + ch - ce} \propto 6. \end{array}$$

Pour la résolution entière.

Mais parce qu'il faut encore remplir la premiére condition $z + y + x \propto a$. Je reprens les valeurs découvertes des grandeurs z & x, & je leur ajoûte l'arbitraire y. Et je forme ensuitte cette égalité $\frac{egy + chy - cey + cfy + dgy - fgy + dey - dhy + fhy}{eg + ch - ce} \propto a$. Ou $egy + chy - cey + cfy + dgy$

$$\begin{array}{l} z + y + x \propto a. \\ z + y + x \propto 15. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} cz + dy \propto ex + fy \propto gz + hx. \\ \frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y \propto \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y \propto \frac{2}{3}z + \frac{1}{5}x. \end{array} \right\} \begin{array}{c} \textit{Résolution générale.} \\ y \propto \frac{aeg + ach - ace}{eg + ch - ce + cf + dg - fg + de - dh + fh} \propto 4. \end{array}$$

$$x \propto \frac{adg + acf - afg}{e + gch - ce + cf + dg - fg + de - dh + fh} \propto 5. \quad z \propto \frac{ade - adh + afh}{eg + ch - ce + cf + dg - fg + de - dh + fh} \propto 6.$$

$-fgy + dey - dhy + fhy \propto aeg + ach - ace$. Et j'en tire la valeur de l'inconnuë y. Et ſubſtituant cette valeur pour y dans les valeurs précédentes des inconnuës z & x, la queſtion eſt réſoluë généralement.

XIII QUESTION.

29. Pour trouver quatre grandeurs z, y, x, v, telles que certaines parties de la premiére z plus certaines de la ſeconde y ſoient égales à quelques autres de la ſeconde y plus certaines de la troiſiéme x, & auſſi à quelques nouvelles de la troiſiéme x plus certaines de la quatriéme v, & encore à quelques autres de la quatriéme v plus quelques-unes de la premiére z. Et de plus que les quatre grandeurs ſoient égales enſemble à une connuë a.

Si les fractions c, d, f, e, g, h, l, m, dénomment par ordre ces diverſes parties. On aura par la premiére ſuppoſition $cz + dy \propto ex + fy$. Et $z \propto \frac{ex + fy - dy}{c}$. Et par la ſeconde $cz + dy \propto gx + hv$. Et $z \propto \frac{gx + hv - dy}{c} \propto \frac{ex + fy - dy}{c}$. Ou $gx + hv \propto ex + fy$. Et $y \propto \frac{gx + hv - ex}{f}$. Et par la troiſiéme ſuppoſition $lv + mz \propto fy + ex$. Et $z \propto \frac{fy + ex - lv}{m} \propto \frac{gx + hv - dy}{c}$. Et $cfy + cex - clv \propto gmx + hmv - dmy$. Ou $cfy + dmy \propto gmx + hmv - cex + clv$. Et $y \propto \frac{gmx + hmv - cex + clv}{cf + dm} \propto \frac{gx + hv - ex}{f}$. Et multipliant par f, & par $cf + dm$; ou par $cff + dfm$, on trouve $fgmx + fhmv - cefx + cflv \propto cfgx + dmgx + cfhv + dmhv - cefx - demx$. Ou $fgmx + demx - dmgx - cfgx \propto dhmv + cfhv - fhmv - cflv$. &c. De ſorte que ſi les quatre grandeurs ne faiſoient point a, la grandeur v ſeroit arbitraire, & on auroit la réſolution infinie que j'expoſe ici.

$$\textit{Suppoſitions.}\begin{cases} cz + dy \propto ex + fy \propto gx + hv \propto lv + mz. \\ \frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y \propto \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y \propto \frac{1}{5}x + \frac{5}{6}v \propto \frac{1}{6}v + \frac{2}{3}z. \end{cases}$$

$$\textit{Réſolution infinie.}\ \{ v \text{ arbitraire. } z \propto \frac{dehv + dglv - delv - fglv}{fgm + dem - dgm - cfg}.$$

$$y \propto \frac{celv + ehmv - cehv - cglv}{fgm + dem - dgm - cfg}.\ x \propto \frac{cfhv + dhmv - fhmv - cflv}{fgm + dem - dgm - cfg}.\ \begin{cases} v. & z. & y. & x. \\ 57. & 75. & 46. & 60. \end{cases}$$

Réſolution entiére.

Mais parce qu'il faut encore remplir la derniére condition $z + y + x + v \propto a$. Si on prend dans la réſolution précédente la valeur de chacune des grandeurs z, y, x, & qu'on la ſubſtituë dans cette derniére égalité; on aura une égalité, dont chaque membre étant multiplié par le dénominateur

$fgm + dem - dgm - cfg$, donnera enfin celle-ci $fgmv + demv - dgmv - cfgv + cfhv + dhmv - fhmv - cflv + celv + ehmv - cehv - cglv + dehv + dglv - delv - fglv \propto afgm + adem - adgm - acfg$. Et tirant de cette égalité par la division une valeur de la grandeur v, & mettant ensuitte cette valeur pour v dans les valeurs précédentes des trois z, y, x; on trouvera enfin la résolution générale qu'on expose ici.

Résolution générale.

$$z \propto \frac{adeh + adgl - adel - afgl}{fgm + dem - dgm - cfg + cfh + dhm - fhm - cfl + cel + ehm - ceh - cgl + deh + dgl - del - fgl}.$$

$$y \propto \frac{acel + aehm - aceh - acgl}{fgm + dem - dgm - cfg + cfh + dhm - fhm - cfl + cel + ehm - ceh - cgl + deh + dgl - del - fgl}.$$

$$x \propto \frac{acfh + adhm - afhm - acfl}{fgm + dem - dgm - cfg + cfh + dhm - fhm - cfl + cel + ehm - ceh - cgl + deh + dgl - del - fgl}.$$

$$v \propto \frac{afgm + adem - adgm - acfg}{fgm + dem - dgm - cfg + cfh + dhm - fhm - cfl + cel + ehm - ceh - cgl + deh + dgl - del - fgl}.$$

Exemple. $\{ a \propto 238.\ z \propto 75.\ y \propto 46.\ x \propto 60.\ v \propto 57.$

XIV QUESTION.

30. POur trouver trois grandeurs z, y, x, telles que la premiére plus certaines parties des deux autres ensemble égale la seconde plus certaines parties des deux autres ensemble, & encore la troisiéme plus certaines parties des deux autres ensemble. Et de plus que les trois ensemble soient égales à une connuë a.

Que la fraction c dénomme les parties de la seconde & troisiéme, & la fraction d les parties de la premiére & troisiéme, & la fraction e celles de la premiére & seconde. Et on aura par la premiére supposition l'égalité $1z + cy + cx \propto 1y + dz + dx$. Ou $1z - dz \propto 1y + dx - cy - cx$. Et $z \propto \frac{1y + dx - cy - cx}{1 - d}$. Et par la seconde supposition on aura l'égalité $1z + cy + cx \propto 1x + ez + ey$. Ou $1z - ez \propto 1x + ey - cy - cx$. Et $z \propto \frac{1x + ey - cy - cx}{1 - e} \propto \frac{1y + dx - cy - cx}{1 - d}$. Et multipliant chaque membre par $1 - e$, & les produits égaux par $1 - d$, on aura l'égalité $1x + ey - cy - cx - dx - dey + cdy + cdx \propto 1y + dx - cy - cx - ey - dex + cey + cex$. Ou $1x - 2dx + cdx - cex + dex \propto 1y - 2ey + cey + dey - cdy$. De sorte que si les trois grandeurs ne faisoient point a, la grandeur x seroit arbitraire, & on auroit la résolution suivante.

Suppositions | *Résolution infinie.*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1z + cy + cx \propto 1y + dz + dx \propto 1x + ez + ey. \\ 1z + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}x \propto 1y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x \propto 1x + \frac{1}{5}z + \frac{1}{5}y. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ arbitraire} \propto 19. \\ x \propto \frac{1x + cex + dex - cdx - 2ex}{1 + ce + de - cd - 2e} \propto 19. \end{array} \right.$$

$$\left\{ z \propto \frac{1x + cdx + cex - dex - 2cx}{1 + ce + de - cd - 2e} \propto 13. \right. \quad \left\{ y \propto \frac{1x + cdx + dex - cex - 2dx}{1 + ce + de - cd - 2e} \propto 17. \right.$$

Résolution entiére.

Mais comme il faut remplir encore la derniére condition $z + y + x \propto a$. Si on prend dans la résolution précédente la valeur de chacune des grandeurs z & y, & qu'on la substituë dans cette derniére égalité; on aura une égalité nouvelle, dont chaque membre étant multiplié par le dénominateur $1 + ce + de - cd - 2e$, donnera encore celle-ci $3x + cex + dex + cdx - 2cx - 2dx - 2ex \propto 1a + ace + ade - acd - 2ae$. Et tirant de cette égalité par la division une valeur de la grandeur x, & mettant ensuitte cette valeur pour x dans les valeurs précédentes des deux z & y, on achevera la résolution.

Résolution générale. $\left\{ z \propto \dfrac{1a + acd + ace - ade - 2ac}{3 + ce + de + cd - 2c - 2d - 2e} \right.$.

$\left\{ y \propto \dfrac{1a + acd + ade - ace - 2ad}{3 + ce + de + cd - 2c - 2d - 2e} \right.$. $x \propto \left\{ \dfrac{1a + ace + ade - acd - 2ae}{3 + ce + de + cd - 2c - 2d - 2e} \right.$.

Exemple. $\left\{ a \propto 2940.\ c \propto \frac{1}{3}.\ d \propto \frac{1}{4}.\ e \propto \frac{1}{5}.\ z \propto 780.\ y \propto 1020.\ x \propto 1140. \right.$

XV QUESTION.

31. POur trouver quatre grandeurs z, y, x, v, telles que la premiére plus certaines parties des trois autres ensemble fasse une même somme que la seconde plus certaines parties des trois autres ensemble, & encore une même que la troisiéme plus certaines parties des trois autres ensemble, & que la quatriéme plus certaines parties des trois autres ensemble. Et de plus que les quatre ensemble soient égales à une connuë a.

Que la fraction c dénomme les parties de la seconde & troisiéme & quatriéme ensemble, & la fraction d celles de la premiére & troisiéme & quatriéme, & l'autre e de la premiére & seconde & quatriéme, & la derniére f
b. 11 & 13. 1. celles des trois premiéres. Et on aura par la premiére supposition l'égalité $1z + cy + cx + cv \propto 1y + dz + dx + dv$. Et[b] $1z \propto \dfrac{1y + dx + dv - cy - cx - cv}{1 - d}$.

Et par la seconde supposition $1z + cy + cx + cv \propto 1x + ey + ev + ez$. Et[b] $1z \propto \dfrac{1x + ey + ev - cy - cx - cv}{1 - e}$. $\propto \dfrac{1y + dx + dv - cy - cx - cv}{1 - d}$.

Et multipliant de part & d'autre par $1 - e$, & les produits égaux par $1 - d$;
c. 12. 1. on aura[c] l'égalité $1x + ey + ev - cy - cx - cv - dx - dey - dev + cdy + cdx + cdv \propto 1y + dx + dv - cy - cx - cv - ey - dex - dev + cey + cex + cev$. Et[b] $y \propto \dfrac{1x + dex - 2dx - cex + cdx - dv + ev + cdv - cev}{1 + ce + de - cd - 2e}$.

Et par la troisiéme supposition on a aussi l'égalité $1z + cy + cx + cv \propto 1v + fz + fy + fx$. Et[b] $1z \propto \dfrac{1v + fy + fx - cy - cx - cv}{1 - f} \propto \dfrac{1y + dx + dv - cy - cx - cv}{1 - d}$.

Et multipliant de part & d'autre par $1 - f$, & les produits égaux par $1 - d$; on aura[c] l'égalité $1v + fy + fx - cy - cx - cv - dv - dfy - dfx$

$+ cdy + cdx + cdv \propto 1y + dx + dv - cy - cx - cv - fy - dfx - dfv + cfy + cfx + cfv$. Et [b] $y \propto \frac{1v + cdv + dfv - cfv - 2dv - dx + cdx - cfx + fx}{1 - 2f + cf + df - cd}$ $\propto \frac{1x + dex - 2dx - cex + cdx - dv + ev + cdv - cev}{1 - 2e + ce + de - cd}$. Et afin d'abbréger, prenant g pour $1 + cd + df - cf - 2d$, & h pour $d - cd + cf - f$, & k pour $1 - 2f + cf + df - cd$, & l pour $1 + de - 2d - ce + cd$, & m pour $d - e - cd + ce$, & n pour $1 - 2e + ce + de - cd$; l'égalité précédente sera $\frac{gv - hx}{k} \propto \frac{lx - mv}{n}$. Et multipliant de part & d'autre par kn, on aura $gnv - hnx \propto klx - kmv$. Ou $gnv + kmv \propto klx + hnx$. Et $\frac{gnv + kmv}{kl + hn} \propto x$. Et la grandeur x étant connuë, l'autre y le sera pareillement, & la premiére z le sera ensuitte. Et la grandeur v seroit arbitraire, si l'on n'étoit pas obligé de remplir la derniére condition $z + y + x + v \propto a$. Et on auroit alors la résolution infinie qu'on expose ici.

Suppositions.

$$\begin{cases} 1z + cy + cx + cv \propto 1y + dz + dx + dv \propto 1x + ez + ey + ev \propto 1v + fz + fy + fx. \\ 1z + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}v \propto 1y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}v \propto 1x + \frac{1}{5}z + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}v \propto 1v + \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}x. \end{cases}$$

Résolution infinie.

$(1 + cd + df - cf - 2d \propto g.$ $(h \propto d - cd + cf - f.$ $(k \propto 1 - 2f + cf + df - cd.$
$(1 + de + cd - ce - 2d \propto l.$ $(m \propto d - cd + ce - e.$ $(n \propto 1 - 2e + ce + de - cd.$

$\{ v$ *arbitraire.* $x \propto \frac{gnv + kmv}{kl + hn}.$ $y \propto \frac{gv - hx}{k}.$ $z \propto \frac{1y + dx + dv - cy - cx - cv}{1 - d}.$

Exemple. $\{ c \propto \frac{1}{3}.$ $d \propto \frac{1}{4}.$ $e \propto \frac{1}{5}.$ $f \propto \frac{1}{6}.$ $(v \propto 101.$ $z \propto 47.$ $y \propto 77.$ $x \propto 92.$

Résolution entiére.

Mais parceque la somme des quatre grandeurs est a. Aprés avoir pris dans la résolution précédente une lettre p pour $\frac{gn + km}{kl + hn}$, on aura $pv \propto x$. Et $y \propto \frac{gv - hpv}{k}$. Et supposant encore, afin d'abbréger, une lettre q pour $\frac{g - hp}{k}$, & une autre r pour $\frac{1}{1 - d}$; on aura $y \propto qv$, & $z \propto 1qrv + dprv + drv - cqrv - cprv - crv$. Et on formera l'égalité $z + y + x + v \propto a \propto 1qrv + dprv + drv - cqrv - cprv - crv + qv + pv + 1v$. &c.

Résolution generale.

$\{ v \propto \frac{a}{qr + dpr + dr - cqr - cpr - cr + q + p + 1}.$ $x \propto pv.$ $y \propto qv.$ $z \propto a - 1v - pv - qv.$

Exemple. $\{ a \propto 317.$ $c \propto \frac{1}{3}.$ $d \propto \frac{1}{4}.$ $e \propto \frac{1}{5}.$ $f \propto \frac{1}{6}.$ $(v \propto 101.$ $z \propto 47.$ $y \propto 77.$ $x \propto 92.$

III PRINCIPE.

32. Si la question est trop difficile à résoudre d'une maniére générale, ou qu'on ne veüille en avoir qu'une résolution particuliére, lorsqu'il y a des fractions. On cherchera le plus petit nombre que leurs dénominateurs peuvent diviser sans reste, & on s'en servira pour dénommer les diverses inconnuës selon que les conditions le peuvent éxiger ou permettre.

Exemple.

Comme pour résoudre la question précédente. Ou pour trouver quatre grandeurs telles que la premiére plus un tiers des trois autres ensemble fasse une même somme que la seconde plus un quart des trois autres ensemble, & aussi une même que la troisiéme plus la cinquiéme partie des trois autres ensemble, & encore une même que la quatriéme plus une sixiéme partie des trois autres ensemble. Et de plus que la somme entiére des quatre grandeurs soit a ou 317.

Pour abbréger le calcul, & pour éviter les fractions. Je prens le plus petit nombre 60 que les dénominateurs 3, 4, 5, 6, puissent chacun diviser sans reste. Et nommant $60z$ la premiére grandeur, & $60y$ la seconde, & $60x$ la troisiéme, & $60v$ la quatriéme. La premiére des suppositions fournit l'égalité $60z + 20y + 20x + 20v \propto 60y + 15z + 15x + 15v$, laquelle
b. 11 & 13. 1. étant divisée par 5, & ordonnée ensuitte, donne [b] l'égalité $v \propto 8y - 1x - 9z$. Et par la seconde supposition, $60y + 15z + 15x + 15v \propto 60x + 12z + 12y + 12v$. Et divisant par 3 de part & d'autre, & ordonnant ensuitte l'égalité, on [b] trouve $v \propto 15x - 16y - 1z \propto 8y - 9z - 1x$.
c. 11. 1. Et [c] $16x \propto 24y - 8z$. Et divisant par 8, on [d] trouve $2x \propto 3y - 1z$.
d. 13. 1. Et par la troisiéme supposition, $60z + 20y + 20x + 20v \propto 60v + 10z$
b. 12. 1. $+ 10y + 10x$. Et divisant par 10, & ordonnant l'égalité, on [b] trouve $4v \propto 5z + 1y + 1x \propto 4$ fois $8y - 1x - 9z$; c'est à dire $5z + 1y + 1x \propto 32y - 4x - 36z$. Ou [c] $5x \propto 31y - 41z$. Et doublant l'égalité, on [b] aura $10x \propto 62y - 82z \propto 5$ fois $2x \propto 5$ fois $3y - 1z \propto 15y - 5z$. Et $47y \propto 77z$. Et les quatre grandeurs seront $60z$, & $60y \propto \frac{4620z}{47}$, & $60x \propto 90y - 30z \propto \frac{5520z}{47}$, & $60v \propto 480y - 60x - 540z \propto \frac{6060z}{47}$. Et la somme entiére $z + y + x + v \propto a \propto \frac{19020z}{47} \propto 317$. Et divisant de part & d'autre par 317, & multipliant les exposans égaux $\frac{60z}{47}$ & 1 par 47, on aura $60z \propto 47$. Et ensuitte $60y \propto 77$. Et $60x \propto 92$. Et $60v \propto 101$.

Résolution particuliére.

(*Somme* 317. (1[ere] $60z \propto 47$. (2[e]. $60y \propto 77$. (3[e]. $60x \propto 92$. (4[e]. $60v \propto 101$.

XVI QUESTION.

33. Pour coupper une grandeur a en trois z, y, x, telles que certaines parties de la premiére z plus la seconde y soient égales à certaines

parties de la ſeconde y plus la troiſiéme x, & encore à certaines de la troiſiéme x plus la premiére z.

Si la fraction c dénomme les parties de la premiére z, & la fraction f les parties de la ſeconde y, & la fraction h les parties de la troiſiéme x. On aura par la premiére ſuppoſition $z + y + x \propto a$. Et par les autres on aura $cz + 1y \propto fy + 1x \propto hx + z$. Et la réſolution ſera entiérement la même que celle de la queſtion 12^{e}, en y mettant 1 pour chacune des lettres d, e, g.

$$\begin{cases} z + y + x \propto a. \\ z + y + x \propto 15. \end{cases} \begin{cases} cz + 1y \propto fy + 1x \propto hx + 1z. \\ \frac{1}{2}z + 1y \propto \frac{1}{2}y + 1x \propto \frac{1}{5}x + 1z. \end{cases}$$

Réſolution générale.

$$\begin{cases} y \propto \dfrac{a + ach - ac}{3 + cf + ch + fh - c - f - h} \propto 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \propto \propto \dfrac{a + acf - af}{3 + cf + ch + fh - c - f - h} \propto 5. \end{cases} \begin{cases} z \propto \dfrac{a + afh - ah}{3 + cf + ch + fh - c - f - h} \propto 6. \end{cases}$$

XVII QUESTION.

34. Pour trouver quatre grandeurs z, y, x, v, telles que certaines parties de la premiére z plus la ſeconde y ſoient égales à quelques-unes de la ſeconde y plus la troiſiéme x, & auſſi à certaines de la troiſiéme x plus la quatriéme v, & enfin à certaines de la quatriéme v plus la premiére z. Et de plus que les quatre grandeurs ſoient égales enſemble à une connuë a.

Si la fraction c dénomme les parties de la premiére z, & la fraction f les parties de la ſeconde y, & la fraction g les parties de la troiſiéme x, & la fraction l les parties de la quatriéme v; les ſuppoſitions exprimées ſeront celles-ci $cz + y \propto fy + x \propto gx + v \propto lv + z$, & $z + y + v \propto a$. Et la réſolution ſera entiérement la même que celle de la queſtion treiziéme, en y mettant 1 pour chacune des lettres d, e, h, m.

Suppoſitions. $$\begin{cases} cz + y \propto fy + x \propto gx + v \propto lv + z. \\ \frac{1}{3}z + 1y \propto \frac{1}{4}y + 1x \propto \frac{1}{5}x + 1v \propto \frac{1}{6}v + 1z. \end{cases} \begin{cases} z + y + x + v \propto a. \\ z + y + x + v \propto 1160. \end{cases}$$

Réſolution générale.

$$\begin{cases} z \propto \dfrac{a + agl - afgl - al}{4 + cf + cl + fg + gl - cfg - cfl - cgl - fgl - c - f - g - l} \propto 309. \\ y \propto \dfrac{a + acl - acgl - ac}{4 + cf + cl + fg + gl - cfg - cfl - cgl - fgl - c - f - g - l} \propto 256. \\ x \propto \dfrac{a + acf - acfl - af}{4 + cf + cl + fg + gl - cfg - cfl - cgl - fgl - c - f - g - l} \propto 295. \\ v \propto \dfrac{a + afg - acfg - ag}{4 + cf + cl + fg + gl - cfg - cfl - cgl - fgl - c - f - g - l} \propto 300. \end{cases}$$

XVIII QUESTION.

35. Pour trouver trois grandeurs z, y, x, telles que la premiére z ſurpaſſe la ſeconde y de certaines parties de la troiſiéme x, & que

la ſeconde y ſurpaſſe la troiſiéme x de certaines parties de la premiére z, & que la troiſiéme x ſurpaſſe une grandeur connuë a de certaines parties de la ſeconde y.

Que la fraction c dénomme les parties de la troiſiéme x, & la fraction d les parties de la premiére z, & la fraction e les parties de la ſeconde y. Donc par la premiére ſuppoſition $z \propto y + cx$. Et par la ſeconde $y \propto x + dz$. Ou $y - x \propto dz$. Et $\frac{y - x}{d} \propto z \propto y + cx$. Ou $y - x \propto dy + cdx$. Et $y - dy \propto 1x + cdx$. Et $x \propto \frac{1y - dy}{1 + cd}$. Et par la troiſiéme ſuppoſition $x \propto b + ey \propto \frac{1y - dy}{1 + cd}$. Et multipliant par $1 + cd$, on aura $1b + bcd + ey + cdey \propto 1y - dy$. Ou $1b + bcd \propto 1y - dy - ey - cdey$. &c. Et l'unité doit ſurpaſſer néceſſairement toutes les fractions enſemble d, e, cde.

$$1^{ere}\ \textit{ſuppoſition.}\left\{\begin{array}{l} 1z \propto 1y + cx. \\ 1z \propto 1y + \frac{1}{3}x. \end{array}\right. \quad 2^{e}.\left\{\begin{array}{l} 1y \propto 1x + dz. \\ 1y \propto 1x + \frac{1}{5}z. \end{array}\right. \quad 3^{e}.\left\{\begin{array}{l} 1x \propto b + ey. \\ 1x \propto 10 + \frac{1}{3}y. \end{array}\right.$$

Réſolution générale.

$$z \propto \frac{b + bc}{1 - d - e - cde} \propto 45 \cdot y \propto \frac{b + bcd}{1 - d - e - cde} \propto 37\tfrac{1}{2} \cdot x \propto \frac{b - bd}{1 - d - e - cde} \propto 22\tfrac{1}{2}.$$

XIX QUESTION.

36\. POur trouver trois grandeurs z, y, x, telles que la ſeconde y plus certaines parties de la premiére z plus une connuë b faſſe une même ſomme que la troiſiéme x plus certaines parties de la ſeconde y plus une connuë c, & encore une même que la premiére z plus certaines parties de la troiſiéme x plus une connuë d. Et de plus que les trois ſoient égales enſemble à une connuë a.

Si la fraction e dénomme les parties priſes de la premiére z, & la fraction f les parties priſes de la ſeconde y, & la fraction g les parties priſes de la troiſiéme x. On aura par la premiére ſuppoſition l'égalité $1y + ez + b \propto 1x + fy + c$. Ou $1y - fy \propto 1x - b + c - ez$. Et $y \propto \frac{1x - b + c - ez}{1 - f}$. Et par la ſeconde ſuppoſition $1y + ez + b \propto z + gx + d$. Et $y \propto z + gx - b + d - ez \propto \frac{1x - b + c - ez}{1 - f}$. Et multipliant chaque membre par $1 - f$, on aura l'égalité $1z + gx - 1b + 1d - ez - fz - fgx + bf - df + efz \propto 1x - b + c - ez$. Ou $1z - fz + efz - c + d + bf - df \propto 1x - gx + fgx$. &c. De ſorte que ſi les trois grandeurs ne fai-

$$\textit{Suppoſitions}\left\{\begin{array}{l} 1y + ez + b \propto 1x + fy + c \propto 1z + gx + d. \\ 1y + \frac{1}{2}z + 5 \propto 1x + \frac{1}{3}y + 15 \propto 1z + \frac{1}{4}x + 10. \end{array}\right\}\begin{array}{l} \textit{Réſolution infinie.} \\ \textit{arbitraire } z \propto 16. \end{array}$$

$$\Big\{ y \propto \frac{1z - ez + egz - b + d + bg - cg}{1 - g + fg} \propto 15. \quad \Big\{ x \propto \frac{1z - fz + efz - c + d + bf - df}{1 - g + fg} \propto 8.$$

ſoient

ſoient point a, la grandeur z ſeroit arbitraire. Et la réſolution infinie de la queſtion ſeroit celle-ci.

Réſolution entiére.

Mais parce qu'il faut encore remplir la troiſiéme condition $z + y + x \propto a$. Si on met pour y & pour x leurs valeurs précédentes, & que l'égalité ſoit multipliée par le dénominateur $1 - g + fg$; on aura enfin cette égalité $3z - ez - fz - gz + efz + egz + fgz - b - c + 2d + bg - cg + bf - df \propto 1a - ag + afg$. &c.

$$\textit{Suppoſitions}\begin{cases} 1y + ez + b \propto 1x + fy + c \propto 1z + gx + d. \\ 1y + \frac{1}{2}z + 5 \propto 1x + \frac{1}{3}y + 15 \propto 1z + \frac{1}{4}x + 10. \end{cases}\begin{cases} z + y + x \propto a. \\ z + y + x \propto 39. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \textit{Réſolution} \\ \textit{générale.} \end{array}\begin{cases} z \propto \dfrac{1a - ag + afg + b + c - 2d - bg + cg - bf + df}{3 - e - f - g + ef + eg + fg} \propto 16. \\ y \propto \dfrac{1a - ae + aeg - 2b + c + d + bg - cg - ce + de}{3 - e - f - g + ef + eg + fg} \propto 15. \\ x \propto \dfrac{1a - af + aef + b - 2c + d + bf - df + ce - de}{3 - e - f - g + ef + eg + fg} \propto 8. \end{cases}$$

RESOLUTION ABBREGE'E ET PARTICULIERE.

37. ET pour trouver ſeulement en particulier trois nombres z, y, x, tels que le ſecond y plus la moitié du premier z plus b faſſe une même ſomme que le troiſiéme x plus le tiers du ſecond y plus c, & encore une même que le premier z plus le quart du troiſiéme x plus d. Et de plus que la ſomme des trois faſſe un nombre a connu.

Ayant nommé, pour abbréger & pour éviter les fractions, le premier $2v$, & le ſecond $3t$, & le troiſiéme $4s$. On aura par la premiére ſuppoſition $3t + 1v + b \propto 4s + 1t + c$. Et $1v \propto 4s - 2t - b + c$. Et par la ſeconde $3t + 1v + b \propto 2v + 1s + d$. Et $1v \propto 3t - 1s + b - d \propto 4s - 2t - b + c$. Et $5t \propto 5s - 2b + c + d$. Où remettant pour b ſa valeur 5, & pour c ſa valeur 15, & pour d ſa valeur 10; l'égalité ſera $5t \propto 5s + 15$. Et diviſant par 5, elle ſera $t \propto s + 3$. Et les trois grandeurs ſeront la premiére $z \propto 2v \propto 4s + 8$. Et la ſeconde $y \propto 3t \propto 3s + 9$. Et la troiſiéme $x \propto 4s$. Et par la derniére ſuppoſition, leur ſomme $z + y + x$ eſt $11s + 17 \propto a \propto 39$. Ou $11s \propto 22$. Et $1s \propto 2$. De ſorte que les nombres ſont le premier $4s + 8 \propto 16$, & le ſecond $3s + 9 \propto 15$, & le troiſiéme $4s \propto 8$. Et tout eſt réſolu. Diophante ne réſoût preſque jamais ſes queſtions qu'en particulier. Ce qui ne fournit point de régles générales.

Suppoſitions.

$$\left\{ y + \frac{1}{2}z + b \propto 1x + \frac{1}{3}y + c \propto 1z + \frac{1}{4}x + d. \right. \quad \left\{ z + y + x \propto a. \right. \quad \left\{ z \propto 2v.\ y \propto 3t.\ x \propto 4s. \right.$$

$$\left\{ 3t + 1v + b \propto 4s + 1t + c \propto 2v + 1s + d. \right. \quad \left\{ a \propto 39.\ b \propto 5.\ c \propto 15.\ d \propto 10. \right.$$

Réſolution entiére $\left\{ z \propto 2v \propto 4s + 8 \propto 16.\ y \propto 3s + 9 \propto 15.\ x \propto 4s \propto 8. \right.$

XX QUESTION.

38. POur trouver deux grandeurs telles que la premiére recevant certaines parties de la ſeconde, la ſomme & le reſte de la ſeconde ayent un même rapport que deux connuës a & b; & que la ſeconde recevant auſſi certaines parties ſemblables de la premiére, la ſomme & le reſte de la premiére ayent un même rapport que deux connuës c & d. Et de plus que la ſomme des deux ſoit une connuë g.

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y, & r la fraction inconnuë qui dénomme les parties ſemblables priſes de chacune; les parties priſes de la premiére ſeront rz, & leurs ſemblables priſes de la ſeconde ſeront ry. Et on aura par la premiére ſuppoſition la proportion $z+ry . 1y-ry :: a . b$. Et multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens; l'égalité ſera $bz+bry \propto ay-ary$. Ou $bz \propto ay-ary-bry$. Et $z \propto \frac{ay-ary-bry}{b}$. Et par la ſeconde ſuppoſition on a auſſi la proportion $y+rz . z-rz :: c . d$. qui donne l'égalité $dy+drz \propto cz-crz$. Ou $dy \propto cz-drz-crz$. Et diviſant par $c-dr-cr$, on aura $z \propto \frac{dy}{c-dr-cr} \propto \frac{ay-ary-bry}{b}$. Et diviſant par y, & multipliant par b, & multipliant auſſi les produits égaux par $c-dr-cr$; on aura l'egalité $acrr+adrr+bcrr+bdrr-2acr-adr-bcr+ac-bd \propto 0$, laquelle étant diviſée par $ac+ad+bc+bd$, on trouvera $rr\frac{-2acr-adr-bcr+ac-bd}{ac+ad+bc+bd} \propto 0$. D'où l'on tire-

b. 16 & 17.1. ra [b] une valeur de la grandeur $r \propto \frac{ac+ad+bc+bd}{ac+ad+bc+bd} \propto 1$. Et parceque cette valeur n'eſt point propre à la réſolution, on tirera l'autre valeur de la même inconnuë r, qui [b] eſt $\frac{ac-bd}{ac+ad+bc+bd}$. Et la grandeur y ſeroit arbitraire, ſi l'on n'étoit pas obligé de remplir la condition qui reſte $z+y \propto g$. Et on auroit la réſolution ſuivante.

1ere *ſuppoſition.*	2e *ſuppoſition.*	*Réſolution infinie.*
$z+ry . y-ry :: a . b.$	$y+rz . z-rz :: c . d.$	y *arbitraire.* $z \propto \frac{ady+bdy}{bc+bd}$.
$z+ry . y-ry :: 3 . 1.$	$y+rz . z-rz :: 5 . 1.$	$r \propto \frac{ac-bd}{ac+ad+bc+bd}$.

Exemple $\{ a \propto 3 .\ b \propto 1 .\ c \propto 5 .\ d \propto 1 .\ r \propto \frac{7}{12} .\ y \propto 12 .\ z \propto 8.$

Réſolution entiére.

Et pour remplir la troiſiéme condition $z+y \propto g$. On prendra la valeur précédente de z, & on formera l'égalité, $\frac{ady+bdy}{bc+bd}+y \propto g$, la-

Suppoſitions.			
	$z+ry . y-ry :: a . b.$	$y+rz . z-rz :: c . d.$	$z+y \propto g.$
	$z+ry . y-ry :: 3 . 1.$	$y+rz . z-rz :: 5, 1.$	$z+y \propto 60.$

Réſolution générale.

$\{ z \propto \frac{adg+bdg}{bc+ad+2bd} \propto 24.\ \{ y \propto \frac{bcg+bdg}{bc+ad+2bd} \propto 36.\ \{ r \propto \frac{ab-bd}{ac+ad+bc+bd} \propto \frac{7}{12}.$

quelle étant multipliée par $bc + cd$, donnera celle-ci $ady + bdy + bcy + bdy \propto bcg + bdg$. &c.

XXI QUESTION.

PREMIER CAS.

39. *Connoissant la somme & le plan de deux grandeurs ; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme connuë des deux grandeurs, & $2y$ leur différence inconnuë, & b leur plan connu ; la grande [b] est $a + y$, la moindre $a - y$, & leur plan est $aa - yy \propto b$. D'où l'on tire par transposition $yy \propto aa - b$. Et tirant la racine quarrée de part & d'autre, on trouve enfin $y \propto \sqrt{aa - b}$. b. 3.

Résolution générale. grande $a + y \propto a + \sqrt{aa - b}$. $3 + y \propto 3 + \sqrt{9 - 8} \propto 4$. petite $a - y \propto a - \sqrt{aa - b}$. $3 - y \propto 3 - \sqrt{9 - 8} \propto 2$.

SECOND CAS.

40. *Et si on connoît la différence des grandeurs & leur plan, pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ leur somme inconnuë, & $2d$ leur différence connuë, & leur plan connu b ; la grande [b] est $z + d$, la moindre $z - d$, & le plan est $zz - dd \propto b$. Et par transposition, $zz \propto b + dd$. Et $z \propto \sqrt{b + dd}$. &c. b. 3.

Résolution générale. grande $z + d \propto d + \sqrt{b + dd}$. $z + 1 \propto 1 + \sqrt{8 + 1} \propto 4$. petite $z - d \propto - d + \sqrt{b + dd}$. $z - 1 \propto - 1 + \sqrt{8 + 1} \propto 2$.

XXII QUESTION.

PREMIER CAS.

41. *Pour trouver deux grandeurs, dont on connoît la somme, & le rapport de la même somme au plan.*

Ayant nommé $2a$ la somme des grandeurs qui est déterminée, & leur différence inconnuë $2y$; la grande est $a + y$, la moindre $a - y$, & leur plan est $aa - yy$. C'est pourquoi si la somme $2a$ & le plan $aa - yy$ ont un même rapport que deux grandeurs connuës c & d, ou si la proportion est $2a.\ aa - yy :: c.\ d.$ multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens, on formera cette [b] égalité $2ad \propto aac - cyy$. Ou $cyy \propto aac$ b. 47. 7. de la premiére partie.

Suppositions.

$2a.\ aa - yy :: c.\ d.$

$16.\ 64 - yy :: 1.\ 3.$

Résolution générale.

grande $a + y \propto a + \sqrt{\frac{aac - 2ad}{c}} \propto 12$.

petite $a - y \propto a - \sqrt{\frac{aac - 2ad}{c}} \propto 4$.

$-2ad$. Et divisant par c, on aura $yy \propto \frac{aac - 2ad}{c}$. Et tirant les racines quarrées, on trouvera enfin une valeur $y \propto \sqrt{\frac{aac - 2ad}{c}}$. &c.

SECOND CAS.

42. ET si $2a$ est la différence, & qu'il y ait un même rapport entre la différence $2a$ & le plan des deux grandeurs qu'entre deux connuës c & d.

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, la grande est $z + a$, la moindre $z - a$, & leur plan $zz - aa$. Et la proportion est $2a.\ zz - aa :: c.\ d.$ Et multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens; on formera [b] l'égalité $2ad \propto zzc - aac$. Ou $2ad + aac \propto zzc$. Et $\frac{2ad}{c} + aa \propto zz$, ou $\sqrt{\frac{2ad + aac}{c}} \propto z$. &c.

b. 44. 7. de la premiére partie.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} 2a.\ aa - yy :: c.\ d. \\ 16.\ 64 - yy :: 1.\ 3. \end{cases} \begin{cases} \textit{grande}\ z + a \propto a + \sqrt{\frac{aac + 2ad}{c}} \propto 12. \\ \textit{petite}\ z - 4 \propto -4 + \sqrt{\frac{aac + 2ad}{6}} \propto 4. \end{cases}$$

TROISIEME CAS.

43. ET si la somme inconnuë $2z$ des grandeurs & leur plan connu p ont un même rapport que les deux connuës c & d.

Ayant nommé leur différence $2y$; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$. Et leur plan $zz - yy \propto p$, ou $zz \propto p + yy$. Et la proportion est $2z.p :: c.d.$ Ou [b] $d.\ c :: p.\ \frac{cp}{d} \propto 2z$. Et $z \propto \frac{cp}{2d}$. Et $zz \propto \frac{ccpp}{4dd} \propto p + yy$, ou $ccpp \propto 4pdd + 4ddyy$. Et $yy \propto \frac{ccpp}{4dd} - p$. &c.

b. 46. 7. de la premiére partie.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} zz - yy \propto p. \\ zz - yy \propto 48. \end{cases} \begin{cases} c.\ d :: 2z.\ p. \\ 1.\ 3 :: 2z.\ 48. \end{cases} \begin{cases} \textit{grande}\ z + y \propto \frac{cp + \sqrt{ccpp - 4ddp}}{2d} \propto 12. \\ \textit{petite}\ z - y \propto \frac{cp - \sqrt{ccpp - 4ddp}}{2d} \propto 4. \end{cases}$$

QUATRIEME CAS.

44. ET si la différence inconnuë $2y$ & le plan connu p ont un même rapport que les deux connuës c & d.

Ayant nommé la somme $2z$; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$. Et

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} zz - yy \propto p. \\ zz - yy \propto 48. \end{cases} \begin{cases} c.\ d :: 2y.\ p. \\ 1.\ 6 :: 2y.\ 48. \end{cases} \begin{cases} \textit{grande}\ z + y \propto \frac{cp + \sqrt{ccpp + 4ddp}}{2d} \propto 12. \\ \textit{petite}\ z - y \propto \frac{-cp + \sqrt{ccpp + 4ddp}}{2d} \propto 4. \end{cases}$$

leur plan $zz - yy \propto p$, ou $zz - p \propto yy$. Et la proportion est $2y.\ p :: c.\ d.$ Ou[b] $d.\ c :: p.\ \frac{cp}{d} \propto 2y$. Et $y \propto \frac{cp}{2d}$. Et $yy \propto \frac{ccpp}{4dd} \propto zz - p$. b. 46. 7. de la premiére partie.
Et $zz \propto \frac{ccpp}{4dd} + p$. &c.

XXIII QUESTION.

45. *Pour multiplier deux grandeurs connuës par une même grandeur, en sorte que le premier produit soit un quarré, qui ait pour côté le second produit.*

Ayant nommé a & b les deux grandeurs connuës, & z l'inconnuë qui les doit multiplier, & y le côté inconnu du quarré égal au premier produit; la premiére supposition fournit l'égalité $yy \propto az$, & la seconde fournit cette autre égalité $y \propto bz$. Et quarrant chaque membre, on aura l'égalité $yy \propto bbzz \propto az$. Et $z \propto \frac{a}{bb}$.

$$\textit{Suppositions}\left\{\begin{array}{l} yy \propto az. \\ yy \propto 8z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \propto bz \propto \sqrt{az}. \\ y \propto 2z \propto 2\sqrt{2z}. \end{array}\right. \qquad \textit{Résolution générale.}\left\{\begin{array}{l} z \propto \frac{a}{bb}. \\ z \propto 2. \end{array}\right.$$

XXIV QUESTION.

PREMIER CAS.

46. *Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs quarrez, pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ leur somme, & $2y$ leur différence, & $2b$ la somme des quarrez; la grande[b] est $a + y$, la moindre $a - y$, & la somme des quarrez $aa + 2ay + yy$ & $aa - 2ay + yy$ est $2aa + 2yy \propto 2b$. D'où l'on tire l'égalité $yy \propto b - aa$. Et ensuitte $y \propto \sqrt{b - aa}$. b. 3.

$$\textit{Résolution générale.}\left\{ \textit{grande} \begin{array}{l} a + y \propto a + \sqrt{b - aa}. \\ 6 + y \propto 6 + \sqrt{52 - 36} \propto 10. \end{array} \right. \quad \textit{petite} \begin{array}{l} a - y \propto a - \sqrt{b - aa} \\ 6 - y \propto 6 - \sqrt{52 - 36} \propto 2. \end{array}$$

SECOND CAS.

47. Et si on connoît la différence $2a$ des deux grandeurs, & la somme $2b$ de leurs quarrez.

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs; la grande[b] est $z + a$, la moindre $z - a$. Et la somme des quarrez $zz + 2az + aa$ & $zz - 2az + aa$ est $2zz + 2aa \propto 2b$. Et $zz \propto b - aa$. &c. b. 3.

$$\textit{Résolution générale.}\left\{ \textit{grande} \begin{array}{l} z + a \propto a + \sqrt{b - aa}. \\ z + 4 \propto 4 + \sqrt{52 - 16} \propto 10. \end{array} \right. \quad \left\{ \textit{petite} \begin{array}{l} z - a \propto - a + \sqrt{b - aa}. \\ z - 4 \propto - 4 + \sqrt{52 - 16} \propto 2. \end{array} \right.$$

TROISIEME CAS.

48. Et si on connoît la somme $2a$ des deux grandeurs, & la différence $2b$ des quarrez.

b. 3. Ayant nommé $2y$ la différence des grandeurs ; la grande [b] est $a + y$, la moindre $a - y$, & la différence des quarrez $aa + 2ay + yy$ & $aa - 2ay + yy$ est $4ay \propto 2b$. Et divisant par $4a$ chaque membre, on aura une valeur $y \propto \frac{b}{2a}$. &c.

$$\textit{Résolution générale.}\left\{\textit{grande}\ \begin{array}{l} a + y \propto a + \frac{b}{2a} \\ 6 + y \propto 6 + \frac{48}{12} \propto 10. \end{array}\quad \textit{petite}\ \begin{array}{l} a - y \propto a - \frac{b}{2a} \\ 6 - y \propto 6 - \frac{48}{12} \propto 2. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

49. ET si on connoît la différence $2a$ des deux grandeurs, & la différence $2b$ des quarrez.

b. 3. Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, la grande [b] est $z + a$, la moindre $z - a$, & la différence des quarrez $zz + 2az + aa$ & $zz - 2az + aa$ est $4az \propto 2b$. D'où l'on tire une valeur $z \propto \frac{b}{2a}$. &c.

$$\textit{Résolution générale.}\left\{\textit{grande}\ \begin{array}{l} z + a \propto \frac{b}{2a} + a. \\ z + 4 \propto \frac{48}{8} + 4 \propto 10. \end{array}\quad \textit{petite}\ \begin{array}{l} z - a \propto \frac{b}{2a} - a. \\ z - 4 \propto \frac{48}{8} - 4 \propto 2. \end{array}\right.$$

XXV QUESTION.

PREMIER CAS.

50. P*Our trouver deux grandeurs qui ayent entr'elles un même rapport que deux grandeurs connuës, & telles que leur somme & la somme des quarrez ayent encore un même rapport que deux grandeurs connuës.*

Si les deux grandeurs ont un même rapport que deux connuës c & d,
a. *supposition. & 1. 8. de la premiére partie.* & que la premiére inconnuë soit nommée cz ; puisque la proportion [a] doit être $c. d :: cz. dz.$ la seconde connuë est dz. Et si la somme $cz + dz$ des deux inconnuës est à la somme $cczz + ddzz$ de leurs quarrez, comme une connuë e est à une connuë f ; multipliant d'une part les extrêmes, &
b. 44. 7. *de la premiére partie.* de l'autre les moyens, on formera [b] l'égalité $cfz + dfz \propto ccezz + ddezz$, laquelle étant divisée par $ccez + ddez$, donnera une valeur $z \propto \frac{cf + df}{cce + dde}$. &c.

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 1.2 :: 1z.\ 2z. \end{array}\right\}\ \overset{\textit{Suppositions.}}{\left\{\begin{array}{l} cz + dz.\ cczz + ddzz :: e.\ f. \\ 1z + 2z.\ 1zz + 4zz :: 1.5. \end{array}\right\}}\ \overset{\textit{Résolution générale.}}{\left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf + cdf}{cce + dde} \propto 3. \\ 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf + ddf}{cce + dde} \propto 6. \end{array}\right.}$$

SECOND CAS.

51. ET si les deux grandeurs ont un même rapport que les connuës c & d, & que leur différence $cz - dz$ & la somme $cczz + ddzz$

de leurs quarrez ayent un même rapport que deux connuës e & f; multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens, on [b] aura l'égalité $cfz - dfz \propto ccezz + ddezz$. Et on tirera une valeur $z \propto \frac{cf - df}{cce + dde}$. &c. On suppose ici que c surpasse d. b. 44. 7. de la premiére partie.

Suppositions. *Résolution generale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 2.\ 1 :: 2z.\ 1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz - dz.\ cczz + ddzz :: e.\ f. \\ 2z - 1z.\ 4zz + 1zz :: 1.15. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf - cdf}{cce + dde} \propto 6. \\ 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf - ddf}{cce + dde} \propto 3. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

52. ET si les deux grandeurs ont un même rapport que les connuës c & d, & que leur différence $cz - dz$ & la différence $cczz - ddzz$ des deux quarrez ayent encore un même rapport que deux connuës e & f; la proportion fournira cette [b] égalité $cfz - dfz \propto ccezz - ddezz$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{cf - df}{cce - dde}$. Et les deux termes de la fraction étant divisez par $c - d$, la même valeur réduitte à son [c] exposant sera $\frac{f}{ce + de}$. &c. b. 44. 7. de la premiére partie. c. 16. 9. de la premiére partie.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 2.\ 1 :: 2z.1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz - dz.\ cczz - ddzz :: e.\ f. \\ 2z - 1z.\ 4zz - 1zz :: 1.\ 9. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf - cdf}{cce - dde} \propto \frac{cf}{ce + de} \propto 6. \\ 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf - ddf}{cce - dde} \propto \frac{df}{ce + de} \propto 3. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

53. ET si les grandeurs ont un même rapport que les connuës c & d, & que leur somme $cz + dz$ & la différence $cczz - ddzz$ des quarrez en ayent un même que les connuës e & f; on formera [b] l'égalité $cfz + dfz \propto ccezz - ddezz$, & on en tirera une valeur $z \propto \frac{cf + df}{cce - dde}$, & les deux termes de la fraction étant divisez par $c + d$, cette valeur réduitte à son exposant [b] sera $z \propto \frac{f}{ce - de}$. &c. b. 44. 7. de la premiére partie. b. 16. 9. de la premiére partie.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 2.1 :: 2z.1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz + dz.\ cczz - ddzz :: e.\ f. \\ 2z + 1z.\ 4zz - 1zz :: 2.\ 6. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf + cdf}{cce - dde} \propto \frac{cf}{ce - de} \propto 6. \\ 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf + ddf}{cce - dde} \propto \frac{df}{ce - de} \propto 3. \end{array}\right.$$

CINQUIEME CAS.

54. ET si les grandeurs ont un même rapport que les connuës c & d, & que l'une comme cz & le quarré $ddzz$ de l'autre dz en ayent

b. 44. 7. *de la premiére partie.*

encore un même que les connuës *e* & *f*; la proportion fournira [b] cette égalité $cfz \propto ddezz$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{cf}{dde}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 3.\ 1 :: 3z.\ 1z. \\ 4.\ 7 :: 4z.\ 7z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} e.\ \ f :: cz.\ ddzz. \\ 1.\ \ 2 :: 3z.\ 1zz. \\ 3.\ 147 :: 4z.\ 49zz. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf}{dde}. & 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf}{dde}. \\ 1^{ere}\ 3z \propto 18. & 2^{e}\ 1z \propto 6. \\ 1^{ere}\ 4z \propto 16. & 2^{e}\ 7z \propto 28. \end{array}\right.$$

SIXIEME CAS.

55. ET si les grandeurs ont un même rapport que les connuës *c* & *d*, & que l'une comme *cz* & son quarré *cczz* en ayent un même que les connuës *e* & *f*; la proportion fournira [b] cette égalité $cfz \propto ccezz$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{f}{ce}$. &c.

b. 44. 7. *de la premiére partie.*

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 3.\ 1 :: 3z.\ 1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} e.\ f :: cz.\ cczz. \\ 1.\ 6 :: 3z.\ 9zz. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ cz \propto \frac{cf}{ce}. & 2^{e}\ dz \propto \frac{df}{ce}. \\ 1^{ere}\ 3z \propto 6. & 2^{e}\ 1z \propto 2. \end{array}\right.$$

SEPTIEME CAS.

56. ET si les grandeurs ont un même rapport que les connuës *c* & *d*, & que leur somme $cz + dz$ & le quarré *cczz* de l'une des deux en ayent encore un même que les connuës *e* & *f*; la proportion fournira [b] l'égalité $cfz + dfz \propto ccezz$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{cf + df}{cce}$.

b. 44. 7. *de la premiére partie.*

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 3.\ 1 :: 3z.\ 1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz + dz.\ cczz :: e.\ f. \\ 3z + 1z.\ 9zz :: 2.\ 9. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf + cdf}{cce}. & 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf + ddf}{cce}. \\ 1^{ere}\ 3z \propto 6. & 2^{e}\ 1z \propto 2. \end{array}\right.$$

HUITIEME CAS.

57. ET si les grandeurs ont un même rapport que les connuës *c* & *d*, & que leur différence $cz - dz$ & le quarré *cczz* de la grande ou le quarré *ddzz* de la moindre en ayent encore un même que les connuës *e* & *f*;

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 3.\ 1 :: 3z.\ 1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz - dz.\ cczz :: e.\ f. \\ 3z - 1z.\ 9zz :: 1.\ 9. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf - cdf}{cce}. & 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf - ddf}{cce}. \\ 1^{ere}\ 3z \propto 6. & 2^{e}\ 1z \propto 2. \end{array}\right.$$

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} c.\ d :: cz.\ dz. \\ 3.\ 1 :: 3z.\ 1z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} cz - dz.\ ddzz :: e.\ f. \\ 3z - 1z.\ 1zz :: 1.\ 1. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ cz \propto \frac{ccf - cdf}{dde}. & 2^{e}\ dz \propto \frac{cdf - ddf}{dde}. \\ 1^{ere}\ 3z \propto 6. & 2^{e}\ 1z \propto 2. \end{array}\right.$$

la

la proportion fournira [b] l'égalité $cfz - dfz \propto ccezz$, ou [b] l'égalité $cfz - dfz$ b. 44. 7.
$\propto ddezz$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{cf-df}{cce}$, ou une valeur $z \propto \frac{cf-df}{dde}$. &c. de la premiére partie.

XXVI QUESTION.

58. *Connoissant le produit de deux grandeurs, & la somme de leurs quarrez; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, & leur plan a, & $2b$ la somme des quarrez; la grande [b] est $z + y$, la moindre b. 3.
$z - y$, leur plan $zz - yy \propto a$. Et par transposition $zz \propto yy + a$. Et la somme des quarrez $zz + 2zy + yy$ & $zz - 2zy + yy$ est $2zz + 2yy \propto 2b$. Et prenant la moitié, & transposant ensuitte, on aura $zz \propto b - yy \propto yy + a$. Et $2yy \propto b - a$. Ou $y \propto \sqrt{\frac{b-a}{2}}$. Et $zz \propto yy + a \propto \frac{a+b}{2}$. Ou $z \propto \sqrt{\frac{a+b}{2}}$.

Suppositions. *Résolution génerale.*

$$\left\{\begin{array}{l} zz - yy \propto a. \\ zz - yy \propto 20. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2zz + 2yy \propto 2b. \\ 2zz + 2yy \propto 104. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ z + y \propto \frac{1}{2}\sqrt{2a+2b} + \frac{1}{2}\sqrt{2b-2a} \propto 10. \\ 2^{e}\ z - y \propto \frac{1}{2}\sqrt{2a+2b} - \frac{1}{2}\sqrt{2b-2a} \propto 4. \end{array}\right.$$

XXVII QUESTION ET PRINCIPE IV.

59. *Connoissant le produit de deux grandeurs, & la différence de leurs quarrez; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, & leur plan a, & $2b$ la différence des quarrez; la grande [b] est $z + y$, la b. 3.
moindre $z - y$, & le plan $zz - yy \propto a$. Et $zz \propto yy + a$. Et la différence des quarrez $zz + 2zy + yy$ & $zz - 2zy + yy$ est $4zy \propto 2b$. Et $2zy \propto b$. Et quarrant chaque membre de l'égalité $zz - yy \propto a$, & chaque membre aussi de l'égalité $2zy \propto b$; on aura les deux égalitez nouvelles $z^4 - 2zzyy + y^4 \propto aa$, & $4zzyy \propto bb$. Et ajoûtant ces deux égalitez ensemble, ou le premier terme d'une part au premier de l'autre, & le second de l'une au second de l'autre; on aura l'égalité $z^4 + 2zzyy + y^4 \propto aa + bb$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $zz + yy \propto \sqrt{aa+bb}$. Et $zz \propto \underline{-yy + \sqrt{aa+bb}} \propto yy + a$. Et $2yy \propto -a + \sqrt{aa+bb}$. Ou $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$. Et $zz \propto yy + a \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}$. Ou $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$.

Suppositions. *Résolution génerale.*

$$\left\{\begin{array}{l} zz - yy \propto a. \\ zz - yy \propto 20. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 4zy \propto 2b. \\ 4zy \propto 96. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z + y \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}} + \sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}} \propto 10. \\ z - y \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}} - \sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}} \propto 2. \end{array}\right.$$

XXVIII QUESTION.

PREMIER CAS.

60. *Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme du plan & des quarrez de ces mêmes grandeurs; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, & b
b. 3. la somme du plan & des quarrez ajoûtez ensemble; la grande [b] est $a + y$, la moindre $a - y$, le plan $aa - yy$, & la somme du plan $aa - yy$ & des quarrez $aa + 2ay + yy$ & $aa - 2ay + yy$ est $3aa + yy \propto b$. Et $yy \propto b - 3aa$. Et $y \propto \sqrt{b - 3aa}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\begin{cases} 3aa + yy \propto b. \\ 108 + yy \propto 124. \end{cases}$ $\begin{cases} 1^{ere}\ a + y \propto a + \sqrt{b - 3aa}. & 2^{e}\ a - y \propto a - \sqrt{b - 3aa}. \\ 1^{ere}\ 6 + y \propto 6 + \sqrt{16} \propto 10. & 2^{e}\ 6 - y \propto 6 - \sqrt{16} \propto 2. \end{cases}$

SECOND CAS.

61. *Connoissant la différence de deux grandeurs, & la somme du plan & des quarrez; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2a$, & b
b. 3. la somme du plan & des quarrez; la grande [b] est $z + a$, la moindre $z - a$, le plan $zz - aa$, & la somme du plan $zz - aa$ & des quarrez $zz + 2az + aa$ & $zz - 2az + aa$ est $3zz + aa \propto b$. Et $zz \propto \frac{b - aa}{3}$. Et $z \propto \sqrt{\frac{b - aa}{3}}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\begin{cases} 3zz + aa \propto b. \\ 3zz + 16 \propto 124. \end{cases}$ $\begin{cases} 1^{ere}\ z + a \propto a + \sqrt{\frac{b - aa}{3}}. & 2^{e}\ z - a \propto -a + \sqrt{\frac{b - aa}{3}}. \\ 1^{ere}\ z + 4 \propto 4 + \sqrt{36} \propto 10. & 2^{e}\ z - 4 \propto -4 + \sqrt{36} \propto 2. \end{cases}$

TROISIEME CAS.

62. *Et connoissant l'une des grandeurs, & la somme du plan & des deux quarrez; pour trouver la grandeur inconnuë.*

Ayant nommé c la grandeur connuë, & x l'inconnuë, & b la somme du plan & des deux quarrez; le plan est cx, & les quarrez sont cc & xx, & la somme du plan & des quarrez est $xx + cx + cc \propto b$. Et ôtant de part & d'autre $\frac{3}{4}cc$, on aura $xx + cx + \frac{1}{4}cc \propto b - \frac{3}{4}cc$. Et tirant la racine quarrée de chacun des deux membres, on aura $x + \frac{1}{2}c \propto \sqrt{b - \frac{3}{4}cc}$. Et $x \propto -\frac{1}{2}c + \sqrt{b - \frac{3}{4}cc}$.

Suppositions. $\begin{cases} xx + cx + cc \propto b. \\ xx + 10x + 100 \propto 124. \end{cases}$ *Résolution générale.* $\begin{cases} x \propto -\frac{1}{2}c + \sqrt{b - \frac{3}{4}cc}. \\ x \propto -5 + \sqrt{49} \propto 2. \end{cases}$

QUATRIEME CAS.

63. *Et connoissant le produit des grandeurs, & la somme du produit & des deux quarrez; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé a le produit des grandeurs, & b la somme du produit & des deux quarrez, & $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$; la grande est $z+y$, la moindre $z-y$, & le plan est $zz-yy \propto a$. Et $yy \propto zz-a$. Et la somme du plan $zz-yy$ & des quarrez $zz+2zy+yy$ & $zz-2zy+yy$ est $3zz+yy \propto b$. Et $yy \propto b-3zz \propto zz-a$. Et $4zz \propto a+b$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $2z \propto \sqrt{a+b}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\begin{cases} zz-yy \propto a. \\ zz-yy \propto 20. \end{cases} \begin{cases} 3zz+yy \propto b. \\ 3zz+yy \propto 124. \end{cases} \begin{cases} 1^{ere}\ z+y \propto \frac{1}{2}\sqrt{a+b}+\frac{1}{2}\sqrt{b-3a} \propto 10. \\ 2^{e}\ z-y \propto \frac{1}{2}\sqrt{a+b}-\frac{1}{2}\sqrt{b-3a} \propto 2. \end{cases}$

XXIX QUESTION.

64. *Connoissant la somme de certaines puissances également élevées de deux grandeurs, & la différence de ces mêmes puissances; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme des puissances, & leur différence $2d$; la plus [b] grande de ces deux puissances est $a+d$, & la moindre $a-d$. De b. 3.
sorte que si les puissances sont quarrées, ou cubiques, ou d'un autre degré; on n'aura qu'à tirer les racines quarrées, ou cubiques, ou autres linéaires. &c.

Suitte infinie de résolutions générales.

(*Somme des quarrez* $2a \propto 104$. (*Différence* $2d \propto 96$. ($1^{ere}\ \sqrt{a+d} \propto 10$. $2^{e}.\ \sqrt{a-d} \propto 2$.

(*Somme des cubes* $2a \propto 1008$. (*Différence* $2d \propto 992$. ($1^{ere}\ \sqrt{C.\,a+d} \propto 10$. $2^{e}.\ \sqrt{C.\,a-d} \propto 2$.

XXX QUESTION.

65. *Connoissant la somme des quarrez de deux grandeurs, & le rapport du plan de ces mêmes grandeurs au quarré de leur différence; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, ou $z+y$ la [b] grande, & $z-y$ la moindre, & $2a$ la somme des quarrez; si le b. 3.
rapport du plan $zz-yy$ au quarré $4yy$ de la différence $2y$ est celuy d'une grandeur connuë b à une connuë c, ou que la proportion soit $zz-yy.\ 4yy :: b.\ c.$ On trouvera, en multipliant d'une part les extrêmes & de l'autre des moyens, l'égalité $czz-cyy \propto 4byy$. Et $czz \propto 4byy+cyy$. Et $zz \propto \frac{4byy+cyy}{c}$. Et par la premiére supposition on aura aussi la somme des

quarrez $2zz + 2yy \propto 2a$. Et $zz \propto a - yy \propto \frac{4byy + cyy}{c}$. Et tout étant multiplié par c, on aura encore $ac - cyy \propto 4byy + cyy$. Et ensuitte $ac \propto 4byy + 2cyy$. Ou $yy \propto \frac{ac}{4b + 2c}$. Et $y \propto \sqrt{\frac{ac}{4b + 2c}}$. Et mettant pour yy sa valeur dans l'égalité $zz \propto a - yy$, on aura $zz \propto \frac{4ab + ac}{4b + 2c}$, & $z \propto \sqrt{\frac{4ab + ac}{4b + 2c}}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} 2zz + 2yy \propto 2a. \\ 2zz + 2yy \propto 104. \end{cases} \begin{cases} zz - yy.\ 4yy :: b.\ c. \\ zz - yy.\ 4yy :: 5.16. \end{cases} \begin{cases} z + y \propto \sqrt{\frac{4ab + ac}{4b + 2c}} + \sqrt{\frac{ac}{4b + 2c}} \propto 10. \\ z + y \propto \sqrt{\frac{4ab + ac}{4b + 2c}} - \sqrt{\frac{ac}{4b + 2c}} \propto 2. \end{cases}$$

XXXI QUESTION.

PREMIER CAS.

66. *Connoissant la somme de deux grandeurs, & celle de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, &
b. 3. $2b$ la somme des deux cubes; la grande [b] est $a + y$, la moindre $a - y$, & la somme des cubes $a^3 + 3aay + 3ayy + y^3$ & $a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$ est $2a^3 + 6ayy \propto 2b$. Et $6ayy \propto 2b - 2a^3$. Et $yy \propto \frac{2b - 2a^3}{6a}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} 2a^3 + 6ayy \propto 2b. \\ 432 + 36yy \propto 1008. \end{cases} \begin{cases} 1^{ere}\ a + y \propto a + \sqrt{\frac{b - a^3}{3a}}. \quad 2^{e}\ a - y \propto a - \sqrt{\frac{b - a^3}{3a}}. \\ 1^{ere}\ 6 + y \propto 6 + \sqrt{16} \propto 10. \quad 2^{e}\ 6 - y \propto 6 - \sqrt{16} \propto 2. \end{cases}$$

SECOND CAS.

67. *Connoissant la différence des grandeurs, & celle de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2a$, & $2b$
b. 3. la différence des deux cubes; la grande [b] est $z + a$, la moindre $z - a$, & la différence des cubes $z^3 + 3zza + a^3$ & $z^3 - 3zza + 3zaa - a^3$ est $6azz + 2a^3 \propto 2b$. Et $zz \propto \frac{b - a^3}{3a}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} 6azz + 2a^3 \propto 2b. \\ 24zz + 128 \propto 992. \end{cases} \begin{cases} 1^{ere}\ z + a \propto a + \sqrt{\frac{b - a^3}{3a}}. \quad 2^{e}\ z - a \propto - a + \sqrt{\frac{b - a^3}{3a}}. \\ 1^{ere}\ z + 4 \propto 4 + \sqrt{36} \propto 10. \quad 2^{e}\ z - 4 \propto - 4 + \sqrt{36} \propto 2. \end{cases}$$

TROISIEME CAS.

68. *ET si on connoît la somme des grandeurs, & la différence des cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, & $2b$ la différence des cubes; la grande est $a + y$, la moindre $a - y$, & la difference des cubes $a^3 + 3aay + 3ayy + y^3$ & $a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$ est $2y^3 + 6aay \propto 2b$. D'où l'on tire une égalité composée $y^3 + 3aay \propto b$, dont la résolution est réservée pour un autre lieu.

$$\textit{Egalité composée} \begin{cases} 6aay + 2y^3 \propto 2b. \\ 216y + 2y^3 \propto 992. \end{cases} \quad \textit{Ou} \begin{array}{l} y^{3*} + 3aay - b \propto 0. \\ y^{3*} + 108y - 496 \propto 0. \end{array}$$

QUATRIEME CAS.

69. *ET si on connoît la différence des grandeurs, & la somme des cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2a$, & $2b$ la somme des deux cubes; la grande est $z + a$, la moindre $z - a$, & la somme des cubes est $2z^3 + 6aaz \propto 2b$. D'où l'on tire une égalité composée $z^3 + 3aaz \propto b$, dont la résolution doit pareillement être expliquée ailleurs.

$$\textit{Egalité composée} \begin{cases} 2z^3 + 6aaz \propto 2b. \\ 2z^3 + 96z \propto 1008. \end{cases} \quad \textit{Ou} \begin{array}{l} z^{3*} + 3aaz - b \propto 0. \\ z^{3*} + 48z - 504 \propto 0. \end{array}$$

XXXII QUESTION.

PREMIER CAS.

70. *COnnoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs 4es puissances; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2a$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, ou $a + y$ la grande, & $a - y$ la moindre, & $2b$ la somme des 4es puissances; La somme de ces mêmes puissances $a^4 + 4a^3y + 6aayy + 4ay^3 + y^4$ & $a^4 - 4a^3y + 6aayy - 4ay^3 + y^4$ est $2a^4 + 12aayy + 2y^4 \propto 2b$. Et $y^4 + 6aayy + a^4 \propto b$. Et ajoûtant $8a^4$ de part & d'autre, pour avoir au prémier membre un quarré parfait, l'égalité sera $y^4 + 6aayy + 9a^4 \propto b + 8a^4$. Et si on tire de part & d'autre la racine quarrée; on aura l'égalité $yy + 3aa \propto \sqrt{b + 8a^4}$. Et $yy \propto - 3aa + \sqrt{b + 8a^4}$. Et $y \propto \sqrt{- 3aa + \sqrt{b + 8a^4}}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\begin{cases} 2a^4 + 12aayy + 2y^4 \propto 2b. \\ 162 + 108yy + 2y^4 \propto 272. \end{cases} \begin{cases} 1^{ere} \; a + y \propto a + \sqrt{- 3aa + \sqrt{b + 8a^4}} \propto 4. \\ 2^{e} \; a - y \propto a - \sqrt{- 3aa + \sqrt{b + 8a^4}} \propto 2. \end{cases}$$

SECOND CAS.

71. *ET connoissant la différence des grandeurs, & la somme des 4es puissances; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2a$, & $2b$ la somme des 4^{es} puissances; la grande est $z + a$, la moindre $z - a$, & la somme des 4^{es} puissances est $2z^4 + 12aazz + 2a^4 \propto 2b$. Et $z^4 + 6aazz + 9a^4 \propto b + 8a^4$. Et $zz + 3aa \propto \sqrt{b + 8a^4}$. Et $z \propto \sqrt{-3aa + \sqrt{b + 8a^4}}$. &c.

Suppositions.	*Résolution générale.*
$2z^4 + 12aazz + 2a^4 \propto 2b.$	1^{ere} $z + a \propto a + \sqrt{-3aa + \sqrt{b + 8a^4}} \propto 4.$
$2z^4 + 12zz + 2 \propto 272.$	2^{e} $z - a \propto -a + \sqrt{-3aa + \sqrt{b + 8a^4}} \propto 2.$

XXXIII QUESTION ET PRINCIPE V.

PREMIER CAS.

72. *Connoissant le produit de deux grandeurs, & la somme de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$, & b le plan des deux, & $2c$ la somme de leurs cubes; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$, & le plan $zz - yy \propto b$. Et la somme des cubes est $2z^3 + 6yyz \propto 2c$. Et $z^3 + 3yyz \propto c$. Et pour comparer les membres des deux égalitez, on les élève à un même degré, en quarrant les deux membres de l'égalité $z^3 + 3yyz \propto c$, & cubant ceux de l'autre $zz - yy \propto b$. D'où l'on tire ces deux égalitez nouvelles $z^6 + 6yyz^4 + 9y^4zz \propto cc$, & $z^6 - 3yyz^4 + 3y^4zz - y^6 \propto b^3$. Et retranchant le premier membre de celle-ci du premier de l'autre, & le second du second, on aura l'égalité $9yyz^4 + 6y^4zz + y^6 \propto cc - b^3$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $3yzz + y^3 \propto \sqrt{cc - b^3}$. Et si on ajoûte ensuitte cette égalité à l'égalité précédente $z^3 + 3yyz \propto c$, c'est à dire le premier membre au premier, & le second au second; l'égalité sera $z^3 + 3yyz + 3yzz + y^3 \propto c + \sqrt{cc - b^3}$. Et tirant de part & d'autre la racine cubique, on aura $z + y \propto \sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}}$. Et si on divise par cette égalité la premiére $zz - yy \propto b$, c'est à dire le premier membre $zz - yy$ par le premier $z + y$, & le second b par le second $\sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}}$, on trouvera $z - y \propto \dfrac{b}{\sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}}}$. Et si on ajoûte cette égalité à l'égalité $z + y \propto \sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}}$; on aura une valeur de $2z$ entiérement connuë. Et si on la retranche de la même égalité; on aura une valeur de $2y$ entiérement connuë. &c.

Suppositions.		*Résolution générale.*
$zz - yy \propto b.$	$2z^3 + 6yyz \propto 2c.$	$z + y \propto \sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}} \propto 10.$
$zz - yy \propto 20.$	$2z^3 + 6yyz \propto 1008.$	$z - y \propto \dfrac{b}{\sqrt{C.\, c + \sqrt{cc - b^3}}} \propto 3.$

SECOND CAS.

73. *Et connoissant le plan des deux grandeurs, & la différence de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé comme auparavant la somme des grandeurs $2z$, & leur différence $2y$, & b leur plan, & $2c$ la différence de leurs cubes; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$, & leur plan $zz - yy \propto b$. Et la différence des cubes est $6zzy + 2y^3 \propto 2c$. Et $3zzy + y^3 \propto c$. Et pour faire les comparaisons, on éléve tous les membres à un même degré, en quarrant ceux de l'égalité $3zzy + y^3 \propto c$, & cubant ceux de l'autre $zz - yy \propto b$. D'où l'on tire ces deux égalitez nouvelles $9z^4yy + 6zzy^4 + y^6 \propto cc$. Et $z^6 - 3z^4yy + 3zzy^4 - y^6 \propto b^3$. Et ajoûtant ensemble d'une part les membres inconnus & les connus de l'autre, on aura l'égalité $z^6 + 6z^4yy + 9zzy^4 \propto cc + b^3$. Et les racines quarrées de ces deux membres fourniront encore celle-ci $z^3 + 3zyy \propto \sqrt{cc + b^3}$. Et ajoûtant son membre inconnu à l'inconnu de l'égalité $3zzy + y^3 \propto c$, & le connu au connu; on trouvera une nouvelle égalité $z^3 + 3zzy + 3zyy + y^3 \propto c + \sqrt{cc + b^3}$. Et tirant de part & d'autre la racine cubique, on aura $z + y \propto \sqrt[3]{c + \sqrt{cc + b^3}}$. Et divisant par le premier membre $z + y$ de cette égalité le premier $zz - yy$ de l'égalité $zz - yy \propto b$, & le second b par le second $\sqrt[3]{c + \sqrt{cc + b^3}}$; on trouvera $z - y \propto \dfrac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{cc + b^3}}}$.

Suppositions. *Résolution generale.*

$$\begin{cases} zz - yy \propto b. \\ zz - yy \propto 20. \end{cases} \begin{cases} 6zzy + 2y^3 \propto 2c. \\ 6zzy + 2y^3 \propto 992. \end{cases} \begin{cases} 1^{ere}\ z + y \propto \sqrt[3]{c + \sqrt{cc + b^3}} \propto 10. \\ 2^e\ \ z - y \propto \dfrac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{cc + b^3}}} \propto 2. \end{cases}$$

XXXIV QUESTION.

74. *Connoissant un produit de la somme de deux grandeurs multipliée par celle de leurs quarrez, & un autre de la différence de ces mêmes grandeurs multipliée par celle des quarrez; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$, la somme des quarrez $2zz + 2yy$, & leur différence $4zy$; & le produit de la somme $2z$ par l'autre $2zz + 2yy$ étant une grandeur connuë, que je nomme $4b$ pour éviter les fractions, l'égalité est $4z^3 + 4zyy \propto 4b$. Et $z^3 + zyy \propto b$. Et le produit de la différence $2y$ par la différence $4zy$ étant aussi une grandeur connuë, que je nomme encore $8c$ pour ôter les fractions, l'égalité est $8zyy \propto 8c$. Et $zyy \propto c$. Et ôtant le premier membre zyy du premier de l'égalité $z^3 + zyy \propto b$, & le second c du second b; on aura $z^3 \propto b - c$. Et tirant les racines cubiques, on trouvera une valeur z

Suppositions. *Résolution generale.*

$$\begin{cases} 4z^3 + 4zyy \propto 4b. \\ 4z^3 + 4zyy \propto 1248. \end{cases} \begin{cases} 8zyy \propto 8c. \\ 8zyy \propto 768. \end{cases} \begin{cases} z + y \propto \sqrt[3]{b - c} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\sqrt[3]{b - c}}} \propto 10. \\ z - y \propto \sqrt[3]{b - c} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\sqrt[3]{b - c}}} \propto 2. \end{cases}$$

$\propto \sqrt{C.\overline{b - c}}$. Et comme on avoit déja $zyy \propto c$, ou $yy \propto \frac{c}{z}$, & $y \propto \sqrt{\frac{c}{z}}$; on aura une valeur $y \propto \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\sqrt{C.\overline{b - c}}}}$. &c.

XXXV QUESTION ET PRINCIPE VI.

75. *Pour trouver trois grandeurs, telles que le plan des deux premières par la troisiéme soit une grandeur connuë, & le plan de la premiére & troisiéme par la seconde une grandeur connuë, & le plan de la seconde & troisiéme par la premiére encore une grandeur connuë.*

Ayant nommé la troisiéme x, & $\frac{a}{x}$ la somme des deux autres, ou a le plan connu des deux premiéres par la troisiéme x; une des conditions sera déja remplie. Et si on nomme la premiére $\frac{v}{x}$ pour donner une dénomination commune, la seconde sera $\frac{a}{x} - \frac{v}{x}$. Et multipliant la premiére & la troisiéme ensemble ou $\frac{v + xx}{x}$ par la seconde $\frac{a - v}{x}$, on aura le plan connu $b \propto \frac{av - vv + axx - vxx}{xx}$. Et si on multiplie la seconde & la troisiéme ou $\frac{a - v + xx}{x}$ par la premiére $\frac{v}{x}$, on aura le plan connu $c \propto \frac{av - vv + vxx}{xx}$. Et ôtant le membre connu c du membre connu b, & le membre inconnu $\frac{av - vv + vxx}{xx}$ de l'inconnu $\frac{av - vv + axx - vxx}{xx}$; on aura l'égalité $\frac{axx - 2vxx}{xx} \propto b - c$, ou $a - 2v \propto b - c$. Et $v \propto \frac{a - b + c}{2}$. Et mettant pour v sa valeur dans l'égalité $\frac{av - vv + vxx}{xx} \propto c$, l'égalité sera $\frac{aa - bb + 2bc - cc + 2axx - 2bxx + 2cxx}{4xx} \propto c$. Et $2bxx + 2cxx - 2axx \propto aa - bb + 2bc - cc$. Et $\sqrt{xx} \propto \sqrt{\frac{aa - bb + 2bc - cc}{2b + 2c - 2a}}$. &c.

1ere *Supposition* $\begin{cases} zx + yx \propto a. \\ zx + yx \propto 35. \end{cases}$ 2e $\begin{cases} zy + yx \propto b. \\ zy + yx \propto 32. \end{cases}$ 3e $\begin{cases} zy + zx \propto c. \\ zy + zx \propto 27. \end{cases}$

Résolution générale. $\left\{ x \propto \sqrt{\frac{aa - bb + 2bc - cc}{2b + 2c - 2a}} \propto 5.\ y \propto \frac{a + b - c}{2x} \propto 4.\ z \propto \frac{a + b - c}{2x} \propto 3. \right.$

XXXVI QUESTION.

76. *Pour trouver trois grandeurs, telles que le plan des deux premiéres & leur somme ayent un même rapport que deux grandeurs connuës, & le plan de la premiére & de la troisiéme & leur somme un même que deux grandeurs*

grandeurs connuës, & le plan de la seconde & de la troisiéme & leur somme un même que deux autres connuës.

Ayant nommé simplement la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x; si le plan zy des deux premiéres est à leur somme $z + y$ comme une connuë c est à une connuë d : multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens, on aura l'égalité $dzy \propto cz + cy$. Ou $dzy - cz \propto cy$. Et $z \propto \frac{cy}{dy - c}$. Et si le plan zx & la somme $z + x$ de ses côtez ont aussi un même rapport que deux connuës e & f; le produit des extrêmes & celuy des moyens fourniront l'égalité $fzx \propto ez + ex$. Ou $fzx - ez \propto ex$. Et $z \propto \frac{ex}{fx - e} \propto \frac{cy}{dy - c}$. Et multipliant de part & d'autre par $fx - e$, & les produits égaux par $dy - c$; on aura l'égalité $deyx - cex \propto cfyx - cey$. Et $cey + deyx - cfyx \propto cex$. Et $y \propto \frac{cex}{ce + dex - cfx}$. Et si le plan yx & la somme $y + x$ de ses deux côtez ont un même rapport que deux connuës g & h; le produit des extrêmes & celuy des moyens fourniront l'égalité $hyx \propto gy + gx$. Et $hyx - gy \propto gx$. Et $y \propto \frac{gx}{hx - g} \propto \frac{cex}{ce + dex - cfx}$. Et divisant par x chaque membre, & multipliant aussi de part & d'autre par $ce + dex - cfx$, & les produits égaux par $hx - g$; l'égalité sera $cehx - ceg \propto ceg + degx - cfgx$, ou $cehx + cfgx - degx \propto 2ceg$. &c.

1ere *supposition* $\begin{cases} zy.\ z + y :: c.\ d. \\ zy.\ z + y :: 3.\ 1. \end{cases}$ 2e $\begin{cases} zx.\ z + x :: e.\ f. \\ zx.\ z + x :: 4.\ 1. \end{cases}$ 3e $\begin{cases} yx.\ y + x :: g.\ h. \\ yx.\ y + x :: 5.\ 1. \end{cases}$

Résolution générale.

$$z \propto \frac{2ceg}{cfg - ceh + deg} \propto \frac{120}{23}.\quad y \propto \frac{2ceg}{ceh - cfg + deg} \propto \frac{120}{17}.\quad x \propto \frac{2ceg}{ceh + cfg - deg} \propto \frac{120}{7}.$$

XXXVII QUESTION.

77. *Pour trouver trois grandeurs, telles que le plan des deux premiéres & la somme des trois ayent un même rapport que deux grandeurs connuës; & le plan de la premiére & de la troisiéme & la somme des trois un même que deux grandeurs connuës; & le plan de la seconde & troisiéme & la somme des trois encore un même que deux grandeurs connuës.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x, & les deux premiéres des grandeurs connuës a & b, & c & d les deux connuës ensuitte, & e & f les deux connuës qui restent. La premiére supposition fournira une premiére proportion $zy.\ z + y + x :: a.\ b$. Ou $a.\ b :: zy.\ z + y + x \propto \frac{bzy}{a}$. Et la seconde supposition fournira aussi la proportion $c.\ d :: zx.\ z + y + x \propto \frac{dzx}{c} \propto \frac{bzy}{a}$. Et $adzx \propto bczy$. Et $y \propto \frac{adx}{bc}$. Et la troisiéme supposition fournira encore la proportion $e.f::yx.\ z+y+x \propto \frac{fyx}{e} \propto \frac{dzx}{c}$. Et $cfyx \propto dezx$. Et $y \propto \frac{dez}{cf} \propto \frac{adx}{bc}$. Et $bez \propto afx$. Et $z \propto \frac{afx}{be}$. Et $z+y+x \propto \frac{afx}{be} + \frac{adx}{bc} + x \propto \frac{bzy}{a} \propto \frac{aabdfxx}{abbce} \propto \frac{adfxx}{bce}$. Et multipliant chaque membre par bce; on aura l'égalité $acfx + adex + bcex \propto adfxx$. Ou $acf + ade + bce \propto adfx$. &c.

$$1^{ere}\ \textit{supposition} \left\{\begin{array}{l} a.b::zy.\ z+y+x. \\ 3.1::zy.\ z+y+x. \end{array}\right. \quad 2^{e} \left\{\begin{array}{l} c.d::zx.\ z+y+x. \\ 5.1::zx.\ z+y+x. \end{array}\right. \quad 3^{e} \left\{\begin{array}{l} e.f::yx.\ z+y+x. \\ 4.1::yx.\ z+y+x. \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$z \propto \frac{acf+ade+bce}{bde} \propto \frac{47}{4}.\ y \propto \frac{acf+ade+bce}{bcf} \propto \frac{47}{5}.\ x \propto \frac{acf+ade+bce}{adf} \propto \frac{47}{3}.$$

XXXVIII QUESTION.

78. *Pour coupper une grandeur connuë en trois autres, telles que la somme des deux premiéres soit determinée, & de plus que les trois plans de la premiére par une grandeur connuë, & de la seconde par une grandeur connuë, & de la troisiéme par une encore connuë, fassent ensemble une certaine grandeur determinée.*

Ayant pris a pour la somme des trois, & b pour celle des deux premiéres; la [b] troisiéme est $a - b$. Et si on nomme la premiére z; la seconde [b] est $b - z$. Et les trois plans de la premiére z par une connuë c, & de la seconde $b - z$ par une connuë d, & de la troisiéme $a - b$ par une connuë e, font une somme connuë $f \propto cz + bd - dz + ae - be$. Ou $cz - dz \propto f + be - ae - bd$. Et $z \propto \frac{f+be-ae-bd}{c-d}$. &c.

b. 2.

$$1^{ere}\ \textit{supposition} \left\{\begin{array}{l} z+y+x \propto a. \\ z+y+x \propto 13. \end{array}\right. \quad 2^{e} \left\{\begin{array}{l} z+y \propto b. \\ z+y \propto 11. \end{array}\right. \quad 3^{e} \left\{\begin{array}{l} cz+dy+ex \propto f. \\ 5z+3y+1x \propto 43. \end{array}\right.$$

$$\textit{Résolution générale.} \left\{ z \propto \frac{f+be-ae-bd}{c-d} \propto 4.\ y \propto \frac{ae-f+bc-be}{c-d} \propto 7.\ x \propto a-b \propto 2. \right.$$

XXXIX QUESTION.

79. *Connoissant deux grandeurs; pour en trouver une autre, telle que le plan de la premiére par la somme des deux autres, & celuy de la seconde par la somme des deux autres, & celuy de la troisiéme par la somme des deux autres, soient en proportion arithmétique continuë.*

Ayant pris a pour la premiére, & b pour la seconde, & z pour la troisiéme; le premier plan $ab + az$ de la premiére a par les deux b & z est arithmétiquement au plan $ba + bz$ de la seconde b par les deux a & z, comme ce plan est à un autre $za + zb$ de la troisiéme z par les deux a & b. Et ainsi ajoûtant d'une part les deux extrêmes ensemble, & prenant de l'autre part le double du moyen ; on aura l'égalité $ab + 2az + bz \propto 2ba + 2bz$. Et par transposition $2az - bz \propto 1ab$. &c.

Supposition $\begin{cases} \div\ ab + az.\ ba + bz.\ za + zb. \\ \div\ 24 + 6z.\ 24 + 4z.\ 6z + 4z. \end{cases}$ *Résolution générale.* $\begin{cases} z \propto \frac{ab}{2a - b} \propto 3. \end{cases}$

Proportion arithmétique. $\{ \div\ ab + az \propto 42.\ ab + bz \propto 36.\ az + bz \propto 30.$

XL QUESTION.

PREMIER CAS.

80. *Connoissant la somme des extrêmes d'une proportion géometrique continuë, & le terme moyen ; pour trouver les extrêmes.*

Ayant nommé $2a$ la somme connuë des extrêmes, & leur différence $2y$, & le terme moyen b ; le plus grand des extrêmes est $a + y$, & le moindre $a - y$. Et la proportion continuë est $a + y.\ b :: b.\ a - y$. Et prenant d'une part le produit des extrêmes, & de l'autre le quarré du moyen ; l'égalité sera $aa - yy \propto bb$. Et $yy \propto aa - bb$. Ou $y \propto \sqrt{aa - bb}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\begin{cases} a + y.\ b :: b.\ a - y. \\ 13 + y.\ 12 :: 12.\ 13 - y. \end{cases}$ $\begin{cases} 1^{ere}\ a + y \propto a + \sqrt{aa - bb}.\ 3^{e}\ a - y \propto a - \sqrt{aa - bb}. \\ 1^{ere}\ 13 + y \propto 13 + \sqrt{25} \propto 18.\ 3^{e}\ 13 - y \propto 13 - \sqrt{25} \propto 8. \end{cases}$

SECOND CAS.

81. *Et connoissant la différence des extrêmes, & le terme moyen ; pour trouver les extrêmes.*

Ayant pris $2z$ pour la somme des extrêmes, & $2a$ pour leur différence, & b pour le terme moyen ; la proportion continuë sera $z + a.\ b :: b.\ z - a$. Et on en tirera l'égalité $zz - aa \propto bb$. Ou $zz \propto aa + bb$. Et $z \propto \sqrt{aa + bb}$.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\begin{cases} z + a.\ b :: b.\ z - a. \\ z + 5.\ 12 :: 12.\ z - 5. \end{cases}$ $\begin{cases} 1^{ere}\ z + a \propto a + \sqrt{aa + bb}.\ 3^{e}\ z - a \propto -a + \sqrt{aa + bb}. \\ 1^{ere}\ z + 5 \propto 5 + 13 \propto 18.\ 3^{e}\ z - 5 \propto -5 + 13 \propto 8. \end{cases}$

XLI QUESTION.

PREMIER CAS.

82. *Connoissant la somme des quarrez des trois termes d'une proportion géométrique continuë, & l'un des extrêmes ; pour trouver les deux autres termes.*

Ayant nommé la moyenne y, & b l'extrême qu'on connoît, & x l'autre extrême ; la proportion sera $b.\ y :: y.\ x \propto \frac{yy}{b}$. Et les quarrez des termes feront une somme connuë $c \propto bb + yy + xx \propto bb + yy + \frac{y^4}{bb}$. Et multipliant de part & d'autre par *bb*, on aura l'égalité $bbc \propto b^4 + bbyy + y^4$. Et si on ôte de part & d'autre $\frac{3}{4}b^4$, elle sera $bbc - \frac{3}{4}b^4 \propto \frac{1}{4}b^4 + bbyy + y^4$. Et les racines quarrées des deux membres formeront l'égalité $\sqrt{bbc - \frac{3}{4}b^4} \propto \frac{1}{2}bb + yy$. Et on en tirera enfin celle-ci $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{bbc - \frac{3}{4}b^4}}$. &c.

Suppositions.		*Résolution générale.*
$b.y::y.x.$	$bb + yy + xx \propto c.$	$2^e\ y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{bbc - \frac{3}{4}b^4}} \propto 2.$
$1.y::y.x.$	$1 + yy + xx \propto 21.$	$3^e\ x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{c - \frac{3}{4}bb} \propto 4.$

SECOND CAS.

83. *ET connoissant la somme des quarrez, & la moyenne; pour trouver les extrêmes.*

Ayant nommé *z* le premier des extrêmes, & *x* l'autre extrême, & la moyenne *b*, & *c* la somme des quarrez; on aura la proportion $z.b::b.x \propto \frac{bb}{z}$. Et la somme des quarrez sera $zz + bb + xx \propto zz + bb + \frac{b^4}{zz} \propto c$. Et multipliant de part & d'autre par *zz*, on aura l'égalité $z^4 + zzbb + b^4 \propto czz$. Et $z^4 + bbzz - czz + b^4 \propto 0$. Et mettant de part & d'autre $\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}bbc - \frac{3}{4}b^4$, l'égalité sera $z^4 + bbzz - czz + \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{2}bbc + \frac{1}{4}cc \propto \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}bbc - \frac{3}{4}b^4$. Et les racines quarrées de ses membres formeront l'égalité $zz + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}c \propto \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}bbc - \frac{3}{4}b^4}$. Et on en tirera celle-ci $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{cc - 2bbc - 3b^4}}$. Et *cc* surpasse $2bbc + 3b^4$.

b. 21. 1. Et *c* par conséquent [b] surpasse $3bb$.

Suppositions.		*Résolution générale.*
$z.b::b.x.$	$zz + bb + xx \propto c.$	$1^{ere}\ z \propto \sqrt{\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{cc - 2bbc - 3b^4}} \propto 4.$
$z.2::2.x.$	$zz + 4 + xx \propto 21.$	$3^e\ z \propto \frac{bb}{\sqrt{\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{cc - 2bbc - 3b^4}}} \propto 1.$

AUTRE RESOLUTION.

Et si on veut nommer $2z$ la somme des extrêmes, & leur difference $2y$, & la moyenne *b*, & *c* la somme des quarrez; on aura la proportion $z + y.\ b::b.\ z - y$. Et les deux produits, l'un des extrêmes, &

l'autre des moyens, fourniront l'égalité $zz - yy \propto bb$. Et $zz \propto bb + yy$. Et la somme des quarrez sera $2zz + 2yy + bb \propto c$. Et $zz \propto \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}bb - yy \propto bb + yy$. Et $2yy \propto \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}bb$. D'où l'on tire une valeur $y \propto \frac{1}{2}\sqrt{c - 3bb}$. &c. Et c surpasse $3bb$.

Suppositions. *Résolution generale.*

$$\left\{\begin{array}{l} z+y.\ b::b.\ z-y. \\ z+y.\ 2::2.\ z-y. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2zz+2yy+bb \propto c. \\ 2zz+2yy+4 \propto 21. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z+y \propto \frac{1}{2}\sqrt{c+bb}+\frac{1}{2}\sqrt{c-3bb} \propto 4. \\ z+y \propto \frac{1}{2}\sqrt{c+bb}-\frac{1}{2}\sqrt{c-3bb} \propto 1. \end{array}\right.$$

XLII QUESTION.

PREMIER CAS.

84. *Connoissant la somme des extrêmes, & celle des moyens d'une progression géométrique & de quatre termes; pour trouver chaque terme.*

Ayant nommé $2a$ la somme des extrêmes, & leur différence $2z$, & $2b$ la somme des deux termes moyens, & leur différence $2y$; la progression sera $a+z.\ b+y::b+y.\ b-y::b-y.\ a-z$. Et si on multiplie d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens de la premiére proportion $a+z.\ b+y::b+y.\ b-y$. On formera l'égalité $ab - ay + bz - zy \propto bb + 2by + yy$. Ou $bz - zy \propto bb + 2by + yy + ay - ab$. Et $z \propto \frac{bb + 2by + yy + ay - ab}{b - y}$. Et si on multiplie encore d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens de la proportion $b+y.\ b-y::b-y.\ a-z$. On formera l'égalité $ab + ay - bz - zy \propto bb - 2by + yy$. Et $z \propto \frac{ab + ay - bb + 2by - yy}{b+y} \propto \frac{bb + 2by + yy + ay - ab}{b-y}$. Et multipliant de part & d'autre par $b+y$, & les produits égaux par $b-y$; on trouvera cette égalité $b^3 + 3bby + 3byy - abb + y^3 + ayy \propto abb - b^3 + 3bby - 3byy - ayy + y^3$. Ou par transposition $2ayy + 6byy \propto 2abb - 2b^3$. D'où l'on tire une valeur $yy \propto \frac{abb - b^3}{a + 3b}$. Et $y \propto \sqrt{\frac{abb - b^3}{a+3b}}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} \div\!\!\div\ a+z.\ b+y.\ b-y.\ a-z. \\ \div\!\!\div\ \frac{9}{2}+z.\ 3+y.\ 3-y.\ \frac{9}{2}-z. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a+z \propto a+\sqrt{aa-\frac{4b^3}{a+3b}} \propto 8.\ b+y \propto b+\sqrt{\frac{abb-b^3}{a+3b}} \propto 4. \\ b-y \propto b-\sqrt{\frac{abb-b^3}{a+3b}} \propto 2.\ a-z \propto a-\sqrt{aa-\frac{4b^3}{a+3b}} \propto 1. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

85. *Et connoissant la différence des extrêmes, & celle des moyens; pour trouver chaque terme.*

Ayant nommé $2z$ la somme des extrêmes, & leur différence $2a$, & $2y$ la somme des moyens & leur différence $2b$; la progression sera $z+a.\ y+b::y+b.$

$y - b :: y - b . z - a$. Et si on multiplie d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens de la premiére proportion $z + a . y + b :: y + b . y - b$. On formera l'égalité $zy - bz + ay - ab \propto yy + 2by + bb$. Ou $zy - bz \propto yy + 2by + bb + ab - ay$. Et $z \propto \frac{yy + 2by + bb + ab - ay}{y - b}$.
Et si on multiplie encore d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens de la proportion $y + b . y - b :: y - b . z - a$. on formera l'égalité $zy + bz - ay - ab \propto yy - 2by + bb$. Ou $zy + bz \propto yy - 2by + bb + ay + ab$. Et $z \propto \frac{yy - 2by + bb + ay + ab}{y + b} \propto \frac{yy + 2by + bb + ab - ay}{y - b}$.
Et les deux membres étant multipliez par $y + b$, & par $y - b$; on aura l'égalité $y^3 - 3byy + 3bby + ayy - b^3 - abb \propto y^3 + 3byy + 3bby - ayy + b^3 + abb$. Ou par transposition $2ayy - 6byy \propto 2abb + 2b^3$.
D'où l'on tire $yy \propto \frac{abb + b^3}{a - 3b}$ &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} \div\, z + a . y + b . y - b . z - a . \\ \div\, z + \frac{7}{2} . y + 1 . y - 1 . z - \frac{7}{2} . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z + a \propto a + \sqrt{aa + \frac{4b^3}{a - 3b}} \propto 8 . \; y + b \propto b + \sqrt{\frac{abb + b^3}{a - 3b}} \propto 4 . \\ y - b \propto -b + \sqrt{\frac{abb + b^3}{a - 3b}} \propto 2 . \; z - a \propto -a + \sqrt{aa + \frac{4b^3}{a - 3b}} \propto 1 . \end{array}\right.$$

XLIII QUESTION.

PREMIER CAS.

86. *Connoissant la somme des extrêmes d'une progression géométrique & de quatre termes, & le produit des mêmes extrêmes, ou des deux moyens; pour trouver chaque terme.*

Ayant nommé $2a$ la somme des extrêmes, & leur différence $2y$, & b leur plan ou celuy des deux termes moyens, & x le plus grand des moyens; le plus grand des extrêmes sera $a + y$, le moindre $a - y$, & leur plan $b \propto aa - yy$. Et $yy \propto aa - b$. Ou $y \propto \sqrt{aa - b}$. Et la progression des quatre termes sera $\div\, a + y . x . \frac{xx}{a + y} . a - y$. Ou $\div\, a + \sqrt{aa - b} . x . \frac{xx}{a + \sqrt{aa - b}} . a - \sqrt{aa - b}$. Et prenant d'une part le produit des extrêmes de cette progression, & de l'autre le produit des moyens; on trouvera l'égalité $b \propto \frac{x^3}{a + \sqrt{aa - b}}$. Et multipliant de part & d'autre par $a + \sqrt{aa - b}$; on trouvera cette autre égalité $ab + b\sqrt{aa - b} \propto x^3$. Et $x \propto \sqrt{C.\, ab + b\sqrt{aa - b}}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} \div\, a + y . x . \frac{xx}{a + y} . a - y . \\ \div\, \frac{9}{2} + y . x . \frac{2xx}{9 + 2y} . \frac{9}{2} - y . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - yy \propto b . \\ \frac{81}{4} - yy \propto 8 . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a + y \propto a + \sqrt{aa - b} \propto 8 . \\ x \propto \sqrt{C.\, ab + b\sqrt{aa - b}} \propto 4 . \\ \frac{xx}{a + y} \propto 2 . \; 4^c\; a - y \propto a - \sqrt{aa - b} \propto 1 . \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

87. *ET si on connoît la différence des extrêmes, & leur plan; pour trouver chacun des quatre termes de la progression.*

Ayant nommé $2z$ la somme des extrêmes, & leur différence $2a$, & leur plan b, & x le plus grand des deux moyens; le plus grand des extrêmes sera $z + a$, le moindre $z - a$, & leur plan $zz - aa \propto b$. Et $zz \propto aa + b$. Et la progression sera $\div\div\ a + \sqrt{aa + b}.\ x.\ \frac{xx}{a + \sqrt{aa + b}}.\ -a + \sqrt{aa + b}.$ Et les produits, l'un des extrêmes, & l'autre des moyens, fourniront l'égalité $b \propto \frac{x^3}{a + \sqrt{aa + b}}$. D'où l'on tirera celle-ci $ab + b\sqrt{aa + b} \propto x^3$. Et $x \propto \sqrt{C.\, ab + b\sqrt{aa + b}}$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \textit{Suppositions.} & \textit{Résolution générale.} \\
\left\{\begin{array}{l} \div\div\ z + a.\ x.\ \frac{xx}{z + a}.\ z - a. \\ \div\div\ z + \frac{7}{2}.\ x.\ \frac{2xx}{2z + 7}.\ z - \frac{7}{2}. \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} zz - aa \propto b. \\ zz - \frac{49}{4} \propto 8. \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} z + a \propto a + \sqrt{aa + b} \propto 8. \\ x \propto \sqrt{C.\, ab + b\sqrt{aa + b}} \propto 4. \\ \frac{xx}{z + a} \propto 2.\ z - a \propto -a + \sqrt{aa + b} \propto 1. \end{array}\right.
\end{array}
$$

DES TRIANGLES RECTANGLES.

DEFINITIONS.

88. SI trois grandeurs a, b, c, sont telles que le quarré aa de la plus grande a soit égal aux deux quarrez ensemble bb & cc des deux autres; on dit que la moitié $\frac{1}{2}bc$ du plan bc des deux moindres b & c est un triangle rectangle. Et les trois grandeurs a, b, c, sont prises pour les trois côtez de ce même triangle. Et le plus grand côté a est nommé son *hypotenuse* ou *sa soûtendante*, & les deux moindres b & c en sont nommez indifféremment, l'un *la base*, & l'autre *le perpendicule*. Les raisons de ces diverses définitions ou dénominations sont tirées de la Géométrie. Mais il suffit pour ce lieu de concevoir d'une maniére générale des grandeurs, qui ayent les propriétez que l'on vient de marquer, & de lier à leurs idées les noms qui les doivent exprimer, & qu'on expose ici.

$$
\left\{\begin{array}{l} \textit{Supposition.} \\ aa \propto bb + cc. \\ 25 \propto 16 + 9. \end{array}\right.
\left\{\begin{array}{l} \textit{Triangle} \\ \textit{rectangle.} \\ \frac{1}{2}bc \propto 6. \end{array}\right.
\left\{\begin{array}{lll} \textit{Côtez du Triangle rectangle.} & & \\ \textit{Soûtendante.} & \textit{Base.} & \textit{Perpendicule.} \\ a \propto 5. & b \propto 4. & c \propto 3. \end{array}\right.
$$

XLIV QUESTION.

PREMIER CAS.

89. *COnnoissant la soûtendante d'un triangle rectangle, & l'excez dont la base surpasse le perpendicule; pour trouver la base & le perpendicule.*

Ayant nommé la soûtendante a, & b l'excez dont la base surpasse le perpendicule, & le perpendicule y; la base est $y + a$. Et le quarré de la soûtendante étant égal aux deux quarrez ensemble de la base & du perpendicule; on formera l'égalité $aa \propto 2yy + 2by + bb$. Et par transposition $2yy + 2by \propto aa - bb$. Et $yy + by \propto \frac{aa - bb}{2}$. Et ajoûtant de-part & d'autre $\frac{1}{4}bb$, on aura $yy + by + \frac{1}{4}bb \propto \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}bb$. Et les racines quarrées des deux membres formeront l'égalité $y + \frac{1}{2}b \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}bb}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} aa \propto yy + 2by + bb + yy. \\ 169 \propto yy + 14y + 49 + yy. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y + b \propto \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}.\quad y \propto -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}. \\ y + 7 \propto \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{289} \propto 12.\quad y \propto -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{289} \propto 5. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

90. *ET connoissant la soûtendante, & la somme des deux autres côtez; pour trouver l'un & l'autre.*

Ayant nommé la soûtendante a, & b la somme des deux côtez qui restent, & le perpendicule y; la base est $b - y$, & le quarré aa étant égal aux deux yy & $bb - 2by + yy$. On aura l'égalité $2yy - 2by \propto aa - bb$. Et $yy - by \propto \frac{aa - bb}{2}$. Et $yy - by + \frac{1}{4}bb \propto \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}bb$. Et $y - \frac{1}{2}b \propto \frac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} aa \propto yy + bb - 2by + yy. \\ 169 \propto yy + 289 - 34y + yy. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}.\quad b - y \propto \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}. \\ y \propto \frac{17}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{49} \propto 12.\quad 17 - y \propto \frac{17}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{49} \propto 5. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

91. *ET connoissant la base, & la somme de la soûtendante & du perpendicule; pour trouver l'un & l'autre de ces deux côtez.*

Ayant nommé la base b, & la soûtendante z, & a la somme de la soûtendante & du perpendicule; le perpendicule est $a - z$. Et les quarrez $aa - 2az + zz$ & bb sont égaux ensemble au seul quarré zz. Et par transposition $aa + bb \propto 2az$. Et $z \propto \frac{aa + bb}{2a}$. &c.

Suppositions. *Résolution générale.*

$$\left\{\begin{array}{l} zz \propto bb + aa - 2az + zz. \\ zz \propto 144 + 324 - 36z + zz. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{Soûtendante}\ z \propto \frac{aa + bb}{2a}.\quad \textit{Perpendicule}\ a - z \propto \frac{aa - bb}{2a}. \\ z \propto 13.\quad 18 - z \propto 5. \end{array}\right.$$

QUATRIEME

Pour la page 80[e] de la 1[re] partie. Que tout déborde hors du Livre, & regarde la page 81[e].

PREMIERE TABLE.

Pour les petites multiplications & divisions.

A									B
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
C	9	18	27	36	45	54	63	72	81

SECONDE TABLE.

Pour la composition des Puissances.

1											
$1a$	$1b$										*Puissance 1re ou lineaire*
$1aa$	$2ab$	$1bb$									*Puissance 2e ou plane*
$1a^3$	$3aab$	$3abb$	$1b^3$								*Puissance 3e ou solide*
$1a^4$	$4a^3b$	$6aabb$	$4ab^3$	$1b^4$							*4e Puissance*
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10aab^3$	$5ab^4$	$1b^5$						*5e Puissance*
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4bb$	$20a^3b^3$	$15aab^4$	$6ab^5$	$1b^6$					*6e Puissance*
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5bb$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21aab^5$	$7ab^6$	$1b^7$				*7e Puissance*
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6bb$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28aab^6$	$8ab^7$	$1b^8$			*8e Puissance*
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7bb$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36aab^7$	$9ab^8$	$1b^9$		*9e Puissance*
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8bb$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45aab^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$	*10e Puissance*

TROISIEME TABLE.

Pour les nombres des divers ordres.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

QUATRIEME TABLE.

Pour les puissances des neuf premiers nombres.

Côtez.	Quarrez.	Cubes.	4es Puissances.	5es Puissances.	7es Puissances.
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	128
3	9	27	81	243	2187
4	16	64	256	1024	16384
5	25	125	625	3125	78125
6	36	216	1296	7776	279936
7	49	343	2401	16807	823543
8	64	512	4096	32768	2097152
9	81	729	6561	59049	4782969

CINQUIEME TABLE.

Pour la résolution des Puissances.

$1aa$	$2a$	$1b$								*2e Puissance*
$1a^3$	$3aa$	$3ab$	$1bb$							*3e Puissance*
$1a^4$	$4a^3$	$6aab$	$4abb$	$1b^3$						*4e Puissance*
$1a^5$	$5a^4$	$10a^3b$	$10aabb$	$5ab^3$	$1b^4$					*5e Puissance*
$1a^6$	$6a^5$	$15a^4b$	$20a^3bb$	$15aab^3$	$6ab^4$	$1b^5$				*6e Puissance*
$1a^7$	$7a^6$	$21a^5b$	$35a^4bb$	$35a^3b^3$	$21aab^4$	$7ab^5$	$1b^6$			*7e Puissance*
$1a^8$	$8a^7$	$28a^6b$	$56a^5bb$	$70a^4b^3$	$56a^3b^4$	$28aab^5$	$8ab^6$	$1b^7$		*8e Puissance*
$1a^9$	$9a^8$	$36a^7b$	$84a^6bb$	$126a^5b^3$	$126a^4b^4$	$84a^3b^5$	$36aab^6$	$9ab^7$	$1b^8$	*9e Puissance*
$1a^{10}$	$10a^9$	$45a^8b$	$120a^7bb$	$210a^6b^3$	$252a^5b^4$	$210a^4b^5$	$120a^3b^6$	$45aab^7$	$10ab^8$	$1b^9$ *10e Puissance*

QUATRIEME CAS.

92. *ET connoissant la base, & l'excez dont la soûtendante surpasse le perpendicule; pour trouver l'un & l'autre de ces deux côtez.*

Ayant nommé la soûtendante z, & la base b, & a la différence de la soûtendante & du perpendicule; le perpendicule est $z - a$. Et l'égalité est $zz \propto bb + zz - 2az + aa$. Ou $2az \propto bb + aa$. Et $z \propto \frac{bb + aa}{2a}$.

Suppositions.		*Résolution générale.*		
$zz \propto bb + zz - 2az + aa.$	*Soûtendante.*	$z \propto \frac{bb + aa}{2a}.$	*Perpendicule.*	$z - a \propto \frac{bb - aa}{2a}.$
$zz \propto 144 + zz - 16z + 64.$		$z \propto 13.$		$z - 8 \propto 5.$

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE TROISIEME.

DE L'ANALYSE SIMPLE ET INDETERMINE'E.

DEFINITION.

JE nomme *Analyse indéterminée*, celle où les queſtions peuvent recevoir une infinité de réſolutions différentes; & *Analyſe ſimple*, celle où les inconnuës peuvent être abbaiſſées juſques au linéaire par les ſeules régles preſcrites dans le premier Livre.

I QUESTION ET PRINCIPE I.

1. *POur trouver deux grandeurs commenſurables, & telles que leur ſomme & celle des quarrez ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.*

Si a & b ſont les grandeurs connuës, & qu'on prenne z pour la premiére inconnuë, & zy pour la ſeconde, afin qu'une même inconnuë z multipliant la ſomme des deux & celle des quarrez, on puiſſe facilement la réduire au linéaire; la proportion ſera $z + zy.\ zz + zzyy :: a.\ b.$ Et les produits, l'un des extrêmes & l'autre des moyens, formeront l'égalité $bz + bzy \propto azz + azzyy$, laquelle étant diviſée par $az + azyy$, donnera une valeur $z \propto \frac{b + by}{a + ayy}$. Et les ſuppoſitions étant toutes remplies, la résolution sera infinie, parce que la grandeur y est arbitraire ou indéterminée.

Suppositions.	*Résolution générale.*
$z + zy.\ zz + zzyy :: a.\ b.$	y *arbitraire.* 1^{ere} $z \propto \frac{b + by}{a + ayy}$. 2^{e} $zy \propto \frac{by + byy}{a + ayy}$.
$z + zy.\ zz + zzyy :: 1.\ 10.$	$y \propto 2.\ z \propto 6.\ zy \propto 12.\ \frac{6 + 12}{36 + 144} \propto \frac{1}{10}$.

Autre exemple $\{ y \propto 3.\ z \propto 4.\ zy \propto 12.\ \frac{4 + 12}{16 + 144} \propto \frac{1}{10}$.

SECOND CAS.

2. *Pour trouver deux grandeurs commensurables, & telles que leur somme & la différence des quarrez ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.*

Ayant pris a & b pour les grandeurs connuës, & z pour la moindre des deux inconnuës, & zy pour la grande; on aura la proportion $z + zy.\ zzyy - zz :: a.\ b.$ Et on en tirera l'égalité $bz + bzy \propto azzyy - azz.$ Et $z \propto \frac{b + by}{ayy - a}$. &c. La résolution est indéterminée. On prendra pour y telle grandeur qu'on voudra, pourvû qu'elle surpasse l'unité.

Suppositions.	*Résolution infinie.*
$z + zy.\ zzyy - zz :: a.\ b.$	y *arbitraire.* 1^{ere} $z \propto \frac{b + by}{ayy - a}$. 2^{e} $zy \propto \frac{by + byy}{ayy - a}$.
$z + zy.\ zzyy - zz :: 1.\ 6.$	$y \propto 2.\ z \propto 6.\ zy \propto 12.\ \frac{6 + 12}{144 - 36} \propto \frac{1}{6}$.

Autre exemple. $\{ y \propto 3.\ z \propto 3.\ zy \propto 9.\ \frac{3 + 9}{81 - 9} \propto \frac{1}{6}$.

TROISIEME CAS.

3. *Pour trouver deux grandeurs, dont la différence & celle des quarrez ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.*

Ayant dénommé les grandeurs comme auparavant; la proportion sera $zy - 1z.\ zzyy - zz :: a.\ b.$ Et l'égalité $bzy - bz \propto azzyy - azz.$ Et $z \propto \frac{by - b}{ayy - a}$. &c. Et la résolution est encore indéterminée.

Suppositions.	*Résolution infinie.*
$zy - 1z.\ zzyy - zz :: a.\ b.$	y *arbitraire.* 1^{ere} $z \propto \frac{by - b}{ayy - a}$. 2^{e} $zy \propto \frac{byy - by}{ayy - a}$.
$zy - 1z.\ zzyy - zz :: 1.\ 18.$	$y \propto 2.\ z \propto 6.\ zy \propto 12.\ \frac{12 - 6}{144 - 36} \propto \frac{1}{18}$.

Autre exemple. $\{ y \propto 5.\ z \propto 3.\ zy \propto 15.\ \frac{15 - 3}{225 - 9} \propto \frac{1}{18}$.

QUATRIEME CAS.

4. *ET si la différence des grandeurs & la somme des quarrez ont un même rapport que les grandeurs connuës.*

On aura la proportion $zy - 1z. zzyy + zz :: a. b.$ D'où l'on tirera l'égalité $bzy - bz \propto azzyy + azz$. Et $z \propto \frac{by - b}{ayy + a}$. &c. Et la résolution sera indéterminée. Mais l'arbitraire y surpassera l'unité.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\left\{\begin{array}{l} zy - 1z.\ zzyy + zz :: a.\ b. \\ zy - 1z.\ zzyy + zz :: 1.\ 30. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \text{ arbitraire. } 1^{ere}\ z \propto \frac{by - b}{ayy + a}.\ 2^{e}\ zy \propto \frac{byy - by}{ayy + a}. \\ y \propto 2.\ z \propto 6.\ zy \propto 12.\ \frac{12 - 6}{144 + 36} \propto \frac{1}{30}. \end{array}\right.$$

Autre exemple. $\{ y \propto 3.\ z \propto 6.\ zy \propto 18.\ \frac{18 - 6}{324 + 36} \propto \frac{1}{30}.$

II QUESTION.

PREMIER CAS.

5. *POur trouver deux grandeurs commensurables, dont la somme & le plan ayent un même rapport que deux nombres connus.*

Ayant pris a & b pour les nombres connus, & z pour le premier inconnu, & y pour le second; leur plan est zy. Et la proportion $z + y. zy :: a. b.$ fournit l'égalité $bz + by \propto azy$. Et $azy - bz \propto by$. Et $z \propto \frac{by}{ay - b}$. Et la question est indéterminée. Mais ay surpasse b. Et divisant par a de part & d'autre; l'arbitraire y surpasse $\frac{b}{a}$.

$$\textit{Suppositions.}\left\{\begin{array}{l} z + y.\ zy :: a.\ b. \\ z + y.\ zy :: 1.\ 6. \end{array}\right. \textit{Résolution infinie.}\left\{\begin{array}{l} y \text{ arbitraire. } z \propto \frac{by}{ay - b}. \\ y \propto 9.\ z \propto 18.\ \frac{9 + 18}{162} \propto \frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Autres exemples. $\{ y \propto 8.\ z \propto 24.\ \frac{8 + 24}{192} \propto \frac{1}{6}.\ (y \propto 10.\ z \propto 15.\ \frac{10 + 15}{150} \propto \frac{1}{6}.$

SECOND CAS.

6. *ET si la différence des grandeurs & leur plan ont un même rapport que les nombres connûs.*

Ayant pris a & b comme auparavant pour les nombres connus, & z pour le plus grand des deux inconnus, & y pour le moindre; la proportion sera $z - y. zy :: a. b.$ Et on en tirera l'égalité $bz - by \propto azy$. Ou $bz - azy \propto by$. Et $z \propto \frac{by}{b - ay}$. Et b surpassera le produit ay. Ou divisant par a de part & d'autre; l'exposant $\frac{b}{a}$ surpassera l'autre exposant ou l'arbitraire y.

Suppoſition. $\begin{cases} z - y \,.\, zy :: a \,.\, b. \\ z - y \,.\, zy :: 1 \,.\, 18. \end{cases}$ *Réſolution infinie.* $\begin{cases} y \text{ arbitraire. } z \propto \dfrac{by}{b - ay}. \\ y \propto 9 \,.\, z \propto 18 \,.\, \dfrac{18 - 9}{162} \propto \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

Autres éxemples. $\{ y \propto 6 \,.\, z \propto 9 \,.\, \dfrac{9 - 6}{54} \propto \dfrac{1}{18} (y \propto 15 \,.\, z \propto 90 \,.\, \dfrac{90 - 15}{1350} \propto \dfrac{1}{18}.$

III QUESTION ET PRINCIPE II.

7. ☞ *POur coupper un quarré qui eſt déterminé, en deux quarrez parfaits.*

Ayant nommé a le côté du quarré connu, & z le côté du premier inconnu qu'on cherche, & x le côté du ſecond; la ſuppoſition fournira l'égalité $aa \propto zz + xx$. Et chacun des côtez z & x étant moindre que le côté a; ſi on prend $a - zy$ ou $zy - a$ pour x, afin de réduire aiſément au linéaire les inconnuës de l'égalité; on aura l'égalité $aa \propto zz + xx \propto zz + aa + zzyy - 2azy$. Et par tranſpoſition $2azy \propto zz + zzyy$. Ou $2ay \propto z + zyy$. Et $z \propto \dfrac{2ay}{1 + yy}$. Et la grandeur y eſt arbitraire; mais il eſt à propos qu'elle ſurpaſſe l'unité.

Suppoſition. *Réſolution infinie.*

$\begin{cases} zz + xx \propto aa \propto zz + aa - 2azy + zzyy. \\ zz + xx \propto 100 \propto zz + 100 - 20zy + zzyy. \end{cases} \begin{cases} y \text{ arbitraire. } z \propto \dfrac{2ay}{yy + 1} \,.\, x \propto \dfrac{ayy - 1a}{yy + 1}. \\ y \propto 2 \,.\, z \propto 8 \,.\, x \propto 6 \,.\, 64 + 36 \propto 100. \end{cases}$

IV QUESTION ET PRINCIPE III.

8. ☞ *ET ſi on veut pour la réſolution précédente, que l'un des côtez des nouveaux quarrez ſoit reſſerré entre certaines bornes que l'on détermine.*

Ayant nommé les limites connuës c & d, & v une grandeur arbitraire moindre que c, & plus grande que d, & ſuppoſé cette grandeur v égale au côté z que l'on a découvert dans la réſolution précédente; on aura $z \propto v \propto \dfrac{2ay}{yy + 1}$. Et les deux membres étant multipliez par $yy + 1$, on trouve cette égalité $vyy + 1v \propto 2ay$. Et diviſant par v de part & d'autre, on aura $yy + 1 \propto \dfrac{2ay}{v}$. Ou $yy - \dfrac{2ay}{a} + 1 \propto 0$. Et ajoûtant $\dfrac{aa}{vv}$, & ôtant 1 de part & d'autre, on aura $yy - \dfrac{2ay}{v} + \dfrac{aa}{vv} \propto \dfrac{aa}{vv} - 1$. Et les racines des deux membres fourniront l'égalité $y - \dfrac{a}{v} \propto \sqrt{\dfrac{aa}{vv} - 1}$. Et par tranſpoſition $y \propto \dfrac{a + \sqrt{aa - vv}}{v}$. Et ſi on met pour v dans cette égalité chacune des limites c & d; on trouvera que la grandeur arbitraire y doit avoir ſes juſtes limites entre $\dfrac{a + \sqrt{aa - cc}}{c}$ & $\dfrac{a + \sqrt{aa - dd}}{d}$, afin que le côté z ſoit resserré entre les limites c & d que l'on a prescrites. Et la résolution doit être infinie, puisque la grandeur y est toûjours arbitraire.

Résolution infinie.

$\{$ *arbitraire* y *entre* $\frac{a+\sqrt{aa-cc}}{c}$ & $\frac{a+\sqrt{aa-dd}}{d}$. $z \propto \frac{2ay}{yy+1}$. $x \propto \frac{ayy-1a}{yy+1}$.

Exemple.

$\{ aa \propto 9$. $c \propto \sqrt{3}$. $d \propto \frac{1}{2}\sqrt{10}$. y *entre* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ & $\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{65}}{5}$. y *presqu'entre* $3\frac{4}{25}$ & $3\frac{7}{10}$.

$\{$ *Soit* $y \propto \frac{7}{2}$. *Donc* $z \propto \frac{84}{53}$. $x \propto \frac{135}{53}$. $zz + xx \propto aa \propto \frac{25281}{2809} \propto 9$.

I COROLLAIRE ET QUESTION V.

9. *ET pour former tres-facilement des triangles rectangles, ou pour trouver par une voye tres-courte tant de quarrez entiers & parfaits qu'on voudra, lesquels étant pris deux à deux formeront par leurs sommes d'autres quarrez parfaits.*

Ayant pris les côtez précédens z & x, ou leurs valeurs $\frac{2ay}{yy+1}$ & $\frac{ayy-1a}{yy+1}$; si l'un & l'autre est multiplié par $\frac{yy+1}{a}$, les produits $2y$ & $yy-1$ seront les côtez de deux quarrez $4yy$ & $y^4-2yy+1$ égaux ensemble au seul quarré $y^4+2yy+1$ du nombre $yy+1$. Et écrivant en fraction les deux côtez $yy-1$ & $2y$ en cette sorte $\frac{yy-1}{2y}$, si on prend successivement & par ordre pour y les nombres impairs & successifs 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c, de la progression arithmétique des nombres impairs, où la différence est 2; on aura la progression arithmétique qu'on expose ici la première. Et on trouvera la seconde, en prenant successivement pour y les nombres successifs 4, 6, 8, 10, 12, 14, &c, de la progression arithmétique des nombres pairs, dont la différence est 2. Et on trouvera la 3^e^, en prenant successivement pour y les nombres de la progression arithmétique $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c, où la différence est 2. Et on trouvera la 4^e^, en prenant encore successivement pour y chacun des nombres de la progression arithmétique $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{17}{2}$, &c, où la différence est 2. Et on en trouvera de la même sorte tant d'autres qu'on voudra.

Progressions arithmétiques.

1^ere^.	$1\frac{1}{3}$.	$2\frac{2}{5}$.	$3\frac{3}{7}$.	$4\frac{4}{9}$.	$5\frac{5}{11}$.	$6\frac{6}{13}$.	$7\frac{7}{15}$.	$8\frac{8}{17}$.	$9\frac{9}{19}$.	$10\frac{10}{21}$.	$11\frac{11}{23}$.	$12\frac{12}{25}$.	$13\frac{13}{27}$.	&c.
2^e^.	$1\frac{7}{8}$.	$2\frac{11}{12}$.	$3\frac{15}{16}$.	$4\frac{19}{20}$.	$5\frac{23}{24}$.	$6\frac{27}{28}$.	$7\frac{31}{32}$.	$8\frac{35}{36}$.	$9\frac{39}{40}$.	$10\frac{43}{44}$.	$11\frac{47}{48}$.	&c.		
3^e^.	$1\frac{17}{28}$.	$2\frac{29}{44}$.	$3\frac{41}{60}$.	$4\frac{53}{76}$.	$5\frac{65}{92}$.	$6\frac{77}{108}$.	$7\frac{89}{124}$.	$8\frac{111}{140}$.	$9\frac{123}{156}$.	$10\frac{135}{172}$.	&c.			
4^e^.	$1\frac{1}{20}$.	$2\frac{5}{36}$.	$3\frac{9}{52}$.	$4\frac{13}{68}$.	$5\frac{17}{84}$.	$6\frac{21}{100}$.	$7\frac{25}{116}$.	$8\frac{29}{132}$.	$9\frac{33}{148}$.	$10\frac{37}{164}$.	&c.			

OBSERVATION CURIEUSE.

Il y a dans chacune de ces progreſſions trois progreſſions arithmétiques; la premiére des nombres entiers, la ſeconde des numérateurs que l'on trouve aux fractions, & la troiſiéme de leurs dénominateurs. De ſorte qu'il ſuffit d'avoir découvert les deux ou trois premiers termes pour les continuer enſuitte ſans peine. Et pour trouver par le moyen de ces progreſſions deux quarrez égaux à un ſeul; on réduira le terme entier comme $2\frac{11}{12}$ à une fraction $\frac{35}{12}$ qui luy ſoit égale. Et prenant alors les quarrez 1225 & 144 des termes 35 & 12; leur ſomme 1369 ſera un quarré parfait, dont le côté 37 ſera la valeur du grand côté $yy + 1$.

Modéle.	*Perpendicule.*	*Baſe.*	*Soûtendante.*	*Quarrez.*
$\frac{yy-1}{2y} \propto 2\frac{11}{12} \propto \frac{35}{12}.$	$yy - 1 \propto 35.$	$2y \propto 12.$	$yy + 1 \propto 37.$	$1225 + 144 \propto 1369.$

II COROLLAIRE.

10. ET ſi on met un quarré arbitraire vv pour 1 dans chacun des côtez $yy - 1$ & $yy + 1$, on aura deux nouveaux côtez $yy - vv$ & $yy + vv$ des deux quarrez $y^4 - 2yyvv + v^4$ & $y^4 + 2yyvv + v^4$. Et le quarré du plus grand $yy + vv$ égalera luy ſeul le quarré du moindre $yy - vv$ plus le quarré $4yyvv$ d'un autre côté $2yv$. De ſorte que les côtez $yy + vv$, $yy - vv$, $2yv$ ſeront les trois côtez d'un triangle rectangle. Et le plan $y^3v - yv^3$ du perpendicule $yy - vv$ par la moitié yv de la baſe $2yv$ ſera ce qu'on appelle *l'aire* ou *l'eſpace* ou *le plan du triangle rectangle*, ou ſimplement *le triangle rectangle*. Comme y & v ſont arbitraires; ce triangle rectangle exprime en general tel triangle rectangle qu'on voudra propoſer.

Réſolution ou formule infinie.

Soûtendante	*Perpendicule*	*Baſe*	*Aire*
$yy + vv.$	$yy - vv.$	$2yv.$	$y^3v - yv^3.$
$64 + 36.$	$64 - 36.$	$96.$	$1344.$

QUESTION VI ET PRINCIPE IV.

11. *POur diviſer la ſomme de deux quarrez parfaits en deux autres parfaits.*

Ayant pris a pour le côté du plus grand des quarrez connus, & b pour le côté du moindre; le côté d'un des deux inconnus ſera moindre néceſſairement que le côté a, & l'autre par conſéquent ſurpaſſera le petit côté b. Nommant donc $a - z$ celuy des côtez inconnus, qui vaut moins que le côté connu a; & nommant enſuitte $yz - b$ l'autre côté qui doit ſurpaſſer b; les quarrez de ces deux côtez ſeront $aa - 2az + zz$ & $yyzz - 2byz + bb$. Et leur ſomme égalera la ſomme connuë $aa + bb$. Ce qui donnera par tranſpoſition l'égalité $zz + yyzz \propto 2az + 2byz$. Ou

$z + yyz \infty 2a + 2by$. Et $z \infty \frac{2a+2by}{1+yy}$. &c. Comme la grandeur y eſt arbitraire; la queſtion reçoit une infinité de réſolutions différentes.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$$\left\{\begin{array}{l} zz - 2az + aa + yyzz - 2byz + bb \infty aa + bb. \\ zz - 6z + 9 + yyzz - 4yz + 4 \infty 9 + 4. \end{array}\right\} \; y \text{ arbitraire.} \quad \begin{array}{l} z \infty \frac{2a+2by}{yy+1}. \\ z \infty \frac{6+4y}{yy+1}. \end{array}$$

$$\{ \text{1}^{\text{er}} \textit{ côté } a - z \infty \frac{ayy - 2by - a}{yy+1}. \quad \{ \text{2}^{\text{d}} \textit{ côté } yz - b \infty \frac{ayy + byy - b}{yy+1}.$$

$$\textit{Exemples.} \left\{\begin{array}{l} y \infty 2.\; z \infty \frac{14}{5}.\; \text{1}^{\text{er}} \textit{ côté } a - z \infty \frac{1}{5}.\; \text{2}^{\text{d}}\; yz - b \infty \frac{18}{5}.\; \textit{Quarrez } \frac{1}{25} + \frac{324}{25} \infty 13. \\ y \infty 3.\; z \infty \frac{9}{5}.\; \text{1}^{\text{er}} \textit{ côté } a - z \infty \frac{6}{5}.\; \text{2}^{\text{d}}\; yz - b \infty \frac{17}{5}.\; \textit{Quarrez } \frac{36}{25} + \frac{289}{25} \infty 13. \end{array}\right.$$

COROLLAIRE ET QUESTION VII.

PREMIER CAS.

12. *ET ſi on veut pour la reſolution précédente que l'un des côtez des nouveaux quarrez ſoit reſſerré entre certaines bornes.*

Ayant pris c pour la plus grande de ces juſtes limites, & d pour la moindre, & nommant x une grandeur arbitraire moindre que c, & plus grande que d; le côté a du plus grand des quarrez, dont la ſomme eſt connuë, ſurpaſſera chacune des limites c & d, ou ſera moindre que chacune, ou ſera moindre que la plus grande c, & ſurpaſſera la plus petite d. Ce qui forme trois cas, qu'il eſt à propos d'expliquer.

Et pour le premier cas, où a ſurpaſſe c, & par conſéquent d; ayant pris l'arbitraire x pour le côté $a - z$, on aura $z \infty a - x$. Et mettant pour z ſa valeur découverte $\frac{2a+2by}{yy+1}$; l'égalité ſera $\frac{2a+2by}{yy+1} \infty a - x$. Et chaque membre étant multiplié par $yy + 1$, l'égalité nouvelle ſera $2a + 2by \infty ayy - xyy + a - x$. Ou $ayy - xyy - 2by \infty a + x$. Et tout étant diviſé par $a - x$, pour avoir le quarré yy entiérement dégagé, on trouvera $yy - \frac{2by}{a-x} \infty \frac{a+x}{a-x}$. Et aprés avoir ajoûté de part &

b. 15. 1. d'autre le[b] quarré $\frac{bbyy}{aa - 2ax + xx}$ de la moitié $\frac{b}{a-x}$ connuë dans $\frac{2b}{a-x}$, qui multiplie l'inconnuë y; on aura l'égalité $yy - \frac{2by}{a-x} + \frac{bb}{aa - 2ax + xx} \infty \frac{aa - xx + bb}{aa - 2ax + xx}$. Et les racines quarrées de ſes deux membres formeront encore l'égalité $y - \frac{b}{a-x} \infty \frac{1}{a-x} \sqrt{aa - xx + bb}$. Et par tranſpoſition $y \infty \frac{b + \sqrt{aa - xx + bb}}{a-x}$. Et ſi on met pour x dans cette égalité chacune des limites c & d; on trouvera que les juſtes limites de la grandeur

deur arbitraire y ſont entre $\frac{b + \sqrt{aa - cc + bb}}{a - c}$ & $\frac{b + \sqrt{aa - dd + bb}}{a - d}$.

Mais afin que le numérateur $ayy - 2by - a$ ſoit poſitif ; la grandeur ayy ſurpaſſe $2by + a$. Et diviſant par a de part & d'autre, le quarré yy ſurpaſſe $\frac{2by + a}{a}$. Et $yy - \frac{2by}{a}$ ſurpaſſe par conſéquent $\frac{a}{a}$. Et ajoûtant $\frac{bb}{aa}$ de part & d'autre ; le membre $yy - \frac{2by}{a} + \frac{bb}{aa}$ ſurpaſſe l'autre membre $\frac{aa + bb}{aa}$. Et la racine quarrée $y - \frac{b}{a}$ du premier des deux membres ſurpaſſe la quarrée $\sqrt{\frac{aa + bb}{aa}}$ du ſecond. Et par tranſpoſition l'arbitraire y ſurpaſſe $\frac{b + \sqrt{aa + bb}}{a}$. Et par un raiſonnement ſemblable, la même y ſurpaſſe $\frac{-a + \sqrt{aa + bb}}{b}$, en ſuppoſant que le numérateur $2ay + byy - b$ ſoit encore poſitif.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$$\begin{cases} xx + tt \propto aa + bb. \\ xx + tt \propto 9 + 4. \end{cases} \begin{cases} x \text{ entre } c \text{ \& } d \\ x \text{ entre } \frac{29}{10} \text{ \& } \frac{1}{10}. \end{cases} \begin{cases} y \text{ entre } \frac{b + \sqrt{aa - cc + bb}}{a - c} \text{ \& } \frac{b + \sqrt{aa - dd + bb}}{a - d}. \\ y \text{ entre } 20 + \sqrt{459} \text{ \& } \frac{20 + \sqrt{1299}}{29}. \end{cases}$$

$$\{ z \propto \frac{2a + 2by}{yy + 1}. \ \{ 1^{er} \text{ côté } x \propto a - z \propto \frac{ayy - 2by - a}{yy + 1}. \ 2^{d} \ t \propto zy - b \propto \frac{2ay + byy - b}{yy + 1}.$$

Exemple. $\{ y \propto 3.\ z \propto \frac{9}{5}.\ 1^{er}$ *côté* $x \propto \frac{6}{5}.\ 2^{d}$ *côté* $t \propto \frac{17}{5}.$ *Quarrez* $\frac{36}{25} + \frac{289}{25} \propto 13.$

SECOND CAS.

13. ET ſi chacune des limites c & d ſurpaſſe le côté a du plus grand des quarrez connus aa & bb ; on égalera l'arbitraire x au côté $zy - b$. Et on aura par tranſpoſition $zy \propto x + b$. Et $z \propto \frac{x + b}{y} \propto \frac{2a + 2by}{yy + 1}$. Et multipliant de part & d'autre par $y^3 + 1y$, pour ôter les fractions ; on aura l'égalité $xyy + byy + x + b \propto 2ay + 2byy$. Ou $xyy - byy - 2ay \propto -b - x$. Et diviſant chaque membre par $x - b$, & ajoûtant enſuitte à chacun le quarré $\frac{aa}{xx - 2bx + bb}$; les racines quarrées des deux membres nouveaux que l'on aura trouvé, formeront l'égalité $y - \frac{a}{x - b} \propto \frac{1}{x - b}\sqrt{aa - xx + bb}$. Et $y \propto \frac{a + \sqrt{aa - xx + bb}}{x - b}$. Et mettant pour x dans cette égalité chacune des limites c & d ; on trouvera que les juſtes limites de l'arbitraire y ſeront entre $\frac{a + \sqrt{aa - cc + bb}}{c - b}$ & $\frac{a + \sqrt{aa - dd + bb}}{d - b}$.

Et afin que chacun des numérateurs des nouveaux côtez soit positif, la même y doit[b] surpasser chacune des grandeurs $\frac{b + \sqrt{aa + bb}}{a}$ & $\frac{-a + \sqrt{aa + bb}}{b}$.

b. 12.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\left\{\begin{array}{l} xx + tt \propto aa + bb. \\ xx + tt \propto 9 + 13. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x \text{ entre } c \ \& \ d. \\ x \text{ entre } \frac{36}{10} \ \& \ \frac{31}{10} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \text{ entre } \frac{a + \sqrt{aa - cc + bb}}{c - b} \ \& \ \frac{a + \sqrt{aa - dd + bb}}{c - b}. \\ y \text{ entre } 2 \ \& \ \frac{30 + \sqrt{339}}{11} \text{ approchant } \frac{48}{11}. \end{array}\right.$$

$$\{ z \propto \frac{2a + 2by}{yy + 1}. \ \{ 1^{er} \text{ côté } x \propto zy - b \propto \frac{2ay + byy - b}{yy + 1}. \ 2^{d} \ t \propto a - z \propto \frac{ayy - 2by - a}{yy + 1}.$$

Exemple. $\{ y \propto 3.\ z \propto \frac{9}{5}.$ 1^{er} *côté* $x \propto \frac{17}{5}$. 2^{d} *côté* $t \propto \frac{6}{5}$. *Quarrez* $\frac{289}{25} + \frac{36}{25} \propto 13$.

TROISIEME CAS.

14. ET si le côté a vaut moins que c, & surpasse d; le côté x qui doit avoir ses justes limites entre c & d, pourra surpasser a. Et ainsi on supposera que les côtez des deux nouveaux quarrez sont $a + z$ & $b - zy$. Et on trouvera comme aux résolutions précédentes une valeur $z \propto \frac{2by - 2a}{yy + a}$. Et supposant le côté x qui doit surpasser d égal au côté $b - zy$ ou à sa valeur $\frac{2ay - 2by + b}{yy + 1}$; si on multiplie l'égalité par $yy + 1$, on aura celle-ci $xyy + 1x \propto 2ay - byy + b$. Ou $xyy + byy - 2ay \propto b - x$. Et divisant de part & d'autre par $x + b$; & ajoûtant aux deux membres nouveaux un même quarré $\frac{aa}{xx + 2bx + bb}$; les racines quarrées des deux autres, qu'on aura découvert, fourniront l'égalité $y - \frac{a}{x + b} \propto \frac{1}{x + b}\sqrt{aa + bb - xx}$. Et $y \propto \frac{a + \sqrt{aa + bb - xx}}{x + b}$. Et mettant pour x dans cette égalité dans chacune des limites c & d; il faudra que l'arbitraire y ait ses limites entre $\frac{a + \sqrt{aa + bb - cc}}{b + d}$ & $\frac{a + \sqrt{aa + bb - dd}}{b + d}$, si on veut que le côté x soit le moindre des deux. Mais afin que le numérateur $2ay - byy + b$ soit positif; il sera nécessaire que l'arbitraire y soit moindre que la valeur $\frac{a + \sqrt{aa + bb}}{b}$; & qu'elle surpasse au contraire $\frac{-b + \sqrt{aa + bb}}{a}$, afin que le numérateur $ayy + 2by - a$ soit encore positif. Et si d surpasse b, le côté x égal au plus grand $a + z$, sera celuy qui résoûdra la question.

Et si on veut que le côté x soit égal au plus grand côté $a + z$, & entre les limites c & d. Puisque c surpasse x ou $a + z$; il surpasse aussi la valeur

$\frac{ayy + 2by - a}{yy + 1}$ du même côté $a + z$. Et multipliant par $yy + 1$; le produit $cyy + 1c$ ſurpaſſe l'autre $ayy + 2by - a$. Et par tranſpoſition $cyy - ayy - 2by$ ſurpaſſe $-a - c$. Et diviſant le tout par $c - a$; l'expoſant $yy - \frac{2by}{c - a}$ ſurpaſſe l'autre $\frac{-a - c}{c - a}$. Et ajoûtant de part & d'autre le quarré $\frac{bb}{cc - 2ac + aa}$; le membre $yy - \frac{2by}{c - a} + \frac{bb}{cc - 2ac + aa}$ ſurpaſſe l'autre membre $\frac{aa + bb - cc}{cc - 2ac + aa}$. Et tirant de part & d'autre les racines quarrées; la premiére $\frac{b}{c - a} - y$ ſurpaſſe la ſeconde $\frac{1}{c - a}\sqrt{aa + bb - cc}$. Et par tranſpoſition $\frac{b - \sqrt{aa + bb - cc}}{c - a}$ ſurpaſſe l'arbitraire y. Mais x ou $\frac{ayy + 2by - a}{yy + 1}$ ſurpaſſant encore d; le numérateur $ayy + 2by - a$ ſurpaſſe $dyy + 1d$. D'où il eſt aiſé de conclurre, par une voye ſemblable à celle que l'on vient de ſuivre, que l'arbitraire y ſurpaſſe $\frac{-b + \sqrt{aa + bb - dd}}{a - d}$, ſi a ſurpaſſe d; & qu'au contraire la même y eſt moindre que $\frac{b + \sqrt{aa + bb - dd}}{d - a}$, ſi d ſurpaſſe a, comme il peut ſouvent arriver. Et comme y alors peut avoir deux valeurs; elle ſurpaſſe encore $\frac{b - \sqrt{aa + bb - dd}}{d - a}$. De ſorte que pour avoir les juſtes limites, on prendra la plus grande & la moindre de toutes celles qu'on vient de découvrir. Et la queſtion ſera pleinement réſoluë.

Réſolution infinie.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} xx + tt \propto aa + bb. \\ xx + tt \propto 9 + 4. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \text{ entre } c \ \& \ d. \\ x \text{ entre } \frac{18}{5} \ \& \ \frac{1}{10} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y \text{ entre } \frac{a + \sqrt{aa + bb - cc}}{b + c} \ \& \ \frac{a + \sqrt{aa + bb - dd}}{b + d}. \\ y \text{ entre } \frac{-b + \sqrt{aa + bb - dd}}{a - d} \ \& \ \frac{b - \sqrt{aa + bb - cc}}{c - a}. \\ y \text{ entre } \frac{b - \sqrt{aa + bb - dd}}{d - a} \ \& \ \frac{b + \sqrt{aa + bb - dd}}{d - a}. \end{array}\right.$$

$$\{ z \propto \frac{2by - 2a}{yy + 1}. \ \{ \text{côté } b - zy \propto \frac{2ay - byy + b}{yy + 1}. \quad \text{côté } a + z \propto \frac{ayy + 2by - a}{yy + 1}.$$

Premier exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a + \sqrt{aa + bb - cc}}{b + c} \propto \frac{4}{7}. \ \frac{a + \sqrt{aa + bb - dd}}{b + d} \propto \frac{30 + \sqrt{1299}}{21} \text{ approchant } \frac{66}{21} \propto \frac{22}{7}. \\ y \text{ entre } \frac{4}{7} \ \& \ \frac{22}{7}. \ y \propto 2. \ z \propto \frac{2}{5}. \ 1^{er} \text{ côté } x \propto b - zy \propto \frac{6}{5}. \ 2^{d}\ t \propto \frac{17}{5}. \ \{\frac{36}{25} + \frac{289}{25} \propto 13. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{b - \sqrt{aa + bb - cc}}{c - a} \propto 3. \ \frac{-b + \sqrt{aa + bb - dd}}{a - d} \propto \frac{-20 + \sqrt{1299}}{29} \text{ approchant } \frac{17}{29}. \\ y \text{ entre } 3 \ \& \ \frac{17}{29}. \ y \propto 2. \ z \propto \frac{2}{5}. \ 1^{er} \text{ côté } x \propto a + z \propto \frac{17}{5}. \ 2^{d}\ t \propto \frac{6}{5}. \ \{\frac{289}{25} + \frac{36}{25} \propto 13. \end{array}\right.$$

Second exemple.

Suppositions. $\left\{ aa \propto 9.\ bb \propto 4.\ c \propto \frac{18}{5}.\ d \propto \frac{16}{5}. \right.\ \left\{ aa + bb \propto xx + tt.\ x \propto a + z. \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b - \sqrt{aa + bb - dd}}{d - a} \propto 10 - \sqrt{69} \text{ approchant } \frac{8}{5}.\ \frac{a + \sqrt{aa + bb - cc}}{c - a} \propto 3. \\ y \text{ entre } \frac{8}{5} \text{ \& } 3.\ y \propto 2.\ z \propto \frac{2}{5}.\ 1^{er} \text{ côté } x \propto a + z \propto \frac{17}{5}.\ 2^{d}\ t \propto \frac{6}{5}.\ \left\{ \frac{289}{25} + \frac{36}{25} \propto 13. \right. \end{array} \right.$$

VIII QUESTION.

15. *POur trouver deux quarrez parfaits, dont la différence soit une grandeur connuë.*

Ayant pris z pour côté du moindre de ces deux quarrez, & $z + y$ pour côté du plus grand, & d pour la différence connuë. L'excez dont le plus grand quarré $zz + 2zy + yy$ surpasse le moindre zz, est $2zy + yy \propto d$. Et $2zy \propto d - yy$. Ou $z \propto \frac{d - yy}{2y}$. Et l'arbitraire y vaut moins que $\sqrt{d}$.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\left\{ \begin{array}{l} zz + 2zy + yy - zz \propto d. \\ zz + 2zy + yy - zz \propto 17. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y \text{ arbitraire. grand côté } z + y \propto \frac{yy + d}{2y}.\ \text{petit } z \propto \frac{d - yy}{2y}. \\ y \propto 4.\ z + y \propto \frac{33}{8}.\ z \propto \frac{1}{8}.\ \left\{ \frac{1089 - 1}{64} \propto \frac{1088}{64} \propto 17. \right. \end{array} \right.$$

COROLLAIRE ET QUESTION IX.

16. *POur ajoûter une petite fraction quarrée à une grandeur connuë, en sorte que la somme soit un quarré parfait.*

Ayant pris d pour la grandeur connuë, & z pour le côté du petit quarré rompu, & $z + y$ pour le côté de la somme quarrée; l'égalité sera $d + zz \propto zz + 2zy + yy$. Et $d \propto 2zy + yy$. Et le reste comme auparavant. Et l'arbitraire y sera le côté d'un des plus grands quarrez qu'on trouvera dans d.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\left\{ \begin{array}{l} d + zz \propto zz + 2zy + yy. \\ 17 + zz \propto zz + 2zy + yy. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{arbitraire } y \text{ presque } \sqrt{d}.\ z \propto \frac{d - yy}{2y}.\ z + y \propto \frac{d + yy}{2y}. \\ y \propto 4.\ z \propto \frac{1}{8}.\ d + zz \propto 17\frac{1}{64}.\ \sqrt{17\frac{1}{64}} \propto \frac{33}{8} \propto z + y. \end{array} \right.$$

X QUESTION.

17. *POur trouver un quarré, duquel ayant ôté une grandeur connuë, le reste soit encore un quarré, moindre que le plan d'une grandeur connuë par le côté inconnu du quarré, & plus grand que le plan d'une autre grandeur connuë par le même côté.*

Ayant nommé z le côté inconnu du quarré, & d la grandeur connuë qu'on veut ôter du quarré zz, & a la plus grande des deux connuës qui doivent multiplier le côté inconnu z, & b la moindre des deux. Si on ôte d du quarré zz; le reste $zz - d$ est un quarré, dont le côté étant nommé $y - z$ ou $z - y$, on aura l'égalité $zz - d \propto zz - 2zy + yy$. Ou $2zy \propto d + yy$. Et $z \propto \frac{d + yy}{2y}$. Mais le quarré $zz - d$ vaut moins par la supposition que le plan az. Et par transposition $zz - az$ vaut moins que d. Et ajoûtant $\frac{1}{4}aa$. de part & d'autre, & tirant ensuitte les racines quarrées; la premiére $z - \frac{1}{2}a$ vaudra moins que la seconde $\sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$. Et z par conséquent est moindre que la grandeur $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$. Et comme on suppose au contraire que le quarré $zz - d$ surpasse le plan bz; on trouvera par un raisonnement semblable à celuy qui précéde, que le côté z surpasse $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$. Et nommant f, afin d'abbréger, la grandeur entiére $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$, & g toute la grandeur $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$; la grandeur z ou son égale $\frac{d + yy}{2y}$ vaut moins que la grandeur f, & surpasse l'autre g. Et multipliant le tout par $2y$, la grandeur $d + yy$ est moindre que $2fy$, & plus grande que $2gy$, Et par conséquent l'arbitraire y est moindre que la grandeur $f + \sqrt{ff - d}$, & surpasse l'autre $g + \sqrt{gg - d}$. &c.

Suppositions. $\begin{cases} zz - d \propto zz - 2zy + yy \\ zz - 60 \propto zz - 2zy + yy \end{cases}$ *moins que* $\begin{matrix} az \\ 8z \end{matrix}$ *& plusque* $\begin{matrix} bz. \\ 5z. \end{matrix}$

Résolution infinie.

$\{ y$ *entre* $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa + a\sqrt{\frac{1}{4}aa + d}} + \sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$ *&* $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + d}} + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$.

$\{ 1^{er}$ *côté* $z \propto \frac{d + yy}{2y}$. 2^{d} *côté* $z - y \propto \frac{d - yy}{2y}$. *Ou* $y - z \propto \frac{yy - d}{2y}$.

Exemple.

$a \propto 8. \ b \propto 5. \ d \propto 60.$ *y entre* $4 + \sqrt{76} + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{76}}$ *&* $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{265} + \frac{1}{2}\sqrt{50 + 10\sqrt{265}}$.
Ou par approximation y entre $22\frac{1}{2}$ *&* $18\frac{1}{2}$. $(y \propto 20. \ z \propto \frac{23}{2}. \ y - z \propto \frac{17}{2}.$ *&c.*

XI QUESTION.

18. *Diophante propose cette question à résoûdre. Une personne voulant acheter de deux sortes de vin, l'un du prix a par pinte, & l'autre du prix b, doit payer pour le tout un certain nombre quarré, auquel ajoûtant un nombre connu d, la somme est un nombre quarré, dont le côté est le nombre*

entier des pintes. On demande combien il y a de pintes du prix a, & combien du prix b.

Ayant nommé z la ſomme ou le nombre entier des pintes, & v le nombre des pintes du prix b; celuy des pintes du prix a eſt $z - v$, & leur prix eſt $az - av$, & le prix des autres eſt bv. Et le prix entier eſt un quarré $xx \propto az - av + bv$. Et ſi on luy ajoûte d, la ſomme $xx + d$ eſt égale au quarré zz, puiſque z en eſt le côté. Et par conſéquent $xx \propto zz - d \propto az - av + bv$. Et $av - bv \propto az + d - zz$. Et $v \propto \frac{az + d - zz}{a - b}$. Et afin que $zz - d$ ſoit un quarré; je nomme $y - z$ ou $z - y$ ſon côté. Et l'égalité eſt $zz - d \propto zz - 2yz + yy$. Ou $2yz \propto yy + d$. Et $z \propto \frac{yy + d}{2y}$. Et ſuppoſant que le prix a ſurpaſſe le prix b; la grandeur av ſurpaſſe bv, & $az + d$ ſurpaſſe $az - av + bv + d$ ou ſa valeur zz. Et z par conſéquent vaut moins que la grandeur $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$. Et au contraire $az - av$ ſurpaſſant $bz - bv$, ſi on ajoûte $bv + d$ de part & d'autre; la grandeur $az - av + bv + d$ ou ſa valeur zz ſurpaſſera $bz - bv + bv + d$ ou $bz + d$. Et z par conſéquent ſurpaſſera $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$. De ſorte que z ou ſa valeur $\frac{yy + d}{2y}$ doit avoir ſes juſtes limites entre la plus grande $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$ & la moindre $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$. Ce qui ſe rapporte entiérement à la réſolution précédente, l'arbitraire y conſervant toûjours les mêmes bornes.

Réſolution infinie.

y *entre* $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa + a\sqrt{\frac{1}{4}aa + d}} + d + \sqrt{\frac{1}{4}aa + d}$ & $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + d}} + d + \sqrt{\frac{1}{4}bb + d}$.

$z \propto \frac{yy + d}{2y}$. *Pintes du 2ᵈ prix.* $v \propto \frac{az + d - zz}{a - b}$. *Pintes du 1ᵉʳ.* $z - v \propto \frac{zz - bz - d}{a - b}$.

Exemple.

$a \propto 8$. $b \propto 5$. $d \propto 60$. y *entre* $4 + \sqrt{76} + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{76}}$ & $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{265} + \frac{1}{2}\sqrt{50 + 10\sqrt{265}}$.

y à peu prés entre $22\frac{1}{2}$ & $18\frac{1}{2}$. ($y \propto 20$. $z \propto \frac{23}{2}$. ($v \propto \frac{79}{12}$. $z - v \propto \frac{59}{12}$. &c.

XII QUESTION.

PREMIER CAS.

19. *Pour coupper en deux parties une grandeur connuë, & trouver un quarré, auquel ayant ajoûté chacune des parties, les deux ſommes ſoient chacune un quarré parfait.*

Ayant nommé $2a$ la ſomme des parties ou la grandeur connuë, & $2y$ la différence des deux mêmes parties; la plus grande eſt $a + y$, la moindre $a - y$. Et le quarré inconnu, qu'on peut nommer zz, recevant chacune des parties; les deux ſommes $zz + a + y$ & $zz + a - y$ ſont chacune un quarré par la supposition. C'est pourquoy si on prend $z + x$ pour côté du premier, & $z + v$ pour côté du second; on aura une premiére égalité $zz + a + y \propto zz + 2zx + xx$. Ou $a + y - xx \propto 2zx$. Et $z \propto \frac{a + y - xx}{2x}$. Et la seconde égalité sera $zz + a - y \propto zz + 2zv + vv$. Et $2zv \propto a - y - vv$. Et $z \propto \frac{a - y - vv}{2v} \propto \frac{a + y - xx}{2x}$. Et tout étant multiplié par $2vx$, l'égalité sera $ax - yx - vvx \propto av + vy - vxx$. Ou $ax - av + vxx - vvx \propto yx + vy$. Et $y \propto \frac{ax - av + vxx - vvx}{x + v}$. &c. Et les conditions étant toutes remplies, les grandeurs x & v sont arbitraires.

Mais il est pourtant nécessaire qu'elles soient resserrées entre certaines bornes. Car $z + x$ surpassant $z + v$; la grandeur x doit surpasser l'autre v. Et afin que z soit positive, la grandeur $a + y - xx$ doit être réelle. D'où il est clair que la grandeur $a + y$ ou sa valeur $\frac{2ax + vxx - vvx}{x + v}$ surpasse le quarré xx ou sa valeur $\frac{x^3 + vxx}{x + v}$. Et par conséquent le numérateur $2ax + vxx - vvx$ surpasse le numérateur $x^3 + vxx$. Et ôtant vxx de part & d'autre, & divisant ensuitte les deux restes par x, on trouvera que la grandeur $2a - vv$ surpasse le quarré xx. Et la somme $2a$ des parties surpassant encore leur différence $2y$, la moitié a surpasse l'autre y ou sa valeur $\frac{ax - av + vxx - vvx}{x + v}$. Et multipliant de part & d'autre par $x + v$, le premier produit $ax + av$ surpasse le second $ax - av + vxx - vvx$. Et par transposition $2av$ surpasse $vxx - vvx$. Et $2a + vx$ surpasse le quarré xx. Et par conséquent $\frac{1}{2}v + \sqrt{\frac{1}{4}vv + 2a}$ surpasse le côté x.

Suppositions. $\{ zz + a + y \propto zz + 2zx + xx$. $\{ zz + a - y \propto zz + 2vz + vv$.

Résolution infinie. $\{ v. x.$ *arbitraires.* $\{ y \propto \frac{ax - av + vxx - vvx}{x + v}$. $\{ z \propto \frac{2a - vv - xx}{2x + 2v}$.

Exemples.

$\{ 2a \propto 20$. $\{ x \propto 3 . v \propto 2$. $\{ y \propto \frac{16}{5} . z \propto \frac{7}{10}$. $\{$ *Parties* $a + y \propto 13\frac{1}{5} . a - y \propto 6\frac{4}{5}$.

$\{$ *Quarrez* $zz + a + y \propto \frac{1369}{100} . zz + a - y \propto \frac{729}{100}$. $\{$ *côtez* $z + x \propto \frac{37}{10} . z + v \propto \frac{27}{10}$.

SECOND CAS.

20. *ET si chacune des parties de la grandeur connuë est retranchée du quarré inconnu, & que les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé $z - x$ ou $x - z$ le côté du premier $zz - a - y$ de ces deux quarrez, & $z - v$ ou $v - z$ le côté du second $zz - a + y$; la premiére égalité sera $zz - a - y \propto zz - 2zx + xx$. Ou $2zx \propto a + y$

$+ xx$. Et $z \propto \frac{a + y + xx}{2x}$. Et la seconde égalité sera $zz - a + y \propto zz - 2vz + vv$. Ou $2vz \propto a - y + vv$. Et $z \propto \frac{a - y + vv}{2v} \propto \frac{a + y + xx}{2x}$. Et tout étant multiplié par $2vx$, on trouvera l'égalité $ax - xy + xvv \propto av + vy + vxx$. Ou $xy + vy \propto ax + xvv - av - vxx$. Et $y \propto \frac{ax + xvv - av - vxx}{x + v}$. &c. Et comme le côté $z - x$ vaut moins que l'autre $z - v$; l'arbitraire x surpasse l'arbitraire v. Et y ou sa valeur $\frac{ax + xvv - av - vxx}{x + v}$ étant positive; le numérateur $ax + xvv - av - vxx$ est positif. Et $ax + xvv$ surpasse $av + vxx$. Et o surpasse $av + vxx - ax - xvv$. Et divisant par v de part & d'autre; o surpasse encore $\frac{av - ax - xvv}{v} + xx$. Et ajoûtant encore de part & d'autre $\frac{aa + 2avv + v^4 - 4avv}{4vv}$, le quarré $\frac{aa - 2avv + v^4}{4vv}$ surpassera le quarré $\frac{aa + 2avv + v^4}{4vv} - \frac{ax - xvv}{v} + xx$. Et tirant leurs racines quarrées; la premiére $\frac{a - vv}{2v}$ surpassera la seconde $\frac{a + vv}{2v} - x$. Et par conséquent x surpasse v, comme on l'a déja remarqué. Ou la premiére $\frac{a - vv}{2v}$ surpassera la seconde $x - \frac{a - vv}{2v}$. Et par transposition $\frac{a}{v}$ surpasse l'arbitraire x.

Suppositions. $\{ z - a - y \propto zz - 2zx + xx$. $\{ z - a + y \propto zz - 2vz + vv$.

Résolution infinie. $\{ v. x.$ *arbitraires.* $\{ y \propto \frac{ax - av + vvx - vxx}{v + x}$ $\{ z \propto \frac{2a + xx + vv}{2x + 2v}$.

Exemple.

$\{ 2a \propto 20$. $\{ v \propto 1$. $x \propto 2$. $\{ y \propto 2\frac{2}{3}$. $z \propto \frac{25}{6}$. $\{ a + y \propto 12\frac{2}{3}$. $a - y \propto 7\frac{1}{3}$.

Premier quarré.	*Son côté.*	*Second quarré.*	*Son côté.*
$\{ zz - a - y \propto \frac{625 - 456}{36} \propto \frac{169}{36}$.	$z - x \propto \frac{13}{6}$.	$\{ zz - a + y \propto \frac{625 - 264}{36} \propto \frac{361}{36}$.	$z - v \propto \frac{19}{6}$.

XIII QUESTION.

21. *Pour coupper une grandeur connuë en deux parties, dont le plan soit un quarré parfait.*

Ayant nommé $2a$ la grandeur connuë, & $2y$ la différence de ses deux parties; la plus grande est $a + y$, la moindre $a - y$, & leur plan $aa - yy$. Et afin que ce plan soit un quarré parfait; je prens $- a + zy$ pour côté du quarré, & je forme l'égalité $aa - yy \propto aa - 2azy + zzyy$. Ou $2azy \propto zzyy + yy$. Et $y \propto \frac{2az}{zz + 1}$. Et la question est indéterminée. Mais comme y est moindre

dre que la grandeur a ; si on multiplie y ou sa valeur $\frac{2az}{zz+1}$ & a par $zz+1$; le numérateur $2az$ sera moindre que le produit $azz+1a$. Et $2z$ moindre par conséquent que $zz+1$. Ou o moindre que le quarré $zz-2z+1$. Et o moindre que $z-1$. Et l'unité enfin moindre que l'arbitraire z.

Suppositions. $\{ aa - yy \propto aa - 2azy + zzyy.$ *Résolution infinie.* $\{ z$ *arbitraire.* $y \propto \frac{2az}{zz+1}$.

Exemples. $\{ 2a \propto 10.$ $z \propto 2.\ y \propto 4.\ a+y \propto 9.\ a-y \propto 1.\ aa-yy \propto 9.$
$z \propto 0.\ y \propto 0.\ a+y \propto 5.\ a-y \propto 5.\ aa-yy \propto 25.$

XIV QUESTION.

22. *Pour coupper une grandeur connuë en deux parties, dont chacune ayant receu une grandeur connuë, les sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé $2a$ la grandeur qu'on veut coupper en deux, & $2z$ la différence des parties, & b la grandeur connuë que chacune des parties reçoit, & y le côté du quarré égal à la plus grande somme, & x le côté du quarré égal à la moindre ; la plus grande des deux parties sera $a+z$, & la moindre $a-z$. Et on aura pour premiére égalité $a+z+b \propto yy$. Ou $z \propto yy-a-b$. Et la seconde égalité sera $a-z+b \propto xx$. Ou $z \propto a+b-xx \propto yy-a-b$. Et $yy+xx \propto 2a+2b$. D'où il est déja clair que la somme $2a+2b$, égale aux deux quarrez inconnus yy & xx, doit contenir au juste deux quarrez connus cc & dd, ou un seul connu ee qu'on peut coupper infiniment en deux. Et afin que z ou sa valeur $yy-a-b$ soit positive ; il faut que le quarré yy surpasse $a+b$. Et au contraire afin que z ou sa valeur $a+b-xx$ soit encore positive ;

Suppositions. $\{ a+z+b \propto yy.$ $\{ a-z+b \propto xx.$ $\{ 2a+2b \propto cc+dd.$

Résolution infinie. $\{ v$ *arbitraire entre* $\frac{d+\sqrt{a+b}}{c-\sqrt{a+b}}$ & $\frac{d+\sqrt{b}}{c-\sqrt{2a+b}}$.

$\{ x$ *ou* $y \propto \frac{cvv-2dv-c}{vv+1}$. $\{ y$ *ou* $x \propto \frac{dvv+2cv-d}{vv+1}$. $\{ z \propto a+b-xx \propto yy-a-b.$

Exemple.

$\{ 2a \propto 1.\ b \propto 6.\ 2a+2b \propto cc+dd \propto 9+4.$ $\{ v$ *entre* $5+2\sqrt{26}$ & $\frac{2+\sqrt{6}}{3-\sqrt{7}}$.

$\{ v$ *à peu prés entre* $8\frac{47}{100}$ & $12\frac{1}{3}$. $\{ v \propto 10.\ x \propto \frac{257}{101}.\ y \propto \frac{258}{101}.\ z \propto \frac{505}{20402}.$
$a+z \propto \frac{5358}{10201}.\ a-z \propto \frac{4843}{10201}.$ $\{ a+z+b \propto \frac{66564}{10201}.\ a-z+b \propto \frac{66049}{10201}.$

$\{ v \propto 9.\ x \propto \frac{102}{41}.\ y \propto \frac{107}{41}.\ z \propto \frac{1045}{3362}.\ a+z \propto \frac{1363}{1681}.\ a-z \propto \frac{318}{1681}.$ &c.

$\{ v \propto 12.\ y \propto \frac{381}{145}.\ x \propto \frac{358}{145}.\ z \propto \frac{16997}{42050}.\ a+z \propto \frac{38022}{42050}.\ a-z \propto \frac{4028}{42050}.$ &c.

le quarré xx eſt moindre néceſſairement que la grandeur $a + b$. Mais la moitié a de la ſomme des parties ſurpaſſe la moitié z de leur différence ou ſa valeur $yy - a - b$. Et ainſi ajoûtant $a + b$ de part & d'autre ; la ſomme $2a + b$ ſurpaſſe yy. Et la même a ſurpaſſant auſſi z ou $a + b - xx$; on trouvera par tranſpoſition que le quarré xx eſt plus grand que b. De ſorte que les juſtes limites de la grandeur y ſont entre $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt{2a+b}$. Et les juſtes limites de la grandeur x ſont entre b & $\sqrt{a+b}$. On ſuppoſe ici que c ſurpaſſe d. Le reſte de la réſolution ſera rapporté à celles des queſtions 4e & 7e.

XV QUESTION.

23. *Pour coupper une grandeur connuë en deux parties, dont la plus grande ayant receu une certaine grandeur, & la moindre encore une certaine grandeur, les ſommes ſoient chacune un quarré.*

Ayant nommé $2a$ la grandeur qu'on veut coupper en deux, & b la connuë qu'on veut ajoûter à la grande partie, & g la connuë qu'on veut ajoûter à la moindre, & $2z$ la différence des parties, & y le côté du premier quarré, & x le côté du ſecond ; la plus grande des deux parties de la grandeur $2a$ ſera $a + z$, & la moindre $a - z$. Et on aura pour première égalité $a + z + b \propto yy$. Ou $z \propto yy - a - b$. Et la ſeconde égalité ſera $a - z + g \propto xx$. Ou $z \propto a + g - xx \propto yy - a - b$. Et $yy + xx \propto 2a + b + g$. D'où il s'enſuit déja que la ſomme $2a + b + g$, égale aux deux quarrez enſemble yy & xx, doit contenir au juſte deux quarrez connus cc & dd, ou un ſeul connu ee qu'on peut coupper infiniment en deux. Et de plus yy doit ſurpaſſer $a + b$, & $a + g$ doit ſurpaſſer xx, afin que la valeur de z ſoit poſitive. Et comme a ſurpaſſe z ou $yy - a - b$; la grandeur $2a + b$ ſurpaſſe yy. Et la même a ſurpaſſant encore z ou $a + g - xx$; le quarré xx ſurpaſſe g. De ſorte que la grandeur y doit avoir ſes juſtes limites entre $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ & $\sqrt{2a+b}$; & l'autre x les ſiennes entre $\sqrt{g}$ & $\sqrt{a+g}$.

Suppoſitions. $\{a + z + b \propto yy$. $\{a - z + g \propto xx$. $\{2a + b + g \propto cc + dd$.

Réſolution infinie.

$\Big\{$ *Si c ſurpaſſe* $\sqrt{2a+b}$. $\Big\{$ *v arbitraire entre* $\dfrac{d + \sqrt{g}}{c - \sqrt{2a+b}}$ & $\dfrac{d + \sqrt{a+g}}{c - \sqrt{a+b}}$.

$\Big\{$ *Si* $\sqrt{a+b}$ *ſurpaſſe c.* $\Big\{$ *v arbitraire entre* $\dfrac{c + \sqrt{g}}{-d + \sqrt{2a+b}}$ & $\dfrac{c + \sqrt{a+g}}{-d + \sqrt{a+b}}$.

$\Big\{$ *Si c entre* $\sqrt{2a+b}$ & $\sqrt{a+b}$. $\Big\{$ *v arbitraire entre* $\dfrac{c + \sqrt{a+g}}{d + \sqrt{2a+b}}$ & $\dfrac{c + \sqrt{g}}{d + \sqrt{a+b}}$. &c.

$\Big\{$ *x ou y* $\propto \dfrac{cvv - 2dv - v}{vv + 1}$. $\Big\{$ *y ou x* $\propto \dfrac{dvv + 2cv - d}{vv + 1}$. $z \propto yy - a - b \propto a + g - xx$. &c.

Cette queſtion étoit ſuffiſante, ſans propoſer encore la précédente, qui n'en eſt proprement qu'une ſuitte ou une application. Je les diſtingue pourtant avec Diophante, afin qu'on voye le peu d'étenduë de ſes réſolutions, & la différence immenſe qui ſe trouve entre l'Analyſe antique & celle des modernes. On ſuppoſe encore ici le côté e plus grand que l'autre d, ſi $2a + b + g$ comprend deux quarrez.

Autre rèſolution infinie.

$$\left\{ 2a + b + g \propto ee. \right. \left\{ v \text{ entre } \frac{e + \sqrt{a+g}}{\sqrt{a+b}} \; \& \; \frac{e + \sqrt{g}}{\sqrt{2a+b}}. \right. \left\{ y \propto \frac{2ev}{vv+1}.\; x \propto \frac{evv - 1e}{vv+1}.\; z \propto yy - a - b. \right.$$

Exemple.

$$\left\{ 2a \propto 1.\; b \propto 2.\; g \propto 6. \right. \left\{ 2a + b + g \propto ee \propto 9. \right. \left\{ v \text{ entre } \sqrt{3} + \sqrt{2} \; \& \; \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{65}}{5}. \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ à peuprés entre } 3\frac{4}{25} \; \& \; 3\frac{7}{10}. \left\{ v \propto \frac{7}{2}.\; y \propto \frac{84}{53}.\; x \propto \frac{135}{53}.\; z \propto \frac{67}{5618}. \right. \\ a + z \propto \frac{1438}{2809}.\; a - z \propto \frac{1371}{2809}.\; a + z + b \propto \frac{7056}{2809}.\; a - z + g \propto \frac{18225}{2809}. \end{array} \right.$$

XVI QUESTION.

24\. *POur coupper en deux parties une grandeur connuë, enſorte qu'ayant ajoûté à l'une des parties une grandeur connuë, & à l'autre encore une grandeur connuë, le plan des parties ainſi augmentées ſoit un quarré parfait.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë qu'on veut coupper en deux, & z pour la premiére des grandeurs, dont le plan doit former un quarré. Puiſque cette grandeur z eſt une des parties de la grandeur a, qui a receu une grandeur connuë b; la partie ſera $z - b$, & l'autre partie ſera par conſéquent $a - z + b$. Et ſi on luy ajoûte la grandeur connuë d; la ſomme $a - z + b + d$ ſera la ſeconde des grandeurs, dont le plan doit être un quarré parfait. Comme donc la premiére a été nommée z; le plan des deux eſt $az + bz + dz - zz$; ce qui doit fournir un certain quarré $zzyy$. D'où l'on pourra tirer cette égalité $az + bz + dz \propto zzyy + zz$. Ou $a + b + d \propto zyy + 1z$. Et $z \propto \frac{a + b + d}{yy + 1}$. Et parceque $z - b$ &

Suppoſitions.

Parties ($z - b.\; a + b - z.$ *Grandeurs* ($z.\; a + b + d - z.$ (*Plan* $az + bz + dz - zz \propto zzyy.$

Réſolution infinie.

$$\left\{ y \text{ arbitraire. } z \propto \frac{a + b + d}{yy + 1}. \right. \left\{ 1^{ere} \text{ partie } z - b \propto \frac{a + d - byy}{yy + 1}.\; 2^{e}\; a + b - z \propto \frac{ayy + byy - d}{yy + 1}. \right.$$

Exemple. ($a \propto 6.\; b \propto 5.\; d \propto 3.$ ($y \propto 1.\; z \propto 7.$ (1^{ere} *partie* $z - b \propto 2.\; 2^{e}\; a + b - z \propto 4.$

$a+b-z$ sont positives ; les numérateurs $a+d-byy$ & $ayy+byy-d$ doivent être réels. Et par conséquent l'arbitraire y est moindre que $\sqrt{\frac{a+d}{b}}$ & surpasse $\sqrt{\frac{d}{a+b}}$.

XVII QUESTION.

PREMIER CAS.

25. *Pour trouver deux grandeurs, dont l'une étant ajoûtée au quarré de l'autre, la somme soit un quarré, qui ait pour côté la somme des grandeurs.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y ; la supposition fournira l'égalité $zz+y \infty zz+2zy+yy$. Ou $1y-yy \infty 2zy$. Et $z \infty \frac{1-y}{2}$. Et l'unité surpasse l'arbitraire y.

Supposition. $\{zz+y \infty zz+2zy+yy$. *Résolution infinie.* $\{y$ *arbitraire.* $z \infty \frac{1-y}{2}$.

Exemples.

$\{y \infty \frac{1}{2}.\ z \infty \frac{1}{4}.\ zz+y \infty \frac{9}{16}$ $\{y \infty \frac{1}{3}.\ z \infty \frac{1}{3}.\ zz+y \infty \frac{4}{9}$. $\{y \infty \frac{1}{5}.\ z \infty \frac{2}{5}.\ zz+y \infty \frac{9}{25}$.

SECOND CAS.

26. *Et si l'une des grandeurs est retranchée du quarré de l'autre, & que le reste soit un quarré parfait, qui ait pour côté la différence des grandeurs.*

On trouvera la résolution qu'on expose ici. Et l'arbitraire y ne sera point limitée, quoiqu'on ne doive pas la supposer égale à l'unité. Si on veut que la premiére grandeur z surpasse la seconde y, l'arbitraire y sera moindre que l'unité. Et si elle est plus grande ; ce sera le contraire.

Supposition. $\{zz-y \infty zz-2zy+yy$. *Résolution infinie.* $\{y$ *arbitraire.* $z \infty \frac{1+y}{2}$.

Exemples. $(y \infty 3.\ z \infty 2.\ zz-y \infty 1.$ $(y \infty 5.\ z \infty 3.\ zz-y \infty 4.$ $(y \infty 7.\ z \infty 4.\ zz-y \infty 9.$

TROISIEME CAS.

27. *Et si le quarré de l'une des grandeurs est retranché de l'autre grandeur, & que le reste soit un quarré parfait, dont le côté soit la différence des grandeurs.*

Ayant nommé comme auparavant la premiére z, & la seconde y. Otant de la seconde y le quarré zz, on formera l'égalité $y-zz \infty zz$
b. 16. 1. $-2zy+yy$. Ou $zz-zy-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}yy \infty 0$. D'où l'on tirera [b] une valeur $z \infty \frac{y+\sqrt{2y-yy}}{2}$. Et afin que z soit commensurable ; la gran-

deur $\sqrt{2y - yy}$ sera commensurable, ou $2y - yy$ égale à un quarré parfait $yyxx$. D'où l'on tirera une valeur $y = \frac{2}{xx + 1}$. Si on veut que z surpasse y; l'arbitraire x surpassera l'unité. Mais elle vaudra moins, si z est moindre que l'autre y.

Suppositions. $\{ y - zz = zz - 2yz + yy.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z = \frac{1 + x}{xx + 1}.\ y = \frac{2}{xx + 1}.$

Exemples. $\{ x = 2.\ z = \frac{3}{5}.\ y = \frac{2}{5}.\ y - zz = \frac{1}{25}.\ \{ x = \frac{1}{2}.\ z = \frac{6}{5}.\ y = \frac{8}{5}.\ y - zz = \frac{4}{25}.$

XVIII QUESTION.

PREMIER CAS.

28. ***Pour trouver deux grandeurs, dont l'une étant ajoûtée au quarré de l'autre, la somme soit le côté d'un quarré égal aux deux grandeurs.***

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y; la somme $zz + y$ est le côté d'un quarré égal à la somme $z + y$. Et par conséquent $zz + y = \sqrt{z + y}$. Et quarrant chaque membre, on trouvera l'égalité $z^4 + 2zzy + yy = z + y$. Ou $yy + 2zzy - y + z^4 - z = 0$. D'où l'on tirera une [b] valeur $y = - zz + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - zz + z}$. Et afin que la grandeur y b. 15. 1.
soit commensurable; il faut que ce qui est sous le signe soit un quarré parfait. C'est pourquoi si on prend $zx - \frac{1}{2}$ pour le côté de ce nouveau quarré; l'égalité sera $zzxx - zx + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - zz + z$. Ou $zxx + 1z = 1x + 1$. Et $z = \frac{1x + 1}{xx + 1}$. Et y ou sa valeur $zx - zz$ étant réelle, l'arbitraire x surpasse z ou sa valeur $\frac{1x + 1}{xx + 1}$. Et tout étant multiplié par $xx + 1$, le produit $x^3 + 1x$ surpasse le numérateur $1x + 1$. Et x^3 ou son côté x surpasse l'unité.

Supposition. $\{ zz + y = \sqrt{z + y}.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z = \frac{x + 1}{xx + 1}.\ y = zx - zz.$

Exemple. $\{ x = 2.\ z = \frac{3}{5}.\ y = \frac{21}{25}.\ \{$ *Quarré* $z + y = \frac{36}{25}.\ \{$ *côté* $zz + y = \frac{6}{5}.$

SECOND CAS.

29. ***Et si on ôte la seconde grandeur du quarré de la premiére, & que le reste soit le côté d'un quarré égal à l'excez dont la premiére surpasse la seconde.***

La résolution sera á peu prés la même que la précédente. Et l'arbitraire x sera moindre que l'unité.

Supposition. $\{ zz - y \propto \sqrt{z - y}.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z \propto \frac{x + 1}{xx + 1}. \; y \propto zz - zx.$

Exemple. $\{ x \propto \frac{1}{2}. \; z \propto \frac{6}{5}. \; y \propto \frac{21}{5}.$ $\{$ *Quarré* $z - y \propto \frac{9}{25}.$ *Côté* $zz - y \propto \frac{3}{5}.$

TROISIEME CAS.

30. *ET si on ôte encore la seconde grandeur du quarré de la première, & que le reste soit le côté d'un quarré égal à l'excez dont la seconde surpasse la première.*

La résolution sera découverte de la même sorte. Et l'arbitraire x sera moindre aussi que l'unité.

Supposition. $\{ zz - y \propto \sqrt{y - z}.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z \propto \frac{1 + x}{1 - xx}. \; y \propto zx + zz.$

Exemple. $\{ x \propto \frac{1}{2}. \; z \propto 2. \; y \propto 3.$ $\{$ *Quarré* $y - z \propto 1.$ *Côté* $zz - y \propto 1.$

QUATRIEME CAS.

31. *ET si on ôte le quarré de la première de la seconde des grandeurs, & que le reste soit le côté d'un quarré égal à l'excez dont la première surpasse la seconde.*

On suivra toûjours la même méthode. Et l'arbitraire x sera moindre encore que l'unité.

Supposition. $\{ y - zz \propto \sqrt{z - y}.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z \propto \frac{1 - x}{1 + xx}. \; y \propto zx + zz.$

Exemple. $\{ x \propto \frac{1}{2}. \; z \propto \frac{2}{5}. \; y \propto \frac{9}{25}.$ $\{$ *Quarré* $z - y \propto \frac{1}{25}.$ *Côté* $y - zz \propto \frac{1}{5}.$

CINQUIEME CAS.

32. *ET si de la seconde on ôte le quarré de la première, & que le reste soit le costé d'un quarré égal à l'excez dont la seconde surpasse la première.*

On suivra toûjours le même ordre. Et l'arbitraire x sera prise ou plus grande, ou moindre que l'unité.

Supposition. $\{ y - zz \propto \sqrt{y - z}.$ *Résolution infinie.* $\{ x$ *arbitraire.* $z \propto \frac{x - 1}{xx - 1}. \; y \propto zx + zz.$

Exemples. $\{ x \propto 2. \; z \propto \frac{1}{3}. \; y \propto \frac{7}{9}.$ $\{$ *Quarré* $y - z \propto \frac{4}{9}.$ *Côté* $y - zz \propto \frac{2}{3}.$
$\{ x \propto \frac{1}{2}. \; z \propto \frac{2}{3}. \; y \propto \frac{7}{9}.$ $\{$ *Quarré* $y - z \propto \frac{1}{9}.$ *Côté* $y - zz \propto \frac{1}{3}.$

XIX QUESTION.

PREMIER CAS.

33. *Pour trouver deux grandeurs, qui aient entr'elles un même rapport que deux grandeurs connuës; & dont chacune recevant un certain quarré, chaque somme soit un quarré parfait.*

Si les deux inconnuës ont un même rapport que deux connuës c & d; ayant nommé cz la premiére inconnuë, la seconde est dz. Et prenant aa pour le quarré connu que chacune reçoit, les sommes $cz + aa$ & $dz + aa$ sont des quarrez parfaits. C'est pourquoi si on prend $a + y$ pour le côté du premier, & $- a + xy$ pour le côté du second; le premier quarré sera $cz + aa \propto aa + 2ay + yy$. Et on en tirera l'égalité $cz \propto 2ay + yy$. Ou $z \propto \frac{2ay + yy}{c}$. Et le second quarré $dz + aa \propto aa - 2axy + xxyy$ fournira aussi l'égalité $dz \propto - 2axy + xxyy$. Et $z \propto \frac{- 2axy + xxyy}{d} \propto \frac{2ay + yy}{c}$. Et chaque membre étant multiplié par $\frac{cd}{y}$, on aura $- 2acx + cxxy \propto 2ad + dy$. Et $cxxy - dy \propto 2acx + 2ad$. Et $y \propto \frac{2acx + 2ad}{cxx - d}$. &c. Et l'arbitraire x surpasse $\sqrt{\frac{d}{c}}$.

{ 1^ere^ *supposition.* $c.\,d :: cz.\,dz.$ } { 2^e^ *supposition.* $cz + aa \propto aa + 2ay + yy.$ } { 3^e^ *supposition.* $dz + aa \propto aa - 2axy + xxyy.$ }

Résolution infinie.

{ x *arbitraire.* $y \propto \frac{2acx + 2ad}{cxx - 1d}$. $z \propto \frac{2ay + yy}{c}$. } { 1^ere^ $cz \propto 2ay + yy$. 2^e^ $dz \propto \frac{2ady + dyy}{c}$. }

Exemple. { $c \propto 1$. $d \propto 3$. $aa \propto 9$. ($x \propto 2$. $y \propto 30$. (1^ere^ $cz \propto 1080$. 2^e^ $dz \propto 3240$.
Quarrez $cz + aa \propto 1089$. $dz + aa \propto 3249$. *Côtez* $a + y \propto 33$. $xy - a \propto 57$. }

SECOND CAS.

34. *Et si les grandeurs ont un même rapport que les deux connuës, & qu'ayant retranché l'une & l'autre du quarré connu, les restes soient des quarrez parfaits.*

On suivra le même ordre que dans la résolution précédente. Et l'arbitraire x surpassera chacune des grandeurs $\frac{d}{c}$ & $\sqrt{\frac{d}{c}}$. Et afin que z ou sa valeur $\frac{2ay - yy}{c}$ soit positive; il faudra que $2a$ surpasse y ou sa valeur $\frac{2acx - 2ad}{cxx - d}$. Et multipliant par $cxx - d$ de part & d'autre, le produit $2acxx - 2ad$ surpassera le numérateur $2acx - 2ad$. Et par conséquent l'arbitraire x surpassera l'unité.

{ 1^ere^ *supposition.* $c.\,d :: cz.\,dz.$ } { 2^e^ *supposition.* $aa - cz \propto aa - 2ay + yy.$ } { 3^e^ *supposition.* $aa - dz \propto aa - 2axy + xxyy.$ }

$2vy \propto vv - z$, ou une valeur $y \propto \frac{vv - z}{2v} \propto 2zx + xx$. Et chaque membre étant multiplié par $2v$, on aura l'égalité $vv - z \propto 4vzx + 2vxx$.

Et $4vzx + z \propto vv - 2vxx$. Et $z \propto \frac{vv - 2vxx}{4vx + 1}$. &c. Les deux grandeurs v & x seront arbitraires; mais v surpasse $2xx$.

SECOND CAS.

37. *ET si chacune des grandeurs est retranchée du quarré de l'autre, & que les deux restes soient des quarrez parfaits.*

On trouvera facilement la résolution en suivant le même ordre. Et le plan vx des arbitraires v & x surpassera $\frac{1}{4}$.

1^{ere} *supposition* $\{ zz - y \propto zz - 2xz + xx$. 2^{e} $\{ yy - z \propto vv - 2vy + yy$.

Résolution infinie. $\{ v.\ x.$ *arbitraires.* $\{ 1^{ere}\ z \propto \frac{vv + 2vxx}{4vx - 1}$. $2^{e}\ y \propto \frac{2vvx + xx}{4vx - 1}$.

Exemples.
$v \propto 4.\ x \propto 1.\ \{ z \propto \frac{8}{5}.\ y \propto \frac{11}{5}.\ \{ zz - y \propto \frac{9}{25}.\ yy - z \propto \frac{81}{25}.$
$v \propto 2.\ x \propto 2.\ \{ z \propto \frac{4}{3}.\ y \propto \frac{4}{3}.\ \{ zz - y \propto \frac{4}{9}.\ yy - z \propto \frac{4}{9}.$

TROISIEME CAS.

38. *ET si la seconde grandeur est ajoûtée au quarré de la première, & la première retranchée du quarré de la seconde; & que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

On trouvera toûjours de la même sorte la résolution. Et l'arbitraire v surpassera $2xx$, & le plan vx des deux arbitraires surpassera $\frac{1}{4}$.

1^{ere} *supposition* $\{ zz + y \propto zz + 2xz + xx$. 2^{e} $\{ yy - z \propto yy - 2vy + vv$.

Resolution infinie. $\{ v.\ x.$ *arbitraires.* $\{ 1^{ere}\ z \propto \frac{vv - 2vxx}{4vx - 1}.\ y \propto \frac{2vvx - 1xx}{4vx - 1}$.

Exemples.
$v \propto 3.\ x \propto 1.\ \{ z \propto \frac{3}{11}.\ y \propto \frac{17}{11}.\ \{ zz + y \propto \frac{196}{121}.\ yy - z \propto \frac{256}{121}.$
$v \propto 4.\ x \propto 1.\ \{ z \propto \frac{8}{15}.\ y \propto \frac{31}{15}.\ \{ zz + y \propto \frac{529}{225}.\ yy - z\ \frac{841}{225}.$

XXI QUESTION.

PREMIER CAS.

39. *POur trouver deux grandeurs, dont la somme étant ajoûtée au quarré de chacune donne un quarré parfait.*

Ayant nommé simplement la premiére z, & la seconde y, & $z + x$ le côté du premier quarré, & $v - y$ le côté du second; la premiére supposition fournira l'égalité $zz + z + y \propto zz + 2xz + xx$. Et $y \propto 2xz + xx - z$. Et la seconde supposition fournira une seconde égalité $yy + z + y \propto vv - 2vy + yy$. Et $2vy + y \propto vv - z$. Et $y \propto \frac{vv - z}{2v + 1} \propto 2xz + xx - z$. Et chaque membre étant multiplié par $2v + 1$; on aura l'égalité $vv - z \propto 4vxz + 2vxx - 2vz + 2xz + xx - z$. Ou $4vxz + 2xz - 2vz \propto vv - 2vxx - xx$. &c. Et les grandeurs x & v sont arbitraires. Mais $\frac{vv}{2v + 1}$ surpasse le quarré xx; Car vv surpasse $2vxx + xx$. Et x surpasse $\frac{v}{2v + 1}$, puisque $4vx + 2x$ surpasse $2v$. Ou ce qui revient au même, l'arbitraire x est moindre que la grandeur $v\sqrt{\frac{1}{2v + 1}}$, ou que $\frac{v}{2v + 1}\sqrt{2v + 1}$; & au contraire, elle surpasse $\frac{v}{2v + 1}$. Et comme on veut que la grandeur y soit positive ; le numérateur $2vvx - vv + xx$ est réel. Et par conséquent $xx + 2vvx$ surpasse vv. Et $xx + 2vvx + v^4$ surpasse $vv + v^4$. Et $x + vv$ surpasse $v\sqrt{vv + 1}$. Et x surpasse $- vv + v\sqrt{vv + 1}$.

1ere *supposition* $\{ zz + z + y \propto zz + 2xz + xx$. 2e $\{ yy + z + y \propto yy - 2vy + vv$.

Résolution infinie. $\{$ *v. x. arbitraires.* $\{$ 1ere $z \propto \frac{vv - 2vxx - xx}{4vx + 2x - 2v}$. 2e $y \propto \frac{2vvx - vv + xx}{4vx + 2x - 2v}$.

Exemple. $\{ v \propto 3.\ x \propto 1\ \{ z \propto \frac{1}{4}.\ y \propto \frac{5}{4}.\ \{ zz + z + y \propto \frac{25}{16}.\ yy + z + y \propto \frac{49}{16}$.

SECOND CAS.

40. *Et si la somme des grandeurs est retranchée de chacune, & que les restes soient des quarrez parfaits.*

Les raisonnemens seront à peu prés ordonnez de la même sorte. Et on trou-
b. 22. 1. vera dans la résolution que l'arbitraire x surpasse $\frac{v}{2v - 1}$, & qu'elle[b] surpasse encore $- vv + v\sqrt{vv + 1}$; & qu'elle vaut moins que $\frac{v}{\sqrt{1 - 2v}}$, si $\frac{1}{2}$ surpasse v.

1ere *supposition* $\{ zz - z - y \propto zz - 2xz + xx$. 2e $\{ yy - z - y \propto yy - 2vy + vv$.

Résolution infinie. $\{$ *v. x. arbitraires.* $\{$ 1ere $z \propto \frac{vv + 2vxx - xx}{4vx - 2v - 2x}$. 2e $y \propto \frac{2vvx - vv + xx}{4vx - 2v - 2x}$.

Exemple. $\{ v \propto 1.\ x \propto 2.\ \{ z \propto \frac{5}{2}.\ y \propto \frac{7}{2}.\ \{ zz - z - y \propto \frac{1}{4}.\ yy - z - y \propto \frac{25}{4}$.

TROISIEME CAS.

41. *ET si la somme des grandeurs est ajoûtée au quarré de la premiére, & retranchée du quarré de la seconde; & que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Aprés avoir découvert, comme auparavant, la résolution; on trouvera que l'arbitraire x est moindre que $vv + v\sqrt{vv - 1}$, & moindre encore que $\frac{v}{2v - 1}\sqrt{2v - 1}$, & qu'elle surpasse $\frac{v}{2v - 1}$.

1^{ere} *supposition* $\{ zz + z + y \propto zz + 2xz + xx$. 2^{e} $\{ yy - z - y \propto yy - 2vy + vv$.

Résolution infinie. $\{ v.\ x.$ *arbitraires.* $\{$ 1^{ere} $z \propto \frac{vv - 2vxx + xx}{4vx - 2v - 2x}$. 2^{e} $y \propto \frac{2vvx - vv - xx}{4vx - 2v - 2x}$.

Exemple. $\{ v \propto 3.\ x \propto 1.\ \{ z \propto 1.\ y \propto 2.\ \{ zz + z + y \propto 4.\ yy - z - y \propto 1.$

XXII QUESTION.

PREMIER CAS.

42. *POur trouver deux grandeurs, dont chacune étant ajoûtée au quarré de leur somme, chaque tout soit un quarré parfait.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2y$; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$, & le quarré de la somme est $4zz$. Et si on luy ajoûte chacune des grandeurs; les sommes $4zz + z + y$ & $4zz + z - y$ doivent être des quarrez parfaits. C'est pourquoy ayant pris $2z + x$ pour le côté du premier, & $2z - v$ ou $v - 2z$ pour le côté du second; la premiére égalité sera $4zz + z + y \propto 4zz + 4zx + xx$. Et $y \propto 4zx + xx - z$. Et la seconde égalité sera $4zz + z - y \propto 4zz - 4vz + vv$. Ou $y \propto 4vz + z - vv \propto 4zx + xx - z$. Et $4vz + 2z - 4zx \propto vv + xx$. Ou $z \propto \frac{vv + xx}{4v - 4x + 2}$. Et comme z doit surpasser y, ou que la valeur de z doit surpasser celle de la grandeur y; le numérateur $vv + xx$ de la premiére surpasse le numérateur $4vvx + 4vxx + xx - vv$ de la seconde. Et par transposition $2vv$ surpasse $4vvx + 4vxx$. Et par conséquent v surpasse $2vx + 2xx$. De sorte [b] que l'arbitraire x vaut moins que b. 22. 1.
$-\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sqrt{vv + 2v}$. Et le dénominateur $4v - 4x + 2$ étant positif; l'arbitraire x est encore moindre que $v + \frac{1}{2}$.

1^{ere} *supposition.* $\{ 4zz + z + y \propto 4zz + 4xz + xx$. 2^{e} $\{ 4zz + z - y \propto 4zz - 4vz + vv$.

Résolution infinie. $\{ v.\ x.$ *arbitraires.* $z \propto \frac{vv + xx}{4v - 4x + 2}$. $y \propto \frac{4vvx + 4vxx + xx - vv}{4v - 4x + 2}$.
1^{ere} $z + y \propto \frac{1xx + 2vvx + 2vxx}{2v - 2x + 1}$. 2^{e} $z - y \propto \frac{vv - 2vvx - 2vxx}{2v - 2x + 1}$.

Exemple.

$\{ v \propto \frac{3}{4}.\ x \propto \frac{1}{4}.\ \{ z + y \propto \frac{7}{32}.\ z - y \propto \frac{3}{32}.\ \{ 4zz + z + y \propto \frac{81}{256}.\ 4zz + z - y \propto \frac{49}{256}.$

SECOND CAS.

43. *ET ſi chaque grandeur eſt retranchée du quarré de la ſomme, & que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Les raiſonnemens ſeront à peu prés ordonnez de la même ſorte. Et parceque z doit ſurpaſſer y; le numérateur $vv + xx$ ſurpaſſera le numérateur $4vvx - 4vxx + xx - vv$. Et $2vv$ par tranſpoſition ſurpaſſera $4vvx - 4vxx$.
b. 23. 1. Et v par conſéquent ſurpaſſera encore $2vx - 2xx$. Et x ſurpaſſera [b] enfin $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sqrt{vv - 2v}$. Et afin que la grandeur y ſoit poſitive ; le numérateur $4vvx - 4vxx + xx - vv$ doit être poſitif.

Et ce numérateur étant un produit des deux grandeurs $x - v$ & $-4vx + x + v$; il faut que ces grandeurs ſoient l'une & l'autre poſitive, ou l'une & l'autre négative. Si chacune eſt poſitive ; l'arbitraire x ſurpaſſe l'arbitraire v, & $x + v$ ſurpaſſe $4vx$. Et v ſurpaſſe $4vx - x$. Et $\frac{v}{4v - 1}$ ſurpaſſe l'arbitraire x. Et comme x ſurpaſſe v; la grandeur $\frac{v}{4v - 1}$ ſurpaſſe v à plus forte raiſon. Et multipliant par $4v - 1$ de part & d'autre ; l'arbitraire v ſurpaſſe $4vv - 1v$. Et $2v$ ſurpaſſe $4vv$. Et par conſéquent $\frac{1}{2}$ ſurpaſſe v. Mais ſi chacune des grandeurs $x - v$ & $-4vx + x + v$ eſt négative ; v ſurpaſſe x, & $\frac{v}{4v - 1}$ vaut moins que la même x. Et comme on ſuppoſe que le dénominateur eſt poſitif ; il faut que $2v + 2x$ ſurpaſſe l'unité.

1ere *ſuppoſition* $\{ 4zz - z - y \propto 4zz - 4xz + xx$. 2e $\{ 4zz - z + y \propto 4zz - 4vz + vv$.

Réſolution infinie. $\left\{ \begin{array}{l} v.\ x.\ \textit{arbitraires.}\ \{ z \propto \dfrac{vv + xx}{4v + 4x - 2} \cdot y \propto \dfrac{4vvx - 4vxx + xx - vv}{4v + 4x - 2}. \\ 1^{ere}\ z + y \propto \dfrac{1xx + 2vvx - 2vxx}{2v + 2x - 1} \cdot 2^{e}\ z - y \propto \dfrac{vv - 2vvx + 2vxx}{2v + 2x - 1}. \end{array} \right.$

Exemples,

$\{ v \propto \frac{1}{3} \cdot x \propto \frac{2}{3} \cdot \{ z + y \propto \frac{8}{27} \cdot z - y \propto \frac{7}{27} \cdot \{ 4zz - z - y \propto \frac{9}{729} \cdot 4zz - z + y \propto \frac{36}{729}.$

$\{ v \propto \frac{3}{2} \cdot x \propto 1 \cdot \{ z + y \propto \frac{10}{16} \cdot z - y \propto \frac{3}{16} \cdot \{ 4zz - z - y \propto \frac{9}{256} \cdot 4zz - z + y \propto \frac{121}{256}.$

TROISIEME CAS.

44. *ET ſi la grande eſt ajoûtée au quarré de la ſomme, & que la moindre ſoit retranchée de ce même quarré ; pour faire enſorte que la nouvelle ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

On verra dans la réſolution que l'arbitraire x vaut moins que l'arbitraire v, & moins encore que $-\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sqrt{vv + 2v}$. Et afin que la grandeur y ſoit réelle, ou que le numérateur $4vvx + 4vxx - vv - xx$ ſoit poſitif, il faut que $4vvx + 4vxx$ surpasse $vv + xx$, ou que $4vxx - 1xx$ surpasse $vv - 4vvx$. Et ainsi le quarré $xx + \frac{4vvx}{4v-1} + \frac{4v^4}{16vv - 8v + 1}$ surpasse $\frac{4v^4 + 4v^3 - vv}{16vv - 8v + 1}$. Et le côté $x + \frac{2vv}{4v-1}$ surpasse l'autre $\frac{v}{4v-1}$ $\sqrt{4vv + 4v - 1}$. De sorte que l'arbitraire x surpasse $\frac{-2vv + v\sqrt{4vv + 4v - 1}}{4v-1}$. Et afin que le dénominateur soit positif, il faut que $2v + 2x$ surpasse l'unité.

Si 1 surpassoit $2v + 2x$; le dénominateur $2v + 2x - 1$ seroit négatif, & chacun des numérateurs $vv - xx$ & $4vvx + 4vxx - xx - vv$ seroit encore négatif, puisqu'on suppose que z & y doivent être positives. Et par conséquent l'arbitraire x qui est positive, surpasseroit l'autre positive v; & seroit moindre que $\frac{-2vv + v\sqrt{4vv + 4v - 1}}{4v-1}$.

1ere *supposition* $\{4zz + z + y \propto 4zz + 4xz + xx$. 2^e $\{4zz - z + y \propto 4zz - 4vz + vv$.

Résolution infinie. $\left\{\begin{array}{l} v.\ x.\ \textit{arbitraires}.\ z \propto \frac{vv - xx}{4v + 4x - 2}.\ y \propto \frac{4vvx + 4vxx - vv - xx}{4v + 4x - 2}. \\ 1^{ere}\ z + y \propto \frac{2vvx + 2vxx - xx}{2v + 2x - 1}.\ 2^e\ z - y \propto \frac{vv - 2vvx - 2vxx}{2v + 2x - 1}. \end{array}\right.$

Exemple.

$\{v \propto 1.\ x \propto \frac{1}{3}.\ \{z + y \propto \frac{7}{15}.\ z - y \propto \frac{1}{15}.\ \{4zz + z + y \propto \frac{169}{225}.\ 4zz - z + y \propto \frac{49}{225}.$

QUATRIEME CAS.

45. *Et enfin si la grande est ôtée du quarré de la somme, & que la moindre soit ajoûtée à ce même quarré; pour faire en sorte que le reste & la nouvelle somme soient des quarrez parfaits.*

Aprés qu'on aura découvert, comme aux cas précédens, la résolution; l'arbitraire x surpassera l'autre v. Et la même x surpassera encore chacune des grandeurs $-\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sqrt{vv + 2v}$ & $\frac{-2vv + v\sqrt{4vv + 4v - 1}}{4v - 1}$. Et $2x + 2v$ surpassera l'unité.

1^{ere} *supposition* $\{4zz - z - y \propto 4zz - 4xz + xx$. 2^e $\{4zz + z - y \propto 4zz + 4vz + vv$.

Résolution infinie. $\left\{\begin{array}{l} v.\ x.\ \textit{arbitraires}.\ z \propto \frac{xx - vv}{4x + 4v - 1}.\ y \propto \frac{4vxx - 4vvx + vv + xx}{4x + 4v - 1}. \\ z + y \propto \frac{xx + 2vxx - 2vvx}{2x + 2v - 1}.\ z - y \propto \frac{2vvx - 2vxx - vv}{2x + 2v - 1}. \end{array}\right.$

Exemple.

$\{v \propto \frac{1}{8}.\ x \propto \frac{3}{4}.\ \{z + y \propto \frac{51}{96}.\ z - y \propto \frac{19}{96}.\ \{4zz - z - y \propto \frac{1}{2304}.\ 4zz + z - y \propto \frac{1681}{2304}.$

XXIII QUESTION.

PREMIER CAS.

46. *Pour trouver deux grandeurs, dont le plan recevant l'une & l'autre, les ſommes ſoient chacune un quarré parfait, & enſorte que les côtez enſemble de ces deux quarrez donnent une grandeur connuë.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & xz le côté du premier quarré, & yv le côté du ſecond; la premiére ſuppoſition fournira l'égalité $zy + z \propto zzxx$. Ou $y \propto zxx - 1$. Et la ſeconde ſuppoſition fournira une autre égalité $zy + y \propto yyvv$. Ou $z + 1 \propto yvv$. Et $y \propto \frac{z+1}{vv} \propto zxx - 1$. Et $z + 1 \propto zxxvv - vv$. Et $zxxvv - 1z \propto vv + 1$. Et enfin $z \propto \frac{vv+1}{xxvv-1}$. Et mettant pour z ſa valeur dans l'égalité $y \propto zxx - 1$; on trouvera $y \propto \frac{xx+1}{xxvv-1}$. Et pour remplir la derniére condition, les deux côtez enſemble zx & vy des quarrez font une ſomme connuë $a \propto \frac{vvx + 1x + vxx + 1v}{xxvv - 1}$. Et les deux termes de la fraction étant diviſez par $xv + 1$; on trouvera $\frac{vvx + 1x + vxx + 1v}{xxvv - 1} \propto \frac{x+v}{xv-1} \propto a$. Et chaque membre étant multiplié par $xv - 1$, on aura l'égalité $x + v \propto axv - 1a$. Et $x + a \propto axv - 1v$. Et $v \propto \frac{x+a}{ax-1}$. Et ax ſurpaſſe 1. Et par conſéquent l'arbitraire x ſurpaſſe $\frac{1}{a}$.

1ere *ſuppoſition* $\{ zy + z \propto zzxx$. 2e $\{ zy + y \propto yyvv$. 3e $\{ zx + yv \propto a$.

Réſolution infinie. $\{ x$ *arbitraire.* $v \propto \frac{a+x}{ax-1}$. $\{ z \propto \frac{vv+1}{xxvv-1}$. $y \propto \frac{xx+1}{xxvv-1}$.

Exemple. $\{ a \propto 2$. $x \propto 1$. $v \propto 3$. $\{ z \propto \frac{5}{4}$. $y \propto \frac{1}{4}$. $\{ zy + z \propto \frac{25}{16}$. $zy + y \propto \frac{9}{16}$.

SECOND CAS.

47. *Et ſi chaque grandeur eſt retranchée du plan, & que les reſtes ſoient des quarrez parfaits, dont les côtez enſemble donnent une grandeur connuë.*

Ayant dénommé les grandeurs comme au cas précédent; la réſolution

1ere *ſuppoſition* $\{ zy - z \propto zzxx$. 2e $\{ zy - y \propto yyvv$. 3e $\{ zx + yv \propto a$.

Réſolution infinie. $\{ x$ *arbitraire.* $v \propto \frac{a-x}{ax+1}$. $\{ z \propto \frac{vv+1}{1-xxvv}$. $y \propto \frac{xx+1}{1-xxvv}$.

Exemple. $\{ a \propto 3$. $x \propto 1$. $v \propto \frac{1}{2}$. $\{ z \propto \frac{5}{3}$. $y \propto \frac{8}{3}$. $\{ zy - z \propto \frac{25}{9}$. $zy - y \propto \frac{16}{9}$.

marquera que l'arbitraire x eſt moindre que la grandeur a, & moindre encore que $\frac{1}{v}$.

TROISIEME CAS.

48. *ET ſi on ajoûte une des grandeurs au plan, & qu'on en retranche l'autre ; afin que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

La réſolution découverte marquera que l'arbitraire x eſt moindre que la connuë a, & ſurpaſſe $\frac{1}{a}$; ou qu'elle eſt moindre que $\frac{1}{a}$, & qu'elle ſurpaſſe a. Et ſi l'arbitraire v ſurpaſſe l'unité ; l'autre x ſurpaſſe $\frac{1}{v}$, & vaut moins que l'unité.

1ere *ſuppoſition* $\{ zy + z \propto zzxx$. 2e $\{ zy - y \propto yyvv$. 3e $\{ zx + yv \propto a$.

Réſolution infinie. $\{ x$ *arbitraire.* $v \propto \frac{a - x}{ax - 1}$. $\left\{ z \propto \frac{vv - 1}{xxvv - 1}\right.$. $y \propto \frac{1 - xx}{xxvv - 1}$.

Exemple. $a \propto 2$.
$x \propto \frac{2}{3}$. $v \propto 4$. $z \propto \frac{27}{11}$. $y \propto \frac{1}{11}$. $zy + z \propto \frac{324}{121}$. $zy - y \propto \frac{16}{121}$.
$x \propto \frac{3}{4}$. $v \propto \frac{5}{2}$. $z \propto \frac{48}{23}$. $y \propto \frac{4}{23}$. $zy + z \propto \frac{1296}{529}$. $zy - y \propto \frac{100}{529}$.

XXIV QUESTION.

49. *POur trouver deux grandeurs, dont la ſomme étant ajoûtée au plan de ces mêmes grandeurs, ou retranchée du plan ; la nouvelle ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits. Et de plus que la ſomme des grandeurs ſoit encore un quarré.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde zy, & zx le côté du premier quarré, & zv le côté du ſecond ; la premiére égalité ſera $zzy + z + zy \propto zzxx$. Et $1 + y \propto zxx - zy$. Et $z \propto \frac{1 + y}{xx - y}$. Et la ſeconde égalité ſera $zzy - z - zy \propto zzvv$. Ou $zy - zvv \propto 1 + y$. Et $z \propto \frac{1 + y}{y - vv} \propto \frac{1 + y}{xx - y}$. Et diviſant de part & d'autre par $1 + y$, on aura l'égalité $\frac{1}{y - vv} \propto \frac{1}{xx - y}$. Et ſes deux membres étant multipliez par $y - vv$, & par $xx - y$, on trouvera $xx - y \propto y - vv$. Ou $xx + vv \propto 2y$. Et $y \propto \frac{xx + vv}{2}$. Et mettant pour y ſa valeur dans l'égalité $z \propto \frac{1 + y}{xx - y}$, on aura une valeur $z \propto \frac{xx + vv + 2}{xx - vv}$. Et il faut remplir la derniére condition, que la ſomme $z + zy$ des deux grandeurs, ou que ſa valeur $\frac{x^4 + 2vvxx + v^4 + 4xx + 4vv + 4}{2xx - 2vv}$ ſoit un quarré parfait. Et comme le numérateur eſt déja le quarré parfait de la grandeur $xx + vv + 2$, il reſte à faire en ſorte que le dénominateur $2xx - 2vv$ ſoit un quarré parfait. Nommant donc s le côté de ce nouveau quarré, & prenant $x - t$ pour v, afin de réduire l'inconnuë x au linéaire, on aura l'égalité $2xx - 2vv \propto 2xx - 2xx + 4tx - 2tt \propto ss$. Ou $4tx \propto ss + 2tt$. Et les deux grandeurs s & t sont arbitraires. Mais s surpasse $t\sqrt{2}$.

1ere *supposition* $\{ z + zy + zzy \propto zzxx$. 2e $\{ zzy - z - zy \propto zzvv$. 3e $\{ z + zy \propto rr$.

Résolution infinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} s.\ t.\ \textit{arbitraires}.\ x \propto \dfrac{ss + 2tt}{4t}.\ v \propto \dfrac{ss - 2tt}{4t}.\ y \propto \dfrac{xx + vv}{2} \propto \dfrac{s^4 + 4t^4}{16tt}. \\ 1^{ere}\ z \propto \dfrac{xx + vv + 2}{xx - vv} \propto \dfrac{s^4 + 4t^4 + 16tt}{4ttss}.\ 2^e\ zy \propto \dfrac{s^8 + 8s^4t^4 + 16t^8 + 16s^4tt + 64t^6}{64t^4ss}. \end{array} \right.$$

$$\textit{Exemple.} \left\{ \begin{array}{l} t \propto 2.\ s \propto 4.\ \{ x \propto 3.\ v \propto 1.\ y \propto 5.\ \{ 1^{ere}\ z \propto \frac{3}{2}.\ 2^e\ zy \propto \frac{15}{2}. \\ \textit{Quarrez}\ zzy + z + zy \propto \frac{81}{4}.\ zzy - z - zy \propto \frac{9}{4}.\ z + zy \propto 9.\ \&c. \end{array} \right.$$

$$\textit{Exemple.} \left\{ \begin{array}{l} t \propto 1.\ s \propto 2.\ \{ x \propto \frac{3}{2}.\ v \propto \frac{1}{2}.\ y \propto \frac{5}{4}.\ \{ 1^{ere}\ z \propto \frac{9}{4}.\ 2^e\ zy \propto \frac{45}{16}. \\ \textit{Quarrez}\ zzy + z + zy \propto \frac{729}{64}.\ zzy - z - zy \propto \frac{81}{64}.\ z + zy \propto \frac{81}{16}. \end{array} \right.$$

XXV QUESTION.

50. *Pour trouver deux grandeurs, telles qu'ayant ajoûté à chacune ou à leur somme un quarré connu, les trois diverses sommes soient chacune un quarré parfait.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & a le côté du quarré connu; les trois sommes $z + aa$, $y + aa$, $z + y + aa$, doivent fournir chacune un quarré. C'est pourquoi nommant $a + x$ le côté du premier, & $a + v$ le côté du second; la premiére égalité sera $z + aa \propto aa + 2ax + xx$. Ou $z \propto 2ax + xx$. Et la seconde $y + aa \propto aa + 2av + vv$. Ou $y \propto 2av + vv$. Et afin que la troisiéme somme $z + y + aa$, ou sa valeur $2ax + xx + 2av + vv + aa$, soit encore un quarré; on nommera son côté $t - x$. Et l'égalité sera $tt - 2tx + xx \propto 2ax + xx + 2av + vv + aa$. Ou $2ax + 2tx \propto tt - vv - 2av - aa$. Et $x \propto \dfrac{tt - vv - 2av - aa}{2a + 2t}$. &c. Et les deux grandeurs t & v sont arbitraires. Mais t doit surpasser $a + v$.

Suppositions.

1ere $\{ z + aa \propto aa + 2ax + xx$. 2e $\{ y + aa \propto aa + 2av + vv$. 3e $\{ z + y + aa \propto rr$.

Résolution infinie.

$\{ t.\ v.\ \textit{arbitraires}.\ x \propto \dfrac{tt - vv - 2av - aa}{2a - 2t}$. $\{ 1^{ere}\ z \propto 2ax + xx.\ 2^e\ y \propto 2av + vv.$

Exemple.

$\{ a \propto 1.\ v \propto 1.\ t \propto 4.\ x \propto \frac{6}{5}.\ \{ z \propto \frac{96}{25}.\ y \propto 3.\ \{ z + aa \propto \frac{121}{25}.\ y + aa \propto 4.\ z + y + aa \propto \frac{196}{25}.$

XXVI

XXVI QUESTION.

51. *ET si on vouloit encore ajoûter aux trois conditions de la question précédente, que le quarré connu étant ajoûté à la différence des grandeurs, la somme fust un quarré parfait.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde, & a le côté du quarré connu, & x le côté du quarré $z + aa$, & $x + v$ le côté du quarré $z + y + aa$; on aura une premiére égalité $z + aa \propto xx$. Et $z \propto xx - aa$. Et la seconde égalité sera $z + y + aa \propto xx + 2vx + vv$. Et $z \propto xx + 2vx + vv - y - aa \propto xx - aa$. Et $y \propto 2vx + vv$. Et afin que la somme $y + aa$ ou sa valeur $2vx + vv + aa$ soit un quarré, je nomme $a + vt$ son côté; & l'égalité est $2vx + vv + aa \propto aa + 2avt + vvtt$. Ou $2x \propto 2at + vtt - v$. Et $x \propto \frac{2at + vtt - v}{2}$. Et mettant pour x sa valeur dans la somme quarrée $z - y + aa \propto xx - aa - 2vx - vv + aa \propto xx - 2vx - vv$, ce même quarré $z - y + aa$ sera $\frac{vvt^4 - 6vvtt + vv + 4avt^3 - 12avt + 4aatt}{4}$. Et parceque le dénominateur est le quarré de 2, il faudra faire en sorte que le numérateur soit encore un quarré. C'est pourquoi prenant $sv - 2at$ pour son côté, afin de réduire l'inconnuë v au linéaire, on trouvera $vvt^4 - 6vvtt + vv + 4avt^3 - 12avt + 4aatt \propto ssvv - 4asvt + 4aatt$. Et par transposition $6vtt - vt^4 - v + ssv \propto 4at^3 - 12at + 4ast$. Et $v \propto \frac{4at^3 - 12at + 4ast}{6tt - t^4 - 1 + ss}$. &c. Et les deux grandeurs s & t sont arbitraires. Mais s surpasse $\sqrt{t^4 + 1 - 6tt}$, & elle surpasse encore $\frac{3 - tt}{t}$. Ou l'arbitraire s est moindre que chacune de ces mêmes grandeurs.

Suppositions.

{1^er^ *quarré* $z + aa$. {2^d^ $z + y + aa$. {3^e^ $y + aa$. {4^e^ $z - y + aa$.

Résolution infinie. { s. t. *arbitraires.* $v \propto \frac{4at^3 + 4ast - 12at}{6tt - t^4 - 1 + ss}$. $x \propto \frac{vtt + 2at - v}{2}$.
1^ere^ *grandeur* $z \propto xx - aa$. 2^e^ *grandeur* $y \propto 2vx + vv$.

Exemple. { $a \propto 1$. {$t \propto 3$. $s \propto 6$. {$v \propto 18$. $x \propto 75$. {1^ere^ $z \propto 5624$. 2^e^ $y \propto 3024$.
$z + aa \propto 5625$. $z + y + aa \propto 8649$. $y + aa \propto 3025$. $z - y + aa \propto 2601$.

XXVII QUESTION.

PREMIER CAS.

52. *POur diviser une grandeur connuë en deux, & trouver un quarré, auquel ayant ajoûté chacune des parties, les sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé $2a$ la grandeur connuë, & $2y$ la différence des parties, & z le côté du quarré; les parties sont $a + y$ & $a - y$. Et les sommes zz

$+a+y$ & $zz+a-y$ sont chacune un quarré. C'est pourquoi nommant $x-z$ le côté du premier, & $v-z$ le côté du second; on aura une premiére égalité $zz+a+y \propto zz-2xz+xx$. Ou $y \propto xx-2xz-a$. Et la seconde égalité sera $zz+a-y \propto zz-2vz+vv$. Ou $y \propto 2vz-vv+a \propto xx-2xz-a$. Et $2yz+2vz \propto xx+vv-2a$. Et $z \propto \frac{xx+vv-2a}{2x+2v}$. &c. Et les grandeurs x & v sont arbitraires. Mais $x-z$ surpassant $v-z$, il faut que l'arbitraire x surpasse l'arbitraire v. Et $xx+vv$ doit surpasser $2a$. Et comme a doit surpasser y ou sa valeur $\frac{vxx-vvx+ax-av}{x+v}$; si on multiplie de part & d'autre par $x+v$, le produit $ax+av$ surpassera le numérateur $vxx-vvx+ax-av$. Et par transposition $2av$ surpassera $vxx-vvx$. Et divisant par v, on trouvera que $2a$ doit surpasser $xx-vx$. Et par transposition vx surpasse $xx-2a$. De sorte que l'arbitraire v surpasse $\frac{xx-2a}{x}$.

b. 21. 1. Ou ce qui revient au même; l'arbitraire x vaut moins [b] que $\frac{1}{2}v + \sqrt{\frac{1}{4}vv+2a}$.

1ere *supposition*. $\{ zz+a+y \propto zz-2xz+xx$. 2e $\{ zz+a-y \propto zz-2vz+vv$.

Résolution infinie. $\left\{ \begin{array}{l} x.\ v.\ \textit{arbitraires}.\ z \propto \frac{xx+vv-2a}{2x+2v}.\ y \propto \frac{vxx-vvx+ax-av}{x+v}. \\ 1^{ere}\ \textit{partie}\ a+y \propto \frac{vxx-vvx+2ax}{x+v}.\ 2^{e}\ a-y \propto \frac{vvx-vxx+2av}{x+v}. \end{array} \right.$

Exemple. $\left\{ \begin{array}{l} 2a \propto 20.\ \{ v \propto 6.\ x \propto 7.\ \{ z \propto \frac{5}{2}.\ y \propto 4.\ \{ 1^{ere}\ a+y \propto 14.\ 2^{e}\ a-y \propto 6. \\ \textit{Quarrez}\ zz+a+y \propto \frac{81}{4}.\ zz+a-y \propto \frac{49}{4}.\ (\textit{côtez}\ x-z \propto \frac{9}{2}.\ v-z \propto \frac{7}{2}. \end{array} \right.$

Exemple. $\left\{ \begin{array}{l} 2a \propto 20.\ \{ x \propto 5.\ v \propto 3.\ \{ z \propto \frac{7}{8}.\ y \propto \frac{25}{4}.\ \{ 1^{ere}\ a+y \propto \frac{65}{4}.\ 2^{e}\ a-y \propto \frac{15}{4}. \\ \textit{Quarrez}\ zz+a+y \propto \frac{1089}{64}.\ zz+a-y \propto \frac{289}{64}.\ \textit{Côtez}\ x-z \propto \frac{33}{8}.\ v-z \propto \frac{17}{8}. \end{array} \right.$

SECOND CAS.

53. *ET si les deux parties de la grandeur connuë sont retranchées chacune du quarré; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant dénommé les grandeurs, & formé ses raisonnemens comme au premier cas; on trouvera la résolution. Et comme a surpasse y ou sa valeur $\frac{ax-av+vvx-vxx}{x+v}$; multipliant par $x+v$ de part & d'autre, & transposant ensuitte; on reconnoîtra que $2av$ surpasse $vvx-vxx$. Et $2a$ par conséquent surpasse $vx-xx$. Et v vaut moins que $\frac{2a+xx}{x}$. Ou ce qui revient au même; l'arbitraire x vaut plus que la grandeur $\frac{1}{2}v+\sqrt{\frac{1}{4}vv-2a}$.

Et afin que la grandeur y ſoit réelle, il faut que la grandeur $ax + vvx$ ſurpaſſe $av + vxx$. Et $vv \frac{-av - vxx + ax}{x}$ ſurpaſſe o. Et v par conſéquent [b] ſurpaſſe $\frac{a + xx + \sqrt{aa + 2axx + x^4 - 4axx}}{2x} \propto \frac{a}{x}$. Ou ce qui revient au même, b. 23. 1.
x eſt moindre que $\frac{a}{v}$.

1^ere^ *Suppoſition.* $\{zz - a - y \propto zz - 2xz + xx$. 2^e^ $\{zz - a + y \propto zz - 2vz + vv$.

Réſolution infinie. $\begin{cases} v.\ x.\ \textit{arbitraires.}\ z \propto \dfrac{vv + xx + 2a}{2x + 2v}.\ y \propto \dfrac{vvx - vxx + ax - av}{x + v}. \\ 1^{ere}\ \textit{partie}\ a + y \propto \dfrac{vvx - vxx + 2ax}{x + v}.\ 2^{e}\ a - y \propto \dfrac{vxx - vvx + 2av}{x + v}. \end{cases}$

Exemple. $\begin{cases} 2a \propto 10.\ \{v \propto 1.\ x \propto 3.\ \{z \propto \frac{5}{2}.\ y \propto 1.\ \{1^{ere}\ a + y \propto 6.\ 2^{e}\ a - y \propto 4. \\ \textit{Quarrez}\ zz - a - y \propto \frac{1}{4}.\ zz - a + y \propto \frac{9}{4}.\ \{\textit{Côtez}\ x - z \propto \frac{1}{2}.\ z - v \propto \frac{3}{2}. \end{cases}$

TROISIEME CAS.

54\. *ET ſi la grande partie eſt ajoûtée au quarré, & que la moindre en ſoit retranchée; pour faire en ſorte que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant pris $z + x$ pour côté du quarré $zz + a + y$, & $v - z$ ou $z - v$ pour côté du quarré $zz - a + y$; on peut former comme auparavant la réſolution infinie. Et l'arbitraire x eſt moindre [b] que la grandeur $-\frac{1}{2}v$ b. 22. 1.
$+ \sqrt{\frac{1}{4}vv + 2a}$. Mais elle [b] ſurpaſſe $\frac{-a - vv + \sqrt{aa + 2avv + v^4 + 4avv}}{2v}$.
Et la même x eſt moindre que $\sqrt{vv + 2a}$.

1^ere^ *Suppoſition.* $\{zz + a + y \propto zz + 2xz + xx$. 2^e^ $\{zz - a + y \propto zz - 2vz + vv$.

Réſolution infinie. $\begin{cases} v.\ x.\ \textit{arbitraires.}\ z \propto \dfrac{vv + 2a - xx}{2x + 2v}.\ y \propto \dfrac{vvx + vxx + ax - av}{x + v}. \\ 1^{ere}\ \textit{partie}\ a + y \propto \dfrac{vvx + vxx + 2ax}{x + v}.\ 2^{e}\ a - y \propto \dfrac{2av - vvx - vxx}{x + v}. \end{cases}$

Exemple. $\begin{cases} 2a \propto 6.\ \{v \propto \frac{1}{2}.\ x \propto 1.\ \{z \propto \frac{7}{4}.\ y \propto \frac{3}{2}.\ \{1^{ere}\ a + y \propto \frac{9}{2}.\ 2^{e}\ a - y \propto \frac{3}{2}. \\ \textit{Quarrez}\ zz + a + y \propto \frac{121}{16}.\ zz - a + y \propto \frac{25}{16}.\ \{\textit{Côtez}\ z + x \propto \frac{11}{4}.\ z - v \propto \frac{5}{4}. \end{cases}$

QUATRIEME CAS.

55\. *ET ſi la grande partie eſt ôtée du quarré, & que la moindre luy ſoit ajoûtée; pour faire en ſorte que le reſte & la ſomme ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant pris $z - x$ ou $x - z$ pour côté du quarré $zz - a - y$, & $z + v$

pour côté du quarré $zz + a - y$; on formera facilement la résolution, comme aux cas précédens. Et afin que la grandeur y soit positive, l'arbitraire x sera moindre[b] que la grandeur $\frac{a - vv + \sqrt{aa - 6avv + v^4}}{2v}$, & surpassera $\sqrt{vv - 2a}$; parce que les numérateurs $ax - av - vxx - vvx$, & $xx + 2a - vv$ doivent être positifs.

b. 22. 1.

1^ere^ supposition. $\{ zz - a - y \propto zz - 2xz + xx$. 2^e $zz + a - y \propto zz + 2vz + vv$.

Résolution infinie. $\left\{ \begin{array}{l} v.\ x.\ \textit{arbitraires}.\ z \propto \frac{xx - vv + 2a}{2x + 2v}.\ y \propto \frac{ax - av - vxx - vvx}{x + v}. \\ 1^{ere}\ \textit{partie}\ a + y \propto \frac{2ax - vxx - vvx}{x + v}.\ 2^e\ a - y \propto \frac{2av + vxx + vvx}{x + v}. \end{array} \right.$

Exemple. $\left\{ \begin{array}{l} 2a \propto 14.\ v \propto \frac{3}{4}.\ x \propto 1.\ \{ z \propto \frac{33}{8}.\ y \propto \frac{2}{8}.\ \{ 1^{ere}\ a + y \propto \frac{58}{8}.\ 2^e\ a - y \propto \frac{54}{8}. \\ \textit{Quarrez}\ zz - a - y \propto \frac{625}{64}.\ zz + a - y \propto \frac{1521}{64}.\ \{ \textit{Côtez}\ z - x \propto \frac{25}{8}.\ z + v \propto \frac{39}{8}. \end{array} \right.$

XXVIII QUESTION.

PREMIER CAS.

56. *Pour trouver deux grandeurs, dont le plan étant ajoûté à la somme des quarrez, donne un quarré parfait.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & la différence $2y$, & $y + x$ le côté du quarré parfait, qui comprend la somme des quarrez & le plan des grandeurs; la grande est $z + y$, la moindre $z - y$, le plan $zz - yy$. Et la somme des quarrez $zz + 2zy + yy$ & $zz - 2zy + yy$ & du plan $zz - yy$ est $3zz + yy \propto yy + 2yx + xx$. Et $2yx \propto 3zz - xx$. Et $y \propto \frac{3zz - xx}{2x}$. Et l'arbitraire z surpasse déja $\sqrt{\frac{1}{3}xx}$ ou $\frac{1}{3}x\sqrt{3}$. Et la même z surpasse encore y ou sa valeur $\frac{3zz - xx}{2x}$. Et par conséquent $2zx$ surpasse $3zz - xx$. Et $xx + 2zx$ surpasse $3zz$. Et x déja moindre que $z\sqrt{3}$ surpasse $-z + \sqrt{4zz} \propto z$.

Supposition. *Résolution infinie.*

$\{ 3zz + yy \propto yy + 2yx + xx$. $\{ z.\ x.\ \textit{arbitraires}.\ y \propto \frac{3zz - xx}{2x}$.

Exemple. $\{ z \propto 4.\ x \propto 6.\ y \propto 1.\ \{ 1^{ere}\ z + y \propto 5.\ 2^e\ z - y \propto 3.\ \{ 3zz + yy \propto 49$.

SECOND CAS.

57. *Et si on ajoûte au plan des grandeurs la différence des quarrez; afin que la somme soit un quarré parfait.*

On prendra $x - z$ ou $z - x$ pour côté de ce nouveau quarré. Et la différence $4yz$ des deux quarrez $yy + 2yz + zz$ & $yy - 2yz + zz$ recevant le plan $zz - yy$ des grandeurs $y + z$ & $z - y$, on formera l'égalité $zz - yy + 4yz \propto xx - 2xz + zz$. Et $4yz + 2xz \propto xx + yy$. Et $z \propto \frac{xx + yy}{4y + 2x}$. Et

XXIX QUESTION.

PREMIER CAS.

60. *Pour trouver deux quarrez, tels qu'ayant ajoûté chacun au produit des deux, les sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé zz le premier des quarrez, & yy le second; leur plan est $zzyy$, & les sommes $zzyy + zz$ & $zzyy + yy$ sont chacune un quarré par la supposition. C'est pourquoy si la premiére est divisée par le quarré zz, & la seconde par le quarré yy; les deux exposans $yy + 1$ & $zz + 1$ sont des quarrez parfaits. Et si on nomme $x - y$ le côté du premier, & $v - z$ le côté du second; la premiére égalité sera $yy + 1 \propto yy - 2xy + xx$. Ou $2xy \propto xx - 1$. Et $y \propto \frac{xx - 1}{2x}$. Et la seconde sera $zz + 1 \propto vv - 2vz + zz$. Ou $2vz \propto vv - 1$. Et $z \propto \frac{vv - 1}{2v}$. Et chacune des arbitraires x & v surpasse l'unité.

1ere supposition. — *2e supposition.*

$\{zzyy + zz \propto zzxx - 2zzxy + zzyy$. $\{zzyy + yy \propto yyvv - 2yyvz + yyzz$.

Résolution infinie. $\{v.\ x.$ *arbitraires.* $\{$*Côtez* $z \propto \frac{vv - 1}{2v}$. $y \propto \frac{xx - 1}{2x}$.

Exemples. $\begin{cases} x \propto 2.\ v \propto 3.\ \{z \propto \frac{4}{3}.\ y \propto \frac{3}{4}.\ \{zzyy + zz \propto \frac{25}{9}.\ zzyy + yy \propto \frac{25}{16}. \\ x \propto 3.\ v \propto 4.\ \{z \propto \frac{15}{8}.\ y \propto \frac{4}{3}.\ \{zzyy + zz \propto \frac{625}{64}.\ zzyy + yy \propto \frac{289}{36}. \end{cases}$

SECOND CAS.

61. *Et si chacun des quarrez est retranché du produit des deux; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La résolution sera découverte de la même sorte. Et parce que $zz - 1$ & $yy - 1$ seront des quarrez parfaits; les côtez z & y ou leurs valeurs $\frac{vv + 1}{2v}$ & $\frac{xx + 1}{2x}$ surpasseront chacun l'unité. Et par conséquent $vv + 1$
b. 23. 1. surpassera $2v$. Et [b] l'arbitraire v surpassera $1 + \sqrt{1 - 1} \propto 1$. Et l'autre x par la même raison surpassera encore l'unité.

1ere supposition. — *2e supposition.*

$\{zzyy - zz \propto zzxx - 2zzxy + zzyy$. $\{zzyy - yy \propto yyvv - 2yyvz + yyzz$.

Résolution infinie. $\{v.\ x.$ *arbitraires.* $\{$*Côtez* $z \propto \frac{vv + 1}{2v}$. $y \propto \frac{xx + 1}{2x}$.

Exemples. $\begin{cases} x \propto 2.\ v \propto 3.\ \{z \propto \frac{5}{3}.\ y \propto \frac{5}{4}.\ \{zzyy - zz \propto \frac{25}{16}.\ zzyy - yy \propto \frac{25}{9}. \\ x \propto 3.\ v \propto 4.\ \{z \propto \frac{17}{8}.\ y \propto \frac{5}{3}.\ \{zzyy - zz \propto \frac{289}{36}.\ zzyy - yy \propto \frac{625}{64}. \end{cases}$

TROISIEME CAS.

62. *ET si le premier des quarrez est ajoûté au produit, & que le second soit retranché du même produit; pour faire en sorte que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Ayant découvert, comme auparavant, la résolution; les arbitraires x & v surpasseront encore chacune l'unité.

1ere supposition. — *2e supposition.*

$\{zzyy + zz \propto zzxx - 2zzxy + zzyy.$ $\{zzyy - yy \propto yyvv - 2yyvz + yyzz.$

Résolution infinie. $\{v.\ x.$ *arbitraires.* $\{$*Côtez* $z \propto \frac{vv+1}{2v}.\ y \propto \frac{xx-1}{2x}.$

Exemples.
$\{x \propto 2.\ v \propto 3.\ \{z \propto \frac{5}{3}.\ y \propto \frac{3}{4}.\ \{zzyy + zz \propto \frac{625}{144}.\ zzyy - yy \propto 1.$
$\{x \propto 3.\ v \propto 4.\ \{z \propto \frac{17}{8}.\ y \propto \frac{4}{3}.\ \{zzyy + zz \propto \frac{7225}{576}.\ zzyy - yy \propto \frac{25}{4}.$

XXX QUESTION ET PRINCIPE V.

PREMIER CAS.

63. *POur trouver deux quarrez, dont la somme étant ajoûtée au produit des deux, donne un quarré parfait.*

Ayant nommé zz le premier des quarrez, & yy le second; il faudra que la somme $zzyy + zz + yy$ soit un quarré parfait. Et pour former le côté de ce quarré, où zz est multiplié par $yy + 1$, on pourra d'abord chercher un quarré $yy - 2yv + vv \propto yy + 1$. D'où l'on tirera une valeur $y \propto \frac{vv-1}{2v}$. Et $v - y \propto \sqrt{yy+1} \propto \frac{vv+1}{2v}$. Et prenant alors x pour $\frac{vv+1}{2v}$ ou pour $\sqrt{yy+1}$, afin d'abbréger; la somme quarrée $zzyy + 1zz + yy$ sera $zzxx + yy$. Et si on nomme $t - zx$ le côté de ce même quarré; l'égalité sera $zzxx + yy \propto tt - 2tzx + zzxx$. Ou $2tzx \propto tt - yy$. Et $z \propto \frac{tt-yy}{2tx}$. Et mettant pour y & pour x leurs valeurs $\frac{vv-1}{2v}$ & $\frac{vv+1}{2v}$; la résolution infinie sera pleinement découverte. Mais afin que la grandeur y soit positive, le numérateur $vv - 1$ de sa valeur doit être positif. Et par consé-

Supposition. — *Résolution infinie.*

$\{zzyy + zz + yy \propto rr.$ $\{t.\ v.$ *arbitraires.* $y \propto \frac{vv-1}{2v}.\ z \propto \frac{4ttvv - v^4 + 2vv - 1}{4tv^3 + 4tv}.$

Exemple.

$\{t \propto 2.\ v \propto 3.\ \{z \propto \frac{1}{3}.\ y \propto \frac{4}{3}.\ \{$*Quarré* $zzyy + zz + yy \propto \frac{169}{81}.$ *Côté* $r \propto \frac{13}{9}.$

quent l'arbitraire v surpasse l'unité. Et pour avoir encore une valeur positive de z, il faut que le numérateur $4ttvv - v^4 + 2vv - 1$ soit positif, ou que $4ttvv$ surpasse $v^4 - 2vv + 1$. D'où il est clair que la racine quarrée $2tv$ d'une part surpasse la quarrée $vv - 1$ de l'autre. Et t surpasse
b. 21. 1. $\frac{vv - 1}{2v}$. Ou ce qui revient au même, v vaut moins [b] que $t + \sqrt{tt + 1}$.

SECOND CAS.

64. *ET si la somme des quarrez est ôtée du produit des deux; pour faire en sorte que le reste soit un quarré parfait.*

Afin que ce reste $zzyy - zz - yy$ soit un quarré parfait, on supposera $yy - 1$, qui multiplie zz, égal à un quarré $yy - 2yv + vv$. Et on aura $2yv \propto vv + 1$. Et $y \propto \frac{vv + 1}{2v}$. Et $v - y \propto \sqrt{yy - 1} \propto \frac{vv - 1}{2v}$ sera nommée x. Et alors le quarré $zzyy - zz - yy$ sera $zzxx - yy$. C'est pourquoi nommant $t - zx$ ou $zx - t$ le côté de ce quarré; l'égalité sera $tt - 2tzx + zzxx \propto zzxx - yy$. Et $2tzx \propto tt + yy$. Et $z \propto \frac{tt + yy}{2tx}$. Mettant donc enfin pour y & pour x leurs valeurs $\frac{vv + 1}{2v}$ & $\frac{vv - 1}{2v}$; la résolution sera pleinement découverte. Et on prendra l'arbitraire v plus grande que l'unité, si l'on veut ne rien changer dans la formule ou dans le modéle qu'on expose ici.

Supposition. *Résolution infinie.*

$\{zzyy - zz - yy \propto rr.$ $\{t.\ v.$ *arbitraires.* $y \propto \frac{vv + 1}{2v}$. $z \propto \frac{4ttvv + v^4 + 2vv + 1}{4tv^3 - 4tv}$.

Exemple.

$\{t \propto 1.\ v \propto 3.$ $\{z \propto \frac{17}{12}.\ y \propto \frac{5}{3}.$ $\{$*Quarré* $zzyy - zz - yy \propto \frac{64}{81}$. *Côté* $r \propto \frac{8}{9}$.

TROISIEME CAS.

65. *ET si la différence des quarrez est ajoûtée au produit des deux; afin que la somme soit un quarré parfait.*

On supposera, comme au premier cas, le quarré $yy - 2yv + vv \propto yy + 1$, ou $y \propto \frac{vv - 1}{2v}$. Et on prendra encore x pour $v - y \propto \sqrt{yy + 1}$

Supposition. *Résolution infinie.*

$\{zzyy + zz - yy \propto rr.$ $\{v.\ t.$ *arbitraires.* $\{y \propto \frac{vv - 1}{2v}$. $z \propto \frac{4ttvv + v^4 - 2vv + 1}{4tv^3 + 4tv}$.

Exemple.

$\{v \propto 2.\ t \propto 3.$ $\{z \propto \frac{51}{40}.\ y \propto \frac{3}{4}.$ $\{$*Quarré* $zzyy + zz - yy \propto \frac{2025}{1024}$. *Côté* $r \propto \frac{45}{32}$.

ou

ou pour $\frac{vv+1}{2v}$. Et la somme quarrée $zzyy + zz - yy$ sera $zzxx - yy \propto zzxx - 2tzx + tt$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \frac{tt+yy}{2tx}$. Et on prendra l'arbitraire v plus grande que l'unité. Et parceque z ou sa valeur $\frac{tt+yy}{2tx}$ doit surpasser y: si on multiplie par $2tx$ de part & d'autre; le numérateur $tt+yy$ surpassera $2txy$. Et t par conséquent [b] surpassera xy b. 23. 1.
$+ y\sqrt{xx-1}$ ou $\frac{vv-1}{2}$.

QUATRIEME CAS.

66. *ET si la différence des quarrez est ôtée du produit des deux; afin que le reste soit un quarré parfait.*

On supposera, comme au second cas, le quarré $yy - 2yv + vv \propto yy - 1$, ou y égale $\frac{vv+1}{2v}$. Et prenant x pour $\frac{vv-1}{2v} \propto v - y \propto \sqrt{yy-1}$; la somme quarrée $zzyy - zz + yy$ sera $zzxx + yy \propto zzxx - 2tzx + tt$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \frac{tt-yy}{2tx}$. Et l'arbitraire v surpassera l'unité, si l'on veut se servir de la formule qu'on expose ici. Et l'arbitraire t surpassera $\frac{vv+1}{2v} \propto y$. Et parceque z ou sa valeur $\frac{tt-yy}{2tx}$ doit surpasser y; le numérateur $tt - yy$ surpasse le produit $2txy$. Et t par [b] conséquent b. 21. 1.
surpasse $xy + y\sqrt{xx+1}$ ou $\frac{vv+1}{2}$.

Supposition.	*Résolution infinie.*
$zzyy - zz + yy \propto rr$.	*v. t. arbitraires.* $y \propto \frac{vv+1}{2v}$. $z \propto \frac{4ttvv - v^4 - 2vv - 1}{4tv^3 - 4tv}$.

Exemple.

$v \propto 2$. $t \propto 5$. $z \propto \frac{25}{8}$. $y \propto \frac{5}{4}$. *Quarré* $zzyy - zz + yy \propto \frac{7225}{1024}$. *Côté* $r \propto \frac{85}{32}$.

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE QUATRIEME.

DE LA RESOLUTION DES DOUBLES EGALITEZ.

DEFINITIONS.

1. ON nommera *double égalité*, la comparaiſon de deux grandeurs, qui renferment une même inconnuë, à deux divers quarrez qui ſont inconnus. Et la régle, qui découvrira ces quarrez inconnus, ſera nommée *régle de double égalité.* Comme s'il faut découvrir deux quarrez, dont l'un ſoit égal à une grandeur az, & l'autre à une grandeur bz; en ſorte que l'inconnuë z de la grandeur az ſoit la même z qui eſt inconnuë dans bz. Et s'il falloit découvrir de la même ſorte deux quarrez, dont l'un fuſt égal à une grandeur $az + c$, & l'autre à une autre grandeur $bz + d$. Et s'il y avoit trois diverſes grandeurs, dont chacune renfermaſt une même inconnuë, & qu'il falluſt égaler chacune à un quarré; on diroit que c'eſt *une triple égalité.* Et la régle qui découvriroit ces quarrez, ſeroit nommée *régle de triple égalité.* Et ce ſeroit la même choſe, s'il y avoit quatre grandeurs, ou cinq, ou ſix, ou autant qu'on voudroit. On doit toûjours obſerver que les premiéres lettres de l'Alphabeth dénomment des grandeurs connuës, & les derniéres des grandeurs inconnuës.

Doubles égalitez. $\left\{\begin{array}{ll} az \propto yy. & bz \propto xx. \\ 6z \propto yy. & 54z \propto xx. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{ll} az + c \propto yy. & bz + d \propto xx. \\ 4z + 8 \propto yy. & 1z + 3 \propto xx. \end{array}\right.$

DES DOUBLES EGALITEZ
OÙ L'INCONNUE N'EST QUE LINEAIRE.

I QUESTION.

2. *Pour trouver une grandeur, laquelle étant multipliée par deux grandeurs connuës, donne deux produits, qui soient chacun un quarré parfait.*

Ayant nommé a & b les deux grandeurs connuës, & z l'inconnuë qui les multiplie; le premier plan az sera égal à un quarré yy. Ce qui donnera une valeur $z \propto \frac{yy}{a}$. Et le second plan bz sera égal à un quarré xx. Ce qui donnera une valeur $z \propto \frac{xx}{b} \propto \frac{yy}{a}$. Et multipliant de part & d'autre par b, on aura le quarré $xx \propto \frac{byy}{a}$. Et le côté $x \propto \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. De sorte que pour trouver une résolution, ou les grandeurs soient toutes commensurables, il est nécessaire que la grandeur $\sqrt{\frac{b}{a}}$ soit un quarré parfait, ou que les grandeurs a & b soient deux plans semblables. Et sans cette condition, la résolution seroit impossible.

Supposition.	*Résolution infinie.*
$az \propto yy$. $bz \propto xx$.	y *arbitraire.* $x \propto \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. $z \propto \frac{yy}{a} \propto \frac{xx}{b}$.
$6z \propto yy$. $54z \propto xx$.	$y \propto 8$. $x \propto 24$. $z \propto \frac{32}{3}$. $6z \propto 64$. $54z \propto 576$.

II QUESTION.
PREMIER CAS.
PREMIERE ESPECE DE RESOLUTION.

3. *Pour trouver une grandeur, telle qu'étant multipliée par deux grandeurs connuës, & les plans recevant l'un une grandeur connuë, & l'autre encore une grandeur connuë; les sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé z l'inconnuë qui multiplie les connuës a & b; si on ajoûte la connuë c au plan az, & la connuë d au plan bz; pour faire en sorte que les sommes $az + c$ & $bz + d$ soient chacune un quarré. On prendra y pour le côté du premier quarré $az + c$, & x pour le côté du second $bz + d$. Et la premiére égalité sera $az + c \propto yy$. Ou $az \propto yy - c$. Et $z \propto \frac{yy - c}{a}$. Et la seconde égalité sera $bz + d \propto xx$. Ou $bz \propto xx - d$. Et $z \propto \frac{xx - d}{b} \propto \frac{yy - c}{a}$. Et les deux membres étant multipliez par ab, fourniront l'égalité $axx - ad \propto byy - bc$. Ou $byy \propto axx - ad + bc$. Et $yy \propto \frac{axx - ad + bc}{b}$. Et pour tenter la résolution de cette égalité, en telle ſorte que la grandeur y ſoit commenſurable ; on verra ſi a & b ſont deux plans ſemblables, ou ſi $bc - ad$ & b en ſont deux ſemblables.

Et ſi a & b ſont deux plans ſemblables, ou ſi la fraction $\frac{a}{b}$ eſt un quar-
b 1ere partie. 89 & 86. 8. ré parfait, ce qui revient[b] au même ; ayant nommé gg ce quarré $\frac{a}{b}$, & ſubſtitué gg pour $\frac{a}{b}$ dans l'égalité précédente $yy \propto \frac{axx - ad + bc}{b}$, la même égalité ſera $yy \propto ggxx - ggd + c$. Suppoſant donc $v - gx$ ou $gx - v$ pour côté de ce même quarré, on aura $yy \propto ggxx - ggd + c$ $\propto ggxx - 2gvx + vv$. Et $2gvx \propto vv + ggd - c$. Et $x \propto \frac{vv + ggd - c}{2gv}$, où mettant pour gg ſa valeur $\frac{a}{b}$, on aura une valeur $x \propto \frac{bvv + ad - bc}{2bgv}$. Et la grandeur v eſt arbitraire. Mais elle doit néantmoins avoir certaines bornes, parceque la grandeur $xx - d$ étant poſitive, le quarré xx ſurpaſſe d ; & le côté x ou ſa valeur $\frac{bvv + ad - bc}{2bgv}$ ſurpaſſe $\sqrt{d}$. Et multipliant de part & d'autre par $2gv$, le premier produit $vv + \frac{ad}{b} - c$ ſurpaſſe $2gv\sqrt{d}$. Et par conſéquent l'arbitraire v ſurpaſſe $g\sqrt{d} + \sqrt{ggd - \frac{ad}{b} + c}$ ou $g\sqrt{d} + \sqrt{c}$. Si bc ſurpaſſoit ad ; on changeroit a en b, & b en a ; & c en d, & d en c ; pour régler plus facilement ſa réſolution ſur le modéle qu'on expoſe.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$\{ az + c \propto yy.\ bz + d \propto xx.\ \{ \frac{a}{b} \propto gg.\ \{ v$ *arbitraire.* $x \propto \frac{bvv + ad - bc}{2bgv}.\ z \propto \frac{xx - d}{b}.$

Exemples.

$az + c.$	$bz + d.$	$g.$	$v.$	$x.$	$z.$	$az + c \propto yy.$	$bz + d \propto xx.$	$y.$	$x.$
$1z + 2.$	$1z + 3.$	1.	4.	$2\frac{1}{8}.$	$\frac{97}{64}.$	$1z + 2 \propto \frac{225}{64}.$	$1z + 3 \propto \frac{289}{64}.$	$\frac{15}{8}.$	$\frac{17}{8}.$
$10z + 6.$	$10z + 54.$	1.	12.	8.	1.	$10z + 6 \propto 16.$	$10z + 54 \propto 64.$	4.	8.
$2z + 5.$	$2z + 12.$	1.	7.	4.	2.	$2z + 5 \propto 9.$	$2z + 12 \propto 16.$	3.	4.
$4z + 8.$	$1z + 3.$	2.	8.	$\frac{17}{8}.$	$\frac{97}{64}.$	$4z + 8 \propto \frac{225}{16}.$	$1z + 3 \propto \frac{289}{64}.$	$\frac{15}{4}.$	$\frac{17}{8}.$

SECOND CAS.

4. *Et ſi on retranche de chacun des deux plans une grandeur connuë ; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Les raiſonnemens ſeront ordonnez à peu prés comme au premier cas. Et ſuppoſant que les grandeurs a & b ſoient deux plans ſemblables, la réſolution ſera pareille à la précédente, en changeant quelques ſignes. Et l'arbitraire v ſurpaſſera $\sqrt{\frac{ad - bc}{b}}$.

Suppoſitions. — *Réſolution infinie.*

$$\left\{ az - c \propto yy.\ bz - d \propto xx.\ \left\{\frac{a}{b} \propto gg.\ \right\{ v \text{ arbitraire. } x \propto \frac{bvv - ad + bc}{2bgv}.\ z \propto \frac{xx + d}{b}.\right.$$

Exemples.

$az - c$.	$bz - d$.	g.	v.	x.	z.	$az - c \propto yy$.	$bz - d \propto xx$.	y.	x.
$1z - 6$.	$1z - 7$.	1.	2.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{121}{16}$.	$1z - 6 \propto \frac{25}{16}$.	$1z - 7 \propto \frac{9}{16}$.	$\frac{5}{4}$.	$\frac{3}{4}$.
$1z - 6$.	$1z - 7$.	1.	3.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{79}{9}$.	$1z - 6 \propto \frac{25}{9}$.	$1z - 7 \propto \frac{16}{9}$.	$\frac{5}{3}$.	$\frac{4}{3}$.
$1z - 56$.	$1z - 48$.	1.	4.	3.	57.	$1z - 56 \propto 1$.	$1z - 48 \propto 9$.	1.	3.
$10z - 26$.	$10z - 14$.	1.	6.	4.	3.	$10z - 26 \propto 4$.	$10z - 14 \propto 16$.	2.	4.

TROISIEME CAS.

5. *ET ſi chacun des plans eſt retranché d'une grandeur connuë ; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

On prendra y pour côté du quarré $c - az$, & x pour côté du quarré $d - bz$. Et ſuppoſant toûjours que les grandeurs a & b ſoient deux plans ſemblables, ou que le plan ab ſoit [a] un quarré parfait, on achevera la ré- a. 1ere partie.
ſolution comme aux cas précédens. Et comme x ou ſa valeur $\frac{bvv + ad - bc}{2bgv}$ 89 & 86. 8.
ſera moindre que $\sqrt{d}$; on trouvera que [b] l'arbitraire x eſt moindre que $g\sqrt{d}$ b. 23. 1.
$+ \sqrt{c}$. Mais elle ſurpaſſe $\sqrt{\frac{bc - ad}{b}}$.

Suppoſitions. — *Réſolution infinie.*

$$\left\{ c - az \propto yy.\ d - bz \propto xx.\ \left\{\frac{a}{b} \propto gg.\ \right\{ v \text{ arbitraire. } x \propto \frac{bvv + ad - bc}{2bgv}.\ z \propto \frac{d - xx}{b}.\right.$$

Exemples.

$c - az$.	$d - bz$.	g.	v.	x.	z.	$c - az \propto yy$.	$d - bz \propto xx$.	y.	x.
$65 - 24z$.	$65 - 6z$.	2.	15.	7.	$\frac{8}{3}$.	$65 - 24z \propto 1$.	$65 - 6z \propto 49$.	1.	7.
$9 - 1z$.	$21 - 1z$.	1.	6.	4.	5.	$9 - 1z \propto 4$.	$21 - 1z \propto 16$.	2.	4.
$9 - 1z$.	$21 - 1z$.	1.	2.	4.	5.	$9 - 1z \propto 4$.	$21 - 1z \propto 16$.	2.	4.
$24 - 8z$.	$9 - 2z$.	2.	6.	2.	$\frac{5}{2}$.	$24 - 8z \propto 4$.	$9 - 2z \propto 4$.	2.	2.

QUATRIEME CAS.

6. *ET ſi on ajoûte une grandeur connuë à l'un des deux plans, & qu'on ôte une connuë de l'autre ; afin que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant pris y pour côté du quarré $az + c$, & x pour côté du quarré $bz - d$. Si a & b ſont deux plans ſemblables ; on trouvera la réſolution comme aux cas précédens. Et l'arbitraire v sera moindre que $\sqrt{\frac{ad+bc}{b}}$.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$\{az+c \propto yy.\ bz-d \propto xx.\ \left\{\frac{a}{b}\right. \propto gg.\ \{ v$ *arbitraire*. $x \propto \frac{ad+bc-bvv}{2bgv}.\ z \propto \frac{xx+d}{b}.$

Exemples.

$az+c$.	$bz-d$.	g.	v.	x.	z.	$\{az+c \propto yy$.	$bz-d \propto xx$.	$\{y$.	x.
$8z+24$.	$2z-9$.	2.	6.	1.	5.	$\{8z+24 \propto 64$.	$2z-9 \propto 1$.	$\{8$.	1.
$8z+24$.	$2z-9$.	2.	2.	7.	29.	$\{8z+24 \propto 256$.	$2z-9 \propto 49$.	$\{16$.	7.

CINQUIEME CAS.

7. *ET si on ajoûte à l'un des plans une grandeur connuë, & qu'on ôte l'autre plan d'une grandeur connuë; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Ayant pris y pour côté du quarré $az+c$, & x pour côté du quarré $d-bz$; la premiére égalité sera $yy \propto az+c$. Et on en tirera une valeur $z \propto \frac{yy-c}{a}$. Et on tirera ensuitte de l'autre égalité $xx \propto d-bz$ une valeur $z \propto \frac{d-xx}{b} \propto \frac{yy-c}{a}$. Et $yy \propto \frac{ad-axx+bc}{b}$. Ou $xx \propto \frac{ad+bc-byy}{a}$. De sorte que si a & b sont deux plans semblables, on ne pourra pas employer la même voie qu'on a suivie pour la résolution des cas précédens, puisqu'on trouve $-\frac{axx}{b}$ & $-\frac{byy}{a}$.

SIXIEME CAS.

8. *ET si on ôte une grandeur connuë de l'un des deux plans, & qu'on ôte l'autre plan d'une grandeur connuë; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On ne pourra pas suivre dans la résolution de ce cas la voie qu'on a suivie pour celle des quatre premiers; puisque les deux égalitez $az-c \propto yy$ & $d-bz \propto xx$ fourniront la valeur $z \propto \frac{yy+c}{a} \propto \frac{d-xx}{b}$, & qu'ainsi on trouvera un quarré $yy \propto \frac{ad-bc-axx}{b}$, ou un quarré $xx \propto \frac{ad-bc-byy}{a}$.

SECONDE ESPECE DE RESOLUTION.

PREMIER CAS.

9. *POur le premier cas, où chaque plan reçoit une grandeur connuë; afin que les sommes soient des quarrez parfaits.*

Lorsque les grandeurs a & b ne sont pas des plans semblables, ou que
b. 1ere partie. le produit ab n'est [b] pas un quarré parfait; si les grandeurs $bc-ad$ & b
98 & 86. 8. sont deux plans semblables, ou que le produit $bbc-abd$ soit un [b] quarré

parfait. Ayant nommé hh le quarré parfait $\frac{bc - ad}{b}$, & pris $tx - h$ pour y; l'égalité $yy \propto \frac{axx + bc - ad}{b}$ qu'on avoit déja découverte, sera $yy \propto \frac{axx}{b} + hh \propto ttxx - 2htx + hh$. Et $2bhtx \propto bttxx - axx$. D'où l'on tire une valeur $x \propto \frac{2bht}{btt - a}$. Et l'arbitraire t surpasse $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Et x ou sa valeur $\frac{2bht}{btt - a}$ surpasse $\sqrt{d}$. Et multipliant de part & d'autre par $btt - a$, le numérateur $2bht$ surpasse le produit $btt\sqrt{d} - a\sqrt{d}$. Et divisant le tout par $b\sqrt{d}$, l'exposant $\frac{2ht}{\sqrt{d}}$ surpasse $tt - \frac{a}{b}$. Et par conséquent l'arbitraire t vaut [b] moins que $\frac{h}{\sqrt{d}} + \sqrt{\frac{bhh + ad}{bd}} \propto \frac{h + \sqrt{c}}{\sqrt{d}}$. Si ad surpassoit bc, on b. 21. 1.
prendroit a pour b, & b pour a; & c pour d, & d pour c.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\{ az + c \propto yy.\ bz + d \propto xx.\ \{ \frac{bc - ad}{b} \propto hh.\ \{ t \text{ arbitraire}.\ x \propto \frac{2bht}{btt - a}.\ z \propto \frac{xx - d}{b}.$$

Exemples.

$az + c$.	$bz + d$.	h.	t.	x.	z.	{ $az + c \propto yy$.	$bz + d \propto xx$.	{ y.	x.
$2z + 5$.	$6z + 3$.	2.	1.	6.	$\frac{11}{2}$.	{ $2z + c \propto 16$.	$6z + 3 \propto 36$.	{ 4.	6.
$10z + 9$.	$5z + 4$.	1.	$\frac{3}{2}$.	12.	28.	{ $10z + 9 \propto 289$.	$5z + 4 \propto 144$.	{ 17.	12.
$6z + 25$.	$2z + 3$.	4.	3.	4.	$\frac{13}{2}$.	{ $6z + 25 \propto 64$.	$2z + 3 \propto 16$.	{ 8.	4.
$15z + 39$.	$12z + 31$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{7}{6}$.	$\frac{21}{2}$.	$\frac{317}{48}$.	{ $15z + 39 \propto \frac{2209}{16}$.	$12z + 31 \propto \frac{441}{4}$.	{ $\frac{47}{4}$.	$\frac{21}{2}$.

SECOND CAS.

10. *ET pour le second cas, où l'on retranche une grandeur connuë du premier plan, & une connuë du second; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Si a & b ne sont pas deux plans semblables, & que les deux $ad - bc$ & b en soient deux [b] semblables; l'arbitraire t surpassera $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si bc surpassoit ad; b. 1ere partie. 86. 8.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\{ az - c \propto yy.\ bz - d \propto xx.\ \{ \frac{ad - bc}{b} \propto hh.\ \{ t \text{ arbitraire}.\ x \propto \frac{2bht}{btt - a}.\ z \propto \frac{xx + d}{b}.$$

Exemple.

$az - c$.	$bz - d$.	h.	t.	x.	z.	{ $az - c \propto yy$.	$bz - d \propto xx$.	{ y.	x.
$30z - 17$.	$10z - 11$.	4.	3.	4.	$\frac{27}{10}$.	{ $30z - 17 \propto 64$.	$10z - 11 \propto 16$.	{ 8.	4.
$30z - 17$.	$10z - 11$.	4.	2.	16.	$\frac{267}{10}$.	{ $30z - 17 \propto 784$.	$10z - 11 \propto 256$.	{ 28.	16.

on n'auroit qu'à changer a en b, & b en a; & c en d, & d en c; pour rapporter ensuitte la question aux raisonnemens qu'on suit dans celle-ci.

TROISIEME CAS.

11. *ET si le premier plan est retranché d'une grandeur connuë, & le second d'une grandeur connuë; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Si dans ce cas a & b ne sont pas deux plans semblables, & que $bc - ad$ & b en soient deux semblables; l'arbitraire t surpasse chacune des grandeurs $\sqrt{\frac{a}{b}}$ & $\frac{h + \sqrt{c}}{\sqrt{d}}$. Et si ad surpassoit bc; on changeroit a en b, & b en a; & c en d, & d en c.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$c - az \propto yy.\ d - bz \propto xx.\ \frac{bc - ad}{b} \propto hh.\ t\ \text{arbitraire.}\ x \propto \frac{2bht}{btt - a}.\ z \propto \frac{d - xx}{b}.$$

Exemple.

$c - az$.	$d - bz$.	h.	t.	x.	z.	$c - az \propto yy$.	$d - bz \propto xx$.	y.	x.
$13 - 8z$.	$6 - 4z$.	1.	3.	$\frac{6}{7}$.	$\frac{129}{98}$.	$13 - 8z \propto \frac{121}{49}$.	$6 - 4z \propto \frac{36}{49}$.	$\frac{11}{7}$.	$\frac{6}{7}$.
$13 - 8z$.	$6 - 4z$.	1.	2.	2.	$\frac{1}{2}$.	$13 - 8z \propto 9$.	$6 - 4z \propto 4$.	3.	2.
$13 - 8z$.	$6 - 4z$.	1.	4.	$\frac{4}{7}$.	$\frac{139}{98}$.	$13 - 8z \propto \frac{81}{49}$.	$6 - 4z \propto \frac{16}{49}$.	$\frac{9}{7}$.	$\frac{4}{7}$.

QUATRIEME CAS.

12. *ET si on ajoûte au premier plan une grandeur connuë, & qu'on ôte une connuë du second; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Si a & b ne sont pas deux plans semblables, & que $ad + bc$ & b en

b. 1ere partie. 86. 8. soient [b] deux semblables; l'arbitraire t sera moindre que $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$az + c \propto yy.\ bz - d \propto xx.\ \frac{ad + bc}{b} \propto hh.\ t\ \text{arbitraire.}\ x \propto \frac{2bht}{a - btt}.\ z \propto \frac{xx + d}{b}.$$

Exemple.

$az + c$.	$bz - d$.	h.	t.	x.	z.	$az + c \propto yy$.	$bz - d \propto xx$.	y.	x.
$8z + 13$.	$4z - 6$.	5.	1.	10.	$\frac{53}{2}$.	$8z + 13 \propto 225$.	$4z - 6 \propto 100$.	15.	10.

CINQUIEME CAS.

13. *ET si un des plans reçoit une grandeur connuë, & que l'autre plan soit retranché d'une grandeur connuë; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Si a & b ne sont pas deux plans semblables, & que $ad + bc$ & b en soient

ſoient[b] deux ſemblables ; le côté x ou ſa valeur $\frac{2bht}{btt+a}$ vaudra moins que $\sqrt{c}$. Et $2bht$ vaudra moins que $btt\sqrt{c}+a\sqrt{c}$. Et t par conſéquent[c] ſurpaſſera $\frac{b+\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$. Si t étoit moindre, comme dans la derniére des réſolutions de l'éxemple qu'on expoſe ; la réſolution ou la valeur de z ſeroit négative.

b. 1ere partie. 86. 8.
c. 23. 1.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$$\left\{ az+c \propto yy.\ d-bz \propto xx.\ \left\{ \frac{ad+bc}{b} \propto hh.\ \left\{ t \text{ arbitraire}.\ x \propto \frac{2bht}{btt+a}.\ z \propto \frac{d-xx}{b}. \right.\right.\right.$$

Exemple.

$az+c$.	$d-bz$.	h.	t.	x.	z.	$\sqrt{az+c} \propto y$.	$\sqrt{d-bz} \propto x$.
$8z+13$.	$6-4z$.	5.	12.	$\frac{60}{73}$.	$\frac{14187}{10658}$.	$\sqrt{8z+13} \propto \frac{355}{73}$.	$\sqrt{6-4z} \propto \frac{60}{73}$.
$8z+13$.	$6-4z$.	5.	$\frac{21}{2}$.	$\frac{420}{449}$.	$\frac{516603}{403202}$.	$\sqrt{8z+13} \propto \frac{2165}{449}$.	$\sqrt{6-4z} \propto \frac{420}{449}$.
$8z+13$.	$6-4z$.	5.	4.	$\frac{20}{9}$.	$\frac{43}{162}$.	$\sqrt{8z+13} \propto \frac{35}{9}$.	$\sqrt{6-4z} \propto \frac{20}{9}$.
$8z+13$.	$6-4z$.	5.	3.	$\frac{30}{11}$.	$-\frac{87}{726}$.	$\sqrt{8z+13} \propto \frac{35}{11}$.	$\sqrt{6-4z} \propto \frac{30}{11}$.

SIXIEME CAS.

14. *ET enfin ſi on ôte de l'un des plans une grandeur connuë, & que l'autre plan ſoit ôté d'une grandeur connuë ; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Si ab n'eſt point un quarré, & que $\frac{ad-bc}{b}$ en ſoit un parfait ; l'arbitraire t n'aura point de limites.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$$\left\{ az-c \propto yy.\ d-bz \propto xx.\ \left\{ \frac{ad-bc}{b} \propto hh.\ \left\{ t \text{ arbitraire}.\ x \propto \frac{2bht}{btt+a}.\ z \propto \frac{d-xx}{b}. \right.\right.\right.$$

Exemple.

$az-c$.	$d-bz$.	h.	t.	x.	z.	$az-c \propto yy$.	$d-bz \propto xx$.	y. x.
$30z-17$.	$11-10z$.	4.	3.	2.	$\frac{7}{10}$.	$30z-17 \propto 4$.	$11-10z \propto 4$.	2. 2.
$30z-17$.	$11-10z$.	4.	5.	$\frac{10}{7}$.	$\frac{439}{490}$.	$30z-17 \propto \frac{484}{49}$.	$11-10z \propto \frac{100}{49}$.	$\frac{22}{7}$. $\frac{10}{7}$.
$30z-17$.	$11-10z$.	4.	1.	2.	$\frac{7}{10}$.	$30z-17 \propto 4$.	$11-10z \propto 4$.	2. 2.

I COROLLAIRE POUR LE V CAS.

15. *LOrſqu'un des plans reçoit une grandeur connuë, & que l'autre plan eſt retranché d'une grandeur connuë ; afin que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Si $ad + bc$ & b ne sont pas des plans semblables, & que $ad + bc$ & a en soient [b] deux semblables; l'arbitraire t sera moindre que $\frac{b + \sqrt{d}}{\sqrt{c}}$.

b. 1ere partie. 86. 8.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\{az + c \propto yy.\ d - bz \propto xx.\ \left\{\frac{ad + bc}{a} \propto hh.\ \{t \text{ arbitraire}.\ y \propto \frac{2abt}{att + b}.\ z \propto \frac{yy - c}{a}.\right.$$

Exemple.

$az + c.$	$d - bz.$	$h.$	$t.$	$y.$	$z.$	$az + c \propto yy.$	$d - bz \propto xx.$	$y.$	$x.$
$4z + 6.$	$13 - 8z.$	$5.$	$2.$	$\frac{10}{3}.$	$\frac{23}{18}.$	$4z + 6 \propto \frac{100}{9}.$	$13 - 8z \propto \frac{25}{9}.$	$\frac{10}{3}.$	$\frac{5}{3}.$
$4z + 6.$	$13 - 8z.$	$5.$	$1.$	$\frac{10}{3}.$	$\frac{23}{18}.$	$4z + 6 \propto \frac{100}{9}.$	$13 - 8z \propto \frac{25}{9}.$	$\frac{10}{3}.$	$\frac{5}{3}.$
$4z + 6.$	$13 - 8z.$	$5.$	$3.$	$\frac{30}{11}.$	$\frac{87}{242}.$	$4z + 6 \propto \frac{900}{121}.$	$13 - 8z \propto \frac{1225}{121}.$	$\frac{30}{11}.$	$\frac{35}{11}.$

II COROLLAIRE POUR LE VI CAS.

16. *Et lorsqu'on ôte une grandeur connuë de l'un des plans, & que l'autre plan est ôté d'une grandeur connuë; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Si $ad - bc$ & b ne sont pas des plans semblables, & que $ad - bc$ & a en soient deux [b] semblables; on trouvera encore une résolution infinie, où l'arbitraire t n'aura point de limites.

b. 1ere partie. 86, 8.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\{az - c \propto yy.\ d - bz \propto xx.\ \left\{\frac{ad - bc}{a} \propto hh.\ \left\{t \text{ arbitraire}.\ y \propto \frac{2abt}{att + b}.\ z \propto \frac{yy + c}{a}.\right.\right.$$

Exemple.

$az - c.$	$d - bz.$	$h.$	$t.$	$y.$	$z.$	$az - c \propto yy.$	$d - bz \propto xx.$	$y.$	$x.$
$4z - 6.$	$13 - 8z.$	$1.$	$\frac{1}{2}.$	$\frac{4}{9}.$	$\frac{251}{162}.$	$4z - 6 \propto \frac{16}{81}.$	$13 - 8z \propto \frac{49}{81}.$	$\frac{4}{9}.$	$\frac{7}{9}.$
$4z - 6.$	$13 - 8z.$	$1.$	$3.$	$\frac{6}{11}.$	$\frac{381}{242}.$	$4z - 6 \propto \frac{36}{121}.$	$13 - 8z \propto \frac{49}{121}.$	$\frac{6}{11}.$	$\frac{7}{11}.$
$4z - 6.$	$13 - 8z.$	$1.$	$1.$	$\frac{2}{3}.$	$\frac{29}{18}.$	$4z - 6 \propto \frac{4}{9}.$	$13 - 8z \propto \frac{1}{9}.$	$\frac{2}{3}.$	$\frac{1}{3}.$

TROISIEME ESPECE DE RESOLUTION.

PREMIER CAS.

17. *Pour le premier cas, où chaque plan reçoit une grandeur connuë; afin que les sommes soient chacune un quarré.*

Si les résolutions précédentes n'ont pû être appliquées; on pourra tenter celle-ci. Ayant supposé que le plus grand quarré est $az + c$, & nommé $2y$ la somme des côtez, & leur différence $2x$; ou la somme $2x$, & la différence $2y$; la premiére égalité sera $az + c \propto yy + 2yx + xx$. Et

$z \propto \frac{yy + 2yx + xx - c}{a}$. Et la seconde égalité sera $bz + d \propto yy - 2yx + xx$. Et $z \propto \frac{yy - 2yx + xx - d}{b} \propto \frac{yy + 2yx + xx - c}{a}$. Et tout étant multiplié par ab ; on aura $ayy - 2ayx + axx - ad \propto byy + 2byx + bxx - bc$. Ou $ayy - byy - 2ayx - 2byx + axx - bxx - ad + bc \propto 0$. Et divisant le tout par $a - b$, & tirant ensuitte une[a] valeur de l'inconnuë y ; on trouve $y \propto \frac{ax + bx}{a - b} + \frac{1}{a - b}\sqrt{4abxx + aad - abc - abd + bbc}$. Et alors si $ad - bc$ & $a - b$ sont deux plans[b] semblables, ou si $aad - abc - abd + bbc$ est un[b] quarré parfait ; on prendra gg pour ce quarré, & $vx + g$ pour côté du quarré $4abxx + aad - abc - abd + bbc \propto 4abxx + gg$ renfermé sous le signe $\sqrt{}$. Et l'égalité sera $vvxx + 2gvx + gg \propto 4abxx + gg$. Ou $2gv \propto 4abx - vvx$. Et $x \propto \frac{2gv}{4ab - vv}$. Et l'arbitraire v sera moindre que $2\sqrt{ab}$. On suppose a plus grande que b, à cause du numérateur $a - b$. Et comme $y + x$ ou sa valeur $\frac{gvv + 4agv + 4abg}{4aab - 4abb - avv + bvv}$ surpasse $\sqrt{c}$: si on multiplie de part & d'autre par le dénominateur, & qu'on ordonne ensuitte les deux nouveaux membres ; la grandeur $gvv + avv\sqrt{c} - bvv\sqrt{c}$ surpassera $4aab\sqrt{c} - 4abb\sqrt{c} - 4agv - 4abg$. Et divisant ensuitte par $g + a\sqrt{c} - b\sqrt{c}$, & achevant le reste, on trouvera enfin que l'arbitraire v surpasse $\frac{2aa\sqrt{d} - 2ab\sqrt{d} - 2ag}{g + a\sqrt{c} - b\sqrt{c}}$.

a. 16. 1.

b. 1ere partie. 86 & 89. 8.

1ere supposition.	2e supposition.	Nouvelle supposition.
$az + c \propto yy + 2yx + xx$.	$bz + d \propto yy - 2yx + xx$.	$gg \propto aad - abc - abd + bbc$.

Résolution infinie.

v *arbitraire*. $x \propto \frac{2gv}{4ab - vv}$. $y \propto \frac{ax + bx + vx + g}{a - b}$. $z \propto \frac{yy - 2yx + xx - d}{b}$.

Exemple.

$az + c$.	$bz + d$.	g.	v.	x.	y.	z.	*Quarrez.*	*Côtez.*
$3z + 13$.	$1z + 7$.	4.	2.	2.	8.	29.	$3z + 13 \propto 100$. $1z + 7 \propto 36$.	10. 6.
$3z + 13$.	$1z + 7$.	4.	3.	8.	30.	477.	$3z + 13 \propto 1444$. $1z + 7 \propto 484$.	38. 22.
$3z + 13$.	$1z + 7$.	4.	1.	$\frac{8}{11}$.	$\frac{42}{11}$.	$\frac{309}{121}$.	$3z + 13 \propto \frac{2500}{121}$. $1z + 7 \propto \frac{1156}{121}$.	$\frac{50}{11}$. $\frac{34}{11}$.

SECOND CAS.

18. *ET si on ôte une grandeur connuë du premier plan, & une connuë du second ; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Supposant encore a plus grande que b ; l'arbitraire v sera moindre que $2\sqrt{ab}$. &c.

1ere supposition.	2e supposition.	Nouvelle supposition.
$az - c \propto yy + 2yx + xx$.	$bz - d \propto yy - 2yx + xx$.	$gg \propto abd + abc - aad - bbc$.

Résolution infinie.

$$v \text{ arbitraire}.\quad x \propto \frac{2gv}{4ab - vv}.\quad y \propto \frac{ax + bx + vx + g}{a - b}.\quad z \propto \frac{yy - 2yx + xx + d}{b}.$$

Exemple.

$az - c$.	$bz - d$.	g.	v.	x.	y.	z.	Quarrez.		Côtez.	
$10z - 9$.	$6z - 5$.	4.	12.	1.	8.	9.	$10z - 9 \propto 81$.	$6z - 5 \propto 49$.	9.	7.
$10z - 9$.	$6z - 5$.	4.	15.	8.	63.	505.	$10z - 9 \propto 5041$.	$6z - 5 \propto 3025$.	71.	55.
$10z - 9$.	$6z - 5$.	4.	10.	$\frac{4}{7}$.	$\frac{33}{7}$.	$\frac{181}{49}$.	$10z - 9 \propto \frac{1369}{49}$.	$6z - 5 \propto \frac{841}{49}$.	$\frac{37}{7}$.	$\frac{29}{7}$.
$10z - 9$.	$6z - 5$.	4.	6.	$\frac{4}{17}$.	$\frac{39}{17}$.	$\frac{445}{289}$.	$10z - 9 \propto \frac{1849}{289}$.	$6z - 5 \propto \frac{1225}{289}$.	$\frac{43}{17}$.	$\frac{35}{17}$.

TROISIEME CAS.

19. *ET si on ôte le premier plan d'une grandeur connuë, & le second d'une grandeur connuë; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Premiérement si $1a$ surpasse $1b$, & que le quarré $c - az$ surpasse le quarré $d - bz$; l'arbitraire v sera moindre que $2\sqrt{ab}$, & la même v sera encore moindre que $\frac{-2ag + 2aa\sqrt{d} - 2ab\sqrt{d}}{g + a\sqrt{c} - b\sqrt{c}}$. &c.

1ere *supposition.*	2e *supposition.*	*Nouvelle supposition.*
$c - az \propto yy + 2yx + xx$.	$d - bz \propto yy - 2yx + xx$.	$gg \propto aad - abc - abd + bbc$.

Résolution infinie.

$$v \text{ arbitraire}.\quad x \propto \frac{2gv}{4ab - vv}.\quad y \propto \frac{ax + bx + vx + g}{a - b}.\quad z \propto \frac{d - yy + 2yx - xx}{b}.$$

Exemple.

$c - az$.	$d - bz$.	g.	v.	x.	y.	z.	Quarrez.		Côtez.	
$25 - 6z$.	$5 - 1z$.	5.	2.	1.	$\frac{14}{5}$.	$\frac{44}{25}$.	$25 - 6z \propto \frac{361}{25}$.	$5 - 1z \propto \frac{81}{25}$.	$\frac{19}{5}$.	$\frac{9}{5}$.
$25 - 6z$.	$5 - 1z$.	5.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{4}{19}$.	$\frac{25}{19}$.	$\frac{1364}{361}$.	$25 - 6z \propto \frac{841}{361}$.	$5 - 1z \propto \frac{441}{361}$.	$\frac{29}{19}$.	$\frac{21}{19}$.

. Si le second quarré surpasse le premier.

Et en second lieu, si a surpasse b, & que le quarré $c - az$ soit moindre que l'autre $d - bz$; l'arbitraire v surpasse $2\sqrt{ab}$. Et comme $vx + g$ surpasse $ax + bx$: si on met pour x sa valeur $\frac{2gv}{4ab - vv}$, & qu'on fasse les comparaisons ordinaires; on trouvera que la grandeur $vv + 4ab$ surpasse $2av + 2bv$. Et si l'excez est l, on aura l'égalité $vv + 4ab \propto 2av + 2bv + l$. D'où l'on tirera deux valeurs, dont l'une surpasse $a + b + a - b$ ou $2a$. Et cette valeur est trop grande, puisque $2a$ surpasse $2\sqrt{ab}$. Et l'autre valeur est moindre que la grandeur $a + b - a + b$ ou que $2b$. Et c'est celle dont nous avons besoin. Et en effet supposant $v \propto 2b$; on trouve $y \propto 0$, & les deux quarrez sont égaux, comme on peut l'observer dans la troisiéme résolution de l'exemple qu'on expose. Et si v surpasse b; la grandeur

y vaut moins que rien, & le premier quarré ſurpaſſe le ſecond, comme on peut l'obſerver dans la quatriéme réſolution. De ſorte que l'on retourne alors à la réſolution précédente.

1ere ſuppoſition.	*2e ſuppoſition.*	*Nouvelle ſuppoſition.*
$c - az \propto yy - 2yx + xx$.	$d - bz \propto yy + 2yx + xx$.	$gg \propto aad - abc - abd + bbc$.

Réſolution infinie.

v *arbitraire.* $x \propto \frac{2gv}{4ab - vv}$. $y \propto \frac{vx - ax - bx + g}{a - b}$. $z \propto \frac{d - yy - 2yx - xx}{b}$.

Exemple.

$c - az$.	$d - bz$.	g.	v.	x.	y.	z.	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$25 - 6z$.	$5 - 12z$.	5.	1.	$\frac{10}{23}$.	$\frac{11}{23}$.	$\frac{2204}{529}$.	$25 - 6z \propto \frac{1}{529}$.	$5 - 12z \propto \frac{441}{529}$.	$\frac{1}{23}$.	$\frac{21}{23}$.
$25 - 6z$.	$5 - 12z$.	5.	0.	0.	1.	4.	$25 - 6z \propto 1$.	$5 - 12z \propto 1$.	1.	1.
$25 - 6z$.	$5 - 12z$.	5.	2.	1.	0.	4.	$25 - 6z \propto 1$.	$5 - 12z \propto 1$.	1.	1.
$25 - 6z$.	$5 - 12z$.	5.	3.	$\frac{10}{5}$.	$-\frac{3}{5}$.	$\frac{76}{25}$.	$25 - 6z \propto \frac{169}{25}$.	$5 - 12z \propto \frac{49}{25}$.	$\frac{13}{5}$.	$\frac{7}{5}$.

QUATRIEME CAS.

20. *ET ſi l'un des deux plans reçoit une grandeur connuë, & qu'on ôte une connuë de l'autre; afin que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Premiérement ſi a ſurpaſſoit b; le quarré $az + c$ ſurpaſſeroit néceſſairement $bz - d$. Et ainſi on ſeroit obligé de prendre $y + x$ pour côté du premier $az + c$, & $y - x$ ou $x - y$ pour côté du ſecond $bz - d$. Et la comparaiſon des quarrez fourniroit une valeur $y \propto \frac{ax + bx}{a - b} + \frac{1}{a - b} \sqrt{4abxx + abd + bbc - aad - abc}$. Et abc ſurpaſſeroit bbc, & aad ſurpaſſeroit abd. De ſorte que la grandeur $abd + bbc - aad - abc$ ſeroit négative, & ne pourroit ſervir en aucune ſorte à la réſolution que nous cherchons ici.

Si le premier quarré ſurpaſſe le ſecond.

Mais ſi b ſurpaſſe a, & que le premier quarré $az + c$ ſurpaſſe le ſecond $bz - d$; le plan vx ſurpaſſera $ax + bx + g$. Et mettant pour x ſa valeur, & ôtant enſuitte les dénominateurs; la grandeur $gvv + 4abg$ ſurpaſſera $2agv + 2bgv$. Et ſi on diviſe par g, & qu'on achéve les comparaiſons; on trouvera que l'arbitraire v, déja plus grande que $2\sqrt{ab}$, doit [b] encore ſurpaſſer $2b$. b. 23. 1.

1ere ſuppoſition.	*2e ſuppoſition.*	*Nouvelle ſuppoſition.*
$az + c \propto yy + 2yx + xx$.	$bz - d \propto yy - 2yx + xx$.	$gg \propto abd + bbc - aad - abc$.

Réſolution infinie.

v *arbitraire.* $x \propto \frac{2gv}{vv - 4ab}$. $y \propto \frac{vx - ax - bx - g}{b - a}$. $z \propto \frac{yy + 2yx + xx - c}{a}$.

Exemple.

$az+c.$	$bz-d.$	$g.$	$v.$	$x.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$8z+10.$	$24z-2.$	$64.$	$96.$	$\frac{16}{11}.$	$\frac{20}{11}.$	$\frac{43}{484}.$	$8z+10 \propto \frac{1296}{121}.$	$24z-2 \propto \frac{16}{121}.$	$\frac{36}{11}.$	$\frac{4}{11}.$
$8z+10.$	$24z-2.$	$64.$	$64.$	$\frac{32}{13}.$	$\frac{12}{13}.$	$\frac{123}{676}.$	$8z+10 \propto \frac{1936}{169}.$	$24z-2 \propto \frac{400}{169}.$	$\frac{44}{11}.$	$\frac{20}{11}.$

Si le ſecond quarré ſurpaſſe le premier.

Et ſi le quarré $bz-d$ eſt plus grand que le premier $az+c$; l'arbitraire v ſera moindre que $2\sqrt{ab}$.

1ere *ſuppoſition.*	2e *ſuppoſition.*	*Nouvelle ſuppoſition.*
$az+c \propto yy-2yx+xx.$	$bz-d \propto yy+2yx+xx.$	$gg \propto abd-aad+bbc-abc.$

Réſolution infinie.

v *arbitraire.* $x \propto \frac{2gv}{-vv+4ab}.$ $y \propto \frac{bx-ax+vx+g}{b-a}.$ $z \propto \frac{yy+2yx+xx+d}{b}.$

Exemple.

$az+c.$	$bz-d.$	$g.$	$v.$	$x.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$8z+10.$	$24z-2.$	$64.$	$16.$	$4.$	$16.$	$\frac{51}{4}.$	$8z+10 \propto 144.$	$24z-2 \propto 400.$	$12.$	$20.$
$8z+10.$	$24z-2.$	$64.$	$24.$	$16.$	$60.$	$240\frac{3}{4}.$	$8z+10 \propto 1936.$	$24z-2 \propto 5776.$	$44.$	$76.$

CINQUIEME CAS.

21. *ET ſi le premier plan reçoit une grandeur connuë, & que le ſecond ſoit retranché d'une grandeur connuë; afin que la ſomme & le reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Si le premier quarré ſurpaſſe le ſecond; l'arbitraire v ſurpaſſera $\frac{2bg+2ab\sqrt{c}+2bb\sqrt{c}}{g+a\sqrt{d}+b\sqrt{d}}$ ou $\frac{-2bg+2ab\sqrt{c}+2bb\sqrt{c}}{-g+a\sqrt{d}+b\sqrt{d}}$. Et la même v ſurpaſſera $2b$. Et ſi l'arbitraire v eſt moindre que $2b$; le premier quarré ſera moindre que le ſecond.

1ere *ſuppoſition.*	2e *ſuppoſition.*	*Nouvelle ſuppoſition.*
$az+c \propto yy+2yx+xx.$	$d-bz \propto yy-2yx+xx.$	$gg \propto aad+abd+abc+bbc.$

Réſolution infinie.

v *arbitraire.* $x \propto \frac{2gv}{vv+4ab}.$ $y \propto \frac{ax-bx+vx-g}{a+b}.$ $z \propto \frac{d-yy+2yx-xx}{b}.$

Exemples.

$az+c.$	$d-bz.$	$g.$	$v.$	$x.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$3z+7.$	$3-1z.$	$8.$	$4.$	$\frac{16}{7}.$	$\frac{10}{7}.$	$\frac{111}{49}.$	$3z+7 \propto \frac{676}{49}.$	$3-1z \propto \frac{36}{49}.$	$\frac{26}{7}.$	$\frac{6}{7}.$
$3z+7.$	$3-1z.$	$8.$	$12.$	$\frac{16}{13}.$	$\frac{30}{13}.$	$\frac{311}{169}.$	$3z+7 \propto \frac{2116}{169}.$	$3-1z \propto \frac{196}{169}.$	$\frac{46}{13}.$	$\frac{14}{13}.$
$1z+3.$	$7-3z.$	$8.$	$12.$	$\frac{16}{13}.$	$\frac{14}{13}.$	$\frac{393}{169}.$	$3z+7 \propto \frac{900}{169}.$	$3-1z \propto \frac{4}{169}.$	$\frac{30}{13}.$	$\frac{2}{13}.$
$1z+3.$	$7-3z.$	$8.$	$6.$	$2.$	$0.$	$1.$	$1z+3 \propto 4.$	$7-3z \propto 4.$	$2.$	$2.$

SIXIEME CAS.

22. *ET si on ôte du premier plan une grandeur connuë, & qu'on ôte au contraire le second plan d'une grandeur connuë; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Si le premier quarré surpasse le second; l'arbitraire v surpassera $2b$. Et la même v surpassera encore la grandeur $\frac{2bg + 2ab\sqrt{c} + 2bb\sqrt{c}}{g + a\sqrt{d} + b\sqrt{d}}$ ou $\frac{-2bg + 2ab\sqrt{c} + 2bb\sqrt{c}}{-g + a\sqrt{d} + b\sqrt{d}}$. Et si elle est moindre que $2b$; le premier quarré ne surpassera pas le second: comme on peut l'observer dans la seconde résolution de l'éxemple qu'on expose.

1ere *supposition.*	2e *supposition.*	*Nouvelle supposition.*
$az - c \propto yy + 2yx + xx.$	$d - bz \propto yy - 2yx + xx.$	$gg \propto aad + abd - abc - bbc.$

Résolution infinie.

$$v \text{ arbitraire.}\ x \propto \frac{2gv}{vv + 4ab}.\ y \propto \frac{ax - bx + vx - g}{a + b}.\ z \propto \frac{d - yy + 2yx - xx}{b}.$$

Exemple.

$az - c.$	$d - bz.$	$g.$	$v.$	$x.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$1z - 3.$	$13 - 3z.$	$4.$	$12.$	$\frac{8}{13}.$	$\frac{7}{13}.$	$\frac{732}{169}.$	$1z - 3 \propto \frac{225}{169}.$	$13 - 3z \propto \frac{1}{169}.$	$\frac{15}{13}.$	$\frac{1}{13}.$
$1z - 3.$	$13 - 3z.$	$4.$	$3.$	$\frac{8}{7}.$	$-\frac{5}{7}.$	$\frac{156}{49}.$	$1z - 3 \propto \frac{9}{49}.$	$13 - 3z \propto \frac{169}{49}.$	$\frac{3}{7}.$	$\frac{13}{7}.$

I COROLLAIRE.

PREMIER CAS.

23. *SI on ajoûte un quarré parfait & connu à chacun des deux plans; afin que les sommes soient chacune un quarré parfait.*

On employera cette troisiéme espêce de résolution, & l'arbitraire v sera moindre que $2\sqrt{ab}$. On nommera cc le quarré connu.

1ere *supposition* $az + cc \propto yy + 2yx + xx.$ 2e $bz + cc \propto yy - 2yx + xx.$

Résolution infinie.

$$v \text{ arbitraire.}\ x \propto \frac{2acv - 2bcv}{4ab - vv}.\ y \propto \frac{ax + bx + vx + ac - bc}{a - b}.\ z \propto \frac{yy + 2yx + xx - cc}{a}.$$

Exemple.

$az + cc.$	$bz + cc.$	$v.$	$x.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$8z + 4.$	$6z + 4.$	$12.$	$2.$	$28.$	$112.$	$8z + 4 \propto 900.$	$6z + 4 \propto 676.$	$30.$	$26.$
$8z + 4.$	$6z + 4.$	$8.$	$\frac{1}{2}.$	$\frac{15}{2}.$	$\frac{15}{2}.$	$8z + 4 \propto 64.$	$6z + 4 \propto 49.$	$8.$	$7.$

SECOND CAS.

24. *ET si on ôte un quarré parfait & connu de chacun des plans; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $az - cc$ & $bz - cc$ doivent étre des quarrez, on ne peut pas employer la troisiéme espêce de résolution, puisqu'on y trouve sous le signe $\sqrt{}$ un quarré négatif $- aacc + 2abcc - bbcc$.

TROISIEME CAS.

25. *ET si on ôte chacun des deux plans du quarré connu; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La troisiéme espêce de résolution sert toûjours, lorsqu'on suppose que $cc - az$ & $cc - bz$ sont des quarrez parfaits. Et alors l'arbitraire v vaut moins que $2b$. On suppose la connuë a plus grande que la connuë b, ou le second quarré $cc - bz$ plus grand que le premier $cc - az$.

1ere *supposition* $\{ cc - az \propto yy - 2yx + xx$. 2e $\{ cc - bz \propto yy + 2yx + xx$.

Résolution infinie.

$\{ v$ *arbitraire.* $x \propto \dfrac{2acv - 2bcv}{4ab - vv}$. $y \propto \dfrac{vx - ax - bx + ac - bc}{a - b}$. $z \propto \dfrac{cc - yy - 2yx - xx}{b}$.

Exemple.

$cc - az$.	$cc - bz$.	v.	x.	y.	z.	*Quarrez.*	*Côtez.*
$16 - 5z$.	$16 - 1z$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{12}{11}$.	$\frac{28}{11}$.	$\frac{336}{121}$.	$\{ 16 - 5z \propto \frac{256}{121}$. $16 - 1z \propto \frac{1600}{121}$.	$\{ \frac{16}{11}$. $\frac{40}{11}$.
$16 - 5z$.	$16 - 1z$.	1.	$\frac{32}{19}$.	$\frac{36}{19}$.	$\frac{1152}{361}$.	$\{ 16 - 5z \propto \frac{16}{361}$. $16 - 5z \propto \frac{4624}{361}$.	$\{ \frac{4}{19}$. $\frac{68}{19}$.

QUATRIEME CAS.

26. *ET si on ajoûte au premier plan le quarré connu, & qu'on ôte ce même quarré de l'autre plan.*

Dans ce cas, où $az + cc$ & $bz - cc$ doivent être des quarrez, on ne pourra pas employer généralement la troisiéme espêce de résolution. Mais on le pourra seulement en ce cas, lorsque $bb - aa$ sera un quarré parfait, parce qu'on trouve $bbcc - aacc$ sous le signe $\sqrt{}$.

CINQUIEME CAS.

27. *ET si on ajoûte au premier plan le quarré connu, & qu'on ôte le second plan de ce même quarré; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

La troisiéme espêce de résolution peut toûjours servir dans ce cinquiéme cas, où $az + cc$ & $cc - bz$ doivent êre des quarrez. Et l'arbitraire v doit alors surpasser $2b$.

1ere *supposition*

1ere *ſuppoſition* $\{az + cc \propto yy + 2yx + xx$. 2^{c} $\{cc - bz \propto yy - 2yx + xx$.

Réſolution infinie.

$$\{v \text{ arbitraire. } x \propto \frac{2acv + 2bcv}{vv + 4ab} . \; y \propto \frac{ax - bx + vx - ac - bc}{a + b} . \; z \propto \frac{cc - yy + 2yx - xx}{b} .$$

Exemple.

$az + cc$.	$cc - bz$.	v.	x.	y.	z.	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$8z + 4$.	$4 - 3z$.	24.	$\frac{11}{7}$.	$\frac{15}{7}$.	$\frac{60}{49}$.	$8z + 4 \propto \frac{676}{49}$.	$4 - 3z \propto \frac{16}{49}$.	$\frac{26}{7}$.	$\frac{4}{7}$.
$8z + 4$.	$4 - 3z$.	16.	2.	$\frac{20}{11}$.	$\frac{160}{121}$.	$8z + 4 \propto \frac{1764}{121}$.	$4 - 3z \propto \frac{4}{121}$.	$\frac{42}{11}$.	$\frac{2}{11}$.
$8z + 4$.	$4 - 3z$.	12.	$\frac{11}{5}$.	$\frac{7}{5}$.	$\frac{28}{25}$.	$8z + 4 \propto \frac{324}{25}$.	$4 - 3z \propto \frac{16}{25}$.	$\frac{18}{5}$.	$\frac{4}{5}$.

SIXIEME CAS.

28. *ET ſi on ôte du premier des plans un quarré connu, & qu'on ajoûte au ſecond plan ce même quarré; afin que le reſte & la ſomme ſoient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $az - cc$ & $cc - bz$ doivent être des quarrez, on ne peut employer la troiſiéme eſpèce de réſolution, que quand $aa - bb$ eſt un quarré parfait; parcequ'en toute autre rencontre, la grandeur $aacc - bbcc$, qu'on trouve ſous le ſigne, ne peut être un quarré.

II COROLLAIRE.

PREMIER CAS.

29. *SI on ajoûte un quarré connu au premier des plans, & un autre au ſecond; afin que les ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

On pourra employer la troiſiéme eſpèce de réſolution. Car ayant pris cc pour le premier quarré, & dd pour le ſecond, & les [b] expoſans ee & ff de ces mêmes quarrez, & gg leur plus grand diviſeur commun; ſi on multiplie réciproquement le premier quarré $az + cc$ par le ſecond expoſant ff, & le ſecond quarré $bz + dd$ par le premier expoſant ee; on aura deux nouveaux [c] quarrez $affz + eeffgg$ & $beez + eeffgg$, où les parties connuës

b. 1ere partie. 76. 8.

c. 1ere partie. 40. 8.

1ere *ſuppoſition* $\{az + cc \propto \frac{yy + 2yx + xx}{ff}$. 2^{c} $\{bz + dd \propto \frac{yy - 2yx + xx}{ee}$.

Réſolution infinie.

$$\left\{\frac{cc}{dd} \propto \frac{ee}{ff} . \; \{ccff \propto ddee \propto eeffgg . \; \{v \text{ arbitraire. } x \propto \frac{2acf^3gv - 2be^3fgv}{4abeeff - vv} .\right.$$

$$\{y \propto \frac{affx + beex + vx + aef^3g - be^3fg}{aff - bee} . \; \{z \propto \frac{yy + 2yx + xx - eeffgg}{aff} .$$

Exemple.

$az + cc$.	$bz + dd$.	e.	f.	g.	v.	x.	y.	z.	*Quarrez.*	
$5z + 4$.	$10z + 9$.	2.	3.	1.	60.	1.	35.	28.	$5z + 4 \propto 144$.	$10z + 9 \propto 289$.

ne seront plus qu'un même quarré *eeffgg*. De sorte que la résolution est
d. 31. la même [d] que la premiére du corollaire précédent. On suppose que la grandeur *aff* surpasse *bee*. Et l'arbitraire v sera moindre que $2ef\sqrt{ab}$.

SECOND CAS.

30. *ET si les deux derniers quarrez sont retranchez, l'un d'un plan, & l'autre de l'autre; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Pour ce cas, où $az - cc$ & $bz - dd$ doivent être des quarrez, il faudra tenter une autre recherche, cette troisiéme espêce de résolution n'y pouvant pas servir.

TROISIEME CAS.

31. *ET si les deux plans sont ôtez, l'un d'un certain quarré, & l'autre d'un autre; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La troisiéme espêce des résolutions servira toûjours pour ce cas, où $cc - az$ & $dd - bz$ doivent être des quarrez parfaits. Et l'arbitraire v sera moindre que $2bee$, en supposant aff plus grande que bee.

1ere *supposition* $\{ cc - az \propto \dfrac{yy - 2yx + xx}{ff}$. $\{ dd - bz \propto \dfrac{yy + 2yx + xx}{ee}$.

Résolution infinie.

$\left\{ \dfrac{cc}{dd} \propto \dfrac{ee}{ff} \right.$. $\{ ccff \propto ddee \propto eeffgg$. $\{ v$ *arbitraire*. $x \propto \dfrac{2aef^3gv - 2be^3fgv}{4abeeff - vv}$.

$\{ y \propto \dfrac{vx - affx - beex + aef^3g - be^3fg}{aff - bee}$. $\{ z \propto \dfrac{eeffgg - yy - 2yx - xx}{bee}$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} cc - az.\ dd - bz.\ e.\ f.\ g.\ \{ v.\ x.\ y.\ z. \qquad \textit{Quarrez.} \\ 4 - 5z.\ 9 - 10z.\ 2.\ 3.\ 1.\ \{ 30.\ \frac{2}{7}.\ \frac{20}{7}.\ \frac{32}{49}.\ \{ 4 - 5z \propto \frac{36}{49}.\ 9 - 10z \propto \frac{121}{49}. \end{array} \right.$$

QVATRIEME CAS.

32. *ET si le premier plan reçoit un quarré, & qu'on ôte un autre quarré du second plan; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $az + cc$ & $bz - dd$ doivent être des quarrez, la troisiéme espêce des résolutions servira seulement, lorsque la grandeur $bbe^4 - aaf^4$ sera un quarré.

CINQVIEME CAS.

33. *ET si le premier plan reçoit un certain quarré, & que le second soit retranché d'un autre quarré, afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $az + cc$ & $dd - bz$ doivent être des quarrez; la troisiéme espêce des résolutions servira toûjours. Et l'arbitraire v surpassera $2bee$.

1ere *ſuppoſition* $\{ az + cc \propto \frac{yy + 2yx + xx}{ff}$. 2e $\{ dd - bz \propto \frac{yy - 2yx + xx}{ee}$.

Réſolution infinie.

$\left\{ \frac{cc}{dd} \propto \frac{ee}{ff} \right.$. $\{ ccff \propto ddee \propto eeffgg$. $\{ v$ *arbitraire*. $x \propto \frac{2aef^3gv + 2be^3fgv}{4abeeff + vv}$.

$\{ y \propto \frac{affx - beex + vx - aef^3g + be^3fg}{aff + bee}$. $\{ z \propto \frac{eeffgg - yy + 2yx - xx}{bee}$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} az + cc.\ dd - bz.\ e.\ f.\ g. \\ 5z + 1.\ 9 - 10z.\ 1.\ 3.\ 1. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v.\ x.\ y.\ z. \\ 30.\ \frac{11}{3}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{16}{45}. \end{array} \right. \begin{array}{l} \textit{Quarrez.} \\ \{ 5z - 1 \propto \frac{25}{9}.\ 9 - 10z \propto \frac{49}{9}. \end{array}$$

SIXIEME CAS.

34. *ET enfin ſi on ôte un certain quarré du premier des deux plans, & qu'on ôte l'autre plan d'un nouveau quarré; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $az - cc$ & $dd - bz$ doivent être des quarrez, la troiſiéme eſpèce des réſolutions ſervira ſeulement, ſi $aaf^4 - bbe^4$ eſt un quarré parfait.

QUATRIEME ESPECE DE RESOLUTION.

PREMIER CAS.

35. *SI on veut ajoûter une grandeur connuë au premier des deux plans, & encore une connuë au ſecond; afin que les ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

Si les voies précédentes n'ont pû rien découvrir, on tentera encore cette réſolution. Ayant nommé $2a$ & $2b$ les grandeurs connuës, qui doivent multiplier la même inconnuë z, & c & d les connuës qu'on ajoûte, l'une au plan $2az$, & l'autre à l'autre $2bz$; & $y - z$ ou $z - y$ le côté du premier quarré $2az + c$, & $x - z$ ou $z - x$ le côté du ſecond quarré $2bz + d$; la premiére égalité ſera $2az + c \propto zz - 2yz + yy$. D'où l'on tirera une [b] valeur $z \propto a + y + \sqrt{aa + 2ay + c}$. Et la grandeur $aa + 2ay + c$ doit être un quarré parfait, que je nomme vv. Et formant l'égalité $aa + 2ay + c \propto vv$; je trouve $y \propto \frac{vv - aa - c}{2a}$. Et la ſeconde égalité eſt $zz - 2xz + xx \propto 2bz + d$. D'où l'on tire [b] une valeur $z \propto b + x + \sqrt{bb + 2bx + d}$. Et nommant t le côté du quarré renfermé ſous le ſigne; l'égalité ſera $bb + 2bx + d \propto tt$. Et $x \propto \frac{tt - bb - d}{2b}$. Et reprenant alors la valeur $z \propto a + y + v \propto b + x + t$; ſi l'on met pour y & pour x leurs valeurs; on aura $z \propto \frac{vv + 2av + aa - c}{2a} \propto \frac{tt + 2bt + bb - d}{2b}$. Et le tout étant multiplié par $2a$, on aura $vv + 2av + aa - c$

b. 16. 1.

c. 15. 1. $\propto \frac{att + 2abt + abb - ad}{b}$. D'où l'on tirera [c] une valeur $v \propto - a + \frac{1}{b}$ $\sqrt{abtt + 2abbt + ab^3 - abd + bbc}$. Et alors, ſi $ab^3 - abd + bbc$ eſt un quarré parfait; l'ayant nommé gg, & pris $tr - g$ pour côté du quarré renfermé ſous le ſigne $\sqrt{\ }$; l'égalité ſera $ttrr - 2gtr + gg \propto abtt + 2abbt + gg$. Ou $trr - abt \propto 2abb + 2gr$. Et $t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr - ab}$. Et l'arbitraire r ſurpaſſe $\sqrt{ab}$. Et afin que z ou ſa valeur $\frac{tt + 2bt + bb - d}{2b}$ ſoit poſitive; il
d. 22. 1. faut que $t + b$ ou que ſa valeur $\frac{abb + 2gr + brr}{rr - ab}$ ſurpaſſe $\sqrt{d}$. Et ainſi [d] l'ar-
e. 21. 1. bitraire r ſurpaſſera $\frac{-g + b\sqrt{c}}{b - \sqrt{d}}$, ſi b ſurpaſſe $\sqrt{d}$. Mais r vaudra moins [e] que $\frac{g + b\sqrt{c}}{-b + \sqrt{d}}$, ſi b eſt moindre que $\sqrt{d}$.

Dans l'exemple qu'on propoſe ici par nombres, la fraction $\frac{1}{2}$ réſoudroit la queſtion. Mais il faut la chercher par une autre voie.

1[ere] *ſuppoſition* $\{ 2az + c \propto zz - 2yz + yy$. 2[e] $\{ 2bz + d \propto zz - 2xz + xx$.

Réſolution infinie.

$\{ gg \propto ab^3 + bbc - abd$. $\{$ *r arbitraire.* $t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr - ab}$. $\{ z \propto \frac{tt + 2bt + bb - d}{2b}$.

Exemple.

$2az + c$.	$2bz + d$.	g.	r.	t.	z.	*Quarrez.*	*Côtez.*
$4z + 14$.	$6z + 6$.	12.	3.	36.	$252\frac{1}{2}$.	$\{ 4z + 14 \propto 1024$. $6z + 6 \propto 1521$.	$\{$ 32. 39.

SECOND CAS.

36. ET *ſi les deux grandeurs connuës ſont ôtées l'une d'un plan, & l'autre de l'autre; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $2az - c$ & $2bz - d$ doivent être des quarrez, l'arbitraire r ſurpaſſera encore $\sqrt{ab}$.

1[ere] *ſuppoſition* $\{ 2az - c \propto zz - 2yz + yy$. 2[e] $\{ 2bz - d \propto zz - 2xz + xx$.

Réſolution infinie.

$\{ gg \propto ab^3 + abd - bbc$. $\{$ *r arbitraire.* $t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr - ab}$. $z \propto \frac{tt + 2bt + bb + d}{2b}$.

Exemple.

$2az - c$.	$2bz - d$.	g.	r.	t.	z.	*Quarrez.*	*Côtez.*
$8z - 7$.	$12z - 12$.	30.	6.	54.	301.	$\{ 8z - 7 \propto 2401$. $12z - 12 \propto 3600$.	$\{$ 49. 60.

TROISIEME CAS.

37. *ET si les deux plans sont ôtez l'un d'une grandeur connuë, & l'autre de l'autre; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $c - 2az$ & $d - 2bz$ doivent être des quarrez, si $\sqrt{d}$ surpasse b; l'arbitraire r surpasse $\frac{-1g + b\sqrt{c}}{-b + \sqrt{d}}$. Et si $\sqrt{d}$ surpasse b; l'arbitraire r est moindre que $\frac{g + b\sqrt{c}}{b - \sqrt{d}}$. Et la même r est moindre que chacune des grandeurs $\frac{abb}{g}$ & $\sqrt{ab}$, ou les surpasse l'une & l'autre, afin que t soit positive.

1ere *supposition* $\{c - 2az \propto zz - 2yz + yy$. 2e $\{d - 2bz \propto zz - 2xz + xx$.

Résolution infinie.

$\{gg \propto ab^3 + bbc - abd$. $\{r$ *arbitraire.* $t \propto \frac{2abb - 2gr}{ab - rr}$. $\{z \propto \frac{d - tt + 2bt - bb}{2b}$.

Exemple.

$\begin{cases} c - 2az.\ d - 2bz.\ g.\ \ r.\ \ t.\ \ z. \\ 7 - 6z.\ 8 - 4z.\ 2.\ 12.\ \frac{4}{23}.\ \frac{617}{529}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\{7 - 6z \propto \frac{1}{529}.\ 8 - 4z \propto \frac{1764}{529}$. *Côtez.* $\{\frac{1}{23}.\frac{42}{23}$.

QUATRIEME CAS.

38. *ET si le premier plan reçoit une grandeur connuë, & qu'on ôte une connuë de l'autre; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $2az + c$ & $2bz - d$ doivent être des quarrez, l'arbitraire r surpassera $\sqrt{ab}$.

1ere *supposition* $\{2az + c \propto zz - 2yz + yy$. 2e $\{2bz - d \propto zz - 2xz + xx$.

Résolution infinie.

$\{gg \propto ab^3 + abd + bbc$. $\{r$ *arbitraire.* $t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr - ab}$. $\{z \propto \frac{tt + 2bt + bb + d}{2b}$.

Exemple.

$\begin{cases} 2az + c.\ 2bz - d.\ g.\ r.\ \ t.\ \ z. \\ 12z + 7.\ \ 2z - 2.\ 5.\ 3.\ 14.\ 113\frac{1}{2}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\{12z + 7 \propto 1369.\ 2z - 2 \propto 225$. *Côtez.* $\{37.15$.

CINQUIEME CAS.

39. *ET si le premier plan reçoit une grandeur connuë, & qu'on ôte le second d'une grandeur connuë; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Dans ce cas, où $2az + c$ & $d - bz$ doivent être des quarrez, il faut que $\sqrt{d}$ surpasse $t - b$, ou sa valeur $\frac{abb + 2gr - brr}{rr + ab}$, ou que $\sqrt{d}$ surpasse

b. 21. 1. $b - t$ ou $\frac{brr - abb - 2gr}{rr + ab}$. De ſorte que [b] l'arbitraire r ſurpaſſe $\frac{g + b\sqrt{c}}{b + \sqrt{d}}$, ſi on veut que t ſurpaſſe b. Et alors la même r eſt [b] moindre que $\frac{g + \sqrt{bbc + abd}}{b}$. Mais ſi on veut que b ſurpaſſe t; l'arbitraire r [b] ſurpaſſera $\frac{g + \sqrt{bbc + abd}}{b}$. Et alors la même r ſera moindre [b] que $\frac{g + b\sqrt{c}}{b - \sqrt{d}}$, ſi b ſurpaſſe $\sqrt{d}$. Et ſi b vaut moins que $\sqrt{d}$; l'arbitraire r ſurpaſſera $\frac{-g + b\sqrt{c}}{-b + \sqrt{d}}$.

1ere *ſuppoſition* $\{ 2az + c \propto zz - 2yz + yy$. 2e $\{ d - 2bz \propto zz - 2xz + xx$.

Réſolution infinie.

$\{ gg \propto abd + bbc - ab^3$. $\{ r$ *arbitraire.* $t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr + ab}$. $\{ z \propto \frac{d - bb + 2bt - tt}{2b}$.

Exemple.

$\begin{cases} 2az + c. & d - 2bz. & g. & r. & t. & z. \\ 12z + 7. & 4 - 2z. & 5. & 6. & \frac{12}{7}. & \frac{171}{98}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\{ 12z + 7 \propto \frac{1369}{49}$. $4 - 2z \propto \frac{25}{49}$. *Côtez.* $\{ \frac{37}{7}. \frac{5}{7}$.

SIXIEME CAS.

40. *ET enfin ſi on ôte une grandeur connuë du premier plan, & que le ſecond ſoit ôté d'une grandeur connuë; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

La réſolution conſervera preſqu'en tout la même forme que la précédente. Et l'arbitraire r aura ſes bornes exprimées de la même ſorte. On pourroit expoſer encore d'autres eſpèces de réſolutions réglées ſur le modéle de la précédente. Mais ce qu'on a dit doit ſuffire, & ſurpaſſe de beaucoup tout ce qu'ont écrit les plus ſçavans hommes ſur ces ſortes d'égalitez doubles.

1ere *ſuppoſition* $\{ 2az - c \propto zz - 2yz + yy$. 2e $\{ d - 2bz \propto zz - 2xz + xx$.

Réſolution infinie.

$\{ gg \propto abd - ab^3 - bbc$. $\{ r$ *arbitraire.* $\{ t \propto \frac{2abb + 2gr}{rr + ab}$. $z \propto \frac{d - bb + 2bt - tt}{2b}$.

Exemple.

$\begin{cases} 2az - c. & d - 2bz. & g. & r. & t. & z. \\ 12z - 6. & 8 - 2z. & 6. & 6. & 2. & \frac{7}{2}. \\ 12z - 6. & 8 - 2z. & 6. & 3. & \frac{16}{5}. & \frac{79}{50}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\{ 12z - 6 \propto 36$. $8 - 2z \propto 1$. *Côtez.* $\{ 6. 1$.
$\{ 12z - 6 \propto \frac{324}{25}$. $8 - 2z \propto \frac{121}{25}$. $\{ \frac{18}{5}. \frac{11}{5}$.

DES DOUBLES EGALITEZ

OÙ L'INCONNUE A DEUX DEGREZ.

III QUESTION.

PREMIER CAS.

41. *Pour trouver une grandeur, telle que son quarré étant multiplié par un quarré connu, & le produit recevant d'une part un plan de la même inconnuë par une grandeur connuë, & de l'autre un plan de cette inconnuë par une autre connuë; les deux sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé z la grandeur inconnuë, & a le côté du quarré connu, & b & c les deux connuës, que l'inconnuë z doit multiplier; les deux sommes $aazz + bz$ & $aazz + cz$ seront par la supposition des quarrez parfaits. Prenant donc $y - az$ pour le côté du premier quarré, & $x - az$ pour le côté du second; la premiére égalité sera $aazz + bz \propto aazz - 2ayz + yy$. Ou $2ayz + bz \propto yy$. Et $z \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et la seconde égalité sera $aazz + cz \propto aazz - 2axz + xx$. Ou $2axz + cz \propto xx$. Et $z \propto \frac{xx}{2ax + c} \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et multipliant chaque membre par $2ax + c$, on trouvera cette égalité $xx \propto \frac{2axyy + cyy}{2ay + b}$. Et on en tirera[b] une valeur $x \propto \frac{ayy + y\sqrt{aayy + 2acy + bc}}{2ay + b}$. Et afin que cette valeur soit commensurable, il est absolument nécessaire que la grandeur $aayy + 2acy + bc$ renfermée sous le signe $\surd$ soit un quarré parfait. C'est pourquoy nommant $v - ay$ le côté de ce même quarré, l'égalité sera $aayy + 2acy + bc \propto aayy - 2avy + vv$. Ou $2avy + 2acy \propto vv - bc$. Et $y \propto \frac{vv - bc}{2av + 2ac}$. Et l'arbitraire v surpasse $\surd bc$. b. 16. 1.

1ere *supposition* $\{aazz + bz \propto aazz - 2ayz + yy$. 2e $\{aazz + cz \propto aazz - 2axz + xx$.

Résolution infinie. $\{v$ *arbitraire.* $y \propto \frac{vv - bc}{2av + 2ac}$. $\{ z \propto \frac{yy}{2ay + b}$.

Exemple.

$$\begin{cases} aazz + bz. \; aazz + cz. \; v. \; y. \; z. & \text{Quarrez.} & \text{Côtez.} \\ \frac{1}{9}zz + 4z. \; \frac{1}{9}zz + 3z. \; 6. \; 4. \; \frac{12}{5}. & \left\{\frac{1}{9}zz + 4z \propto \frac{256}{25}. \; \frac{1}{9}zz + 3z \propto \frac{196}{25}.\right. & \left\{\frac{16}{5}. \; \frac{14}{5}.\right. \end{cases}$$

SECOND CAS.

42. *Et si chacun des plans est retranché du produit des quarrez; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La résolution sera formée à peu prés comme la précédente. Et l'arbitraire v surpassera chacune des connuës b & c. Et comme y ou sa valeur $\frac{vv - bc}{2av - 2ac}$ doit surpasser $\frac{b}{2a}$, afin que z ou $\frac{yy}{2ay - b}$ puisse être positive : si on multiplie de part & d'autre par $2av - 2ac$; on trouvera que le numérateur $vv - bc$ doit surpasser $bv - bc$, & qu'ainsi l'arbitraire v doit surpasser b, comme on l'a déja remarqué. Et pareillement, comme x ou sa valeur $\frac{vv - bc}{2av - 2ab}$ doit surpasser $\frac{c}{2a}$, afin que z ou sa valeur $\frac{xx}{2ax - c}$ puisse être positive; on trouvera que l'arbitraire v doit surpasser c. Et afin que le côté $az - y$ ou $y - az$ soit positif, il faut que les grandeurs az & y soient différentes, ou mettant pour z sa valeur $\frac{yy}{2ay - b}$, il faut qu'il y ait de la différence entre $\frac{ayy}{2ay - b}$ & y. Et multipliant le tout par $2ay - b$; il faut qu'il y ait encore de la différence entre ayy & $2ayy - by$, ou entre $\frac{b}{a}$ & l'inconnuë $y \propto \frac{vv - bc}{2av - 2ac}$. Et multipliant de part & d'autre par $2av - 2ac$, il faut qu'il y en ait entre $2bv - 2bc$ & $vv - bc$, & par conséquent en-
b. 23. 1. tre [b] l'arbitraire v & $b + \sqrt{bb - bc}$. Et il faut encore par la même raison qu'il y ait de la différence [b] entre v & $c + \sqrt{cc - bc}$, afin que le côté $x - az$ ou $az - x$ soit positif.

1^{ere} *supposition* $\{ aazz - bz \propto aazz - 2ayz + yy$. 2^{e} $\{ aazz - cz \propto aazz - 2axz + xx$.

Résolution infinie. $\{ v$ *arbitraire.* $y \propto \frac{vv - bc}{2av - 2ac}$. $z \propto \frac{yy}{2ay - b}$.

Exemple.

$\left\{ \begin{array}{l} aazz - bz.\ aazz - cz.\ v.\ y.\ z. \\ 25zz - 4z.\ 25zz - 6z.\ 12.\ 2.\ \frac{1}{4}. \end{array} \right.$ *Quarrez.* $\left\{ 25zz - 4z \propto \frac{9}{16}.\ 25zz - 6z \propto \frac{1}{16}. \right.$ *Côtez.* $\left\{ \frac{3}{4}.\ \frac{1}{4}. \right.$

TROISIEME CAS.

43. *ET si l'un des plans est ajoûté au produit des quarrez, & que l'autre plan soit retranché de ce même produit; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

La résolution sera découverte comme aux cas précédens. Et afin que z ou sa valeur $\frac{xx}{2ax - c}$ soit positive, la grandeur x ou sa valeur $\frac{vv + bc}{2av + 2ab}$ surpassera $\frac{c}{2a}$. Et par conséquent l'arbitraire v surpassera c.

1^{ere} *supposition* $\{ aazz + bz \propto aazz - 2ayz + yy$ 2^{e} $\{ aazz - cz \propto aazz - 2axz + xx$.

Résolution infinie. $\{ v$ *arbitraire.* $y \propto \frac{vv + bc}{2av - 2ac}$. $z \propto \frac{yy}{2ay + b}$.

Exemple.

Exemple.

$aazz + bz.\ aazz - cz.\ v.\ y.\ z.$	*Quarrez.*	*Côtez.*
$16zz + 4z.\ 16zz - 3z.\ 6.\ 2.\ \frac{1}{5}.$	$16zz + 4z \propto \frac{36}{25}.\ 16zz - 3z \propto \frac{1}{25}.$	$\frac{6}{5}.\ \frac{1}{5}.$

IV QUESTION.

PREMIER CAS.

44. *SI le produit des quarrez reçoit le premier plan; afin que la somme & le second plan soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé $y - az$ le côté du premier quarré $aazz + bz$, & x le côté du second cz. La premiére égalité sera $yy - 2ayz + aazz \propto aazz + bz$. Et $z \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et la seconde égalité sera $cz \propto xx$. Et $z \propto \frac{xx}{c} \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et multipliant par $2ay + b$, on aura $\frac{2ayxx + bxx}{c} \propto yy$. D'où l'on tire une [b] valeur $y \propto \frac{axx + x\sqrt{aaxx + bc}}{c}$. Et pour rendre y b. 16. 1.
commensurable, il faut que la grandeur $aaxx + bc$ renfermée sous le signe $\sqrt{\ }$ soit un quarré parfait. C'est pourquoi nommant $v - ax$ le côté du quarré; l'égalité sera $vv - 2avx + aaxx \propto aaxx + bc$. Ou $2avx \propto vv - bc$. Et $x \propto \frac{vv - bc}{2av}$. Et l'arbitraire v doit surpasser $\sqrt{bc}$.

Suppositions.	*Résolution infinie.*
$aazz + bz \propto aazz - 2ayz + yy.\ cz \propto xx.$	v *arbitraire.* $x \propto \frac{vv - bc}{2av}.\ z \propto \frac{xx}{c}.$

Exemple.

$aazz + bz.\ cz.\ v.\ x.\ z.$	*Quarrez.*	*Côtez.*
$4zz + 15z.\ 48z.\ 60.\ 12.\ 3.$	$4zz + 15z \propto 81.\ 48z \propto 144.$	$9.\ 12.$

SECOND CAS.

45. *ET si on ôte le premier plan du produit des quarrez; afin que le reste & le second plan soient des quarrez parfaits.*

On formera la résolution comme au cas précédent. Et l'arbitraire v n'aura point de limites. Cependant afin que le quarré $aazz - bz$ ne soit point nul, ou égal à zéro; il faut que son côté $y - az$ ou $az - y$ soit positif, ou qu'il y ait de la différence entre az & y, ou entre leurs valeurs $\frac{axx}{c}$ & $\frac{vv + bc}{2ac}$; & mettant pour x sa valeur $\frac{vv + bc}{2av}$, & divisant ensuitte de part & d'autre par $vv + bc$, & multipliant encore par $4acvv$;

il faudra qu'il y ait de l'inégalité entre $vv + bc$ & $2vv$, ou enfin entre $\sqrt{bc}$ & l'arbitraire v.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$$\{aazz - bz \propto aazz - 2ayz + yy.\ cz \propto xx.\ \{v \text{ arbitraire.}\ x \propto \frac{vv + bc}{2av}.\ z \propto \frac{xx}{c}.$$

$$\textit{Exemple.}\begin{cases} aazz - bz.\ cz.\ v.\ x.\ z. & \textit{Quarrez.} \quad \textit{Côtez.} \\ 4zz - 15z.\ 3z.\ 5.\ \frac{7}{2}.\ \frac{49}{12}. & \{4zz - 15z \propto \frac{49}{9}.\ 3z \propto \frac{49}{4}.\ \begin{cases}\frac{7}{3}.\ \frac{7}{2}.\end{cases}\end{cases}$$

V QUESTION.

PREMIER CAS.

46. *ET si on ajoûte deux grandeurs connuës, l'une au produit des quarrez, & l'autre au plan d'une connuë par l'inconnuë qu'on cherche; afin que les deux sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant pris b pour la grandeur connuë, qu'on ajoûte au produit $aazz$, & d pour celle qu'on ajoûte au plan cz; pour faire en sorte que les sommes $aazz + b$ & $cz + d$ soient chacune un quarré. Si on nomme x le côté du quarré $cz + d$; on aura déja $cz + d \propto xx$. Ou $z \propto \frac{xx - d}{c}$. Et mettant pour z sa valeur $\frac{xx - d}{c}$ dans la somme $aazz + b$; cette même somme qui doit être un quarré, sera $\frac{aax^4 - 2aadxx + aadd + bcc}{cc}$. Et parce que le dénominateur cc est déja un quarré; il suffira de faire en sorte que le numérateur soit encore un quarré. Nommant donc son côté $- axx + ad + \frac{bcc}{2ad}$, afin que toutes les parties du numérateur s'effacent, en comparant les termes; l'égalité sera $aax^4 - 2aadxx + aadd + bcc \propto aax^4 - 2aadxx + aadd - \frac{bccxx}{d} + bcc + \frac{bbc^4}{4aadd}$. Et par transposition, on trouvera $\frac{bbc^4}{4aadd} \propto \frac{bccxx}{d}$. Ou $\frac{bcc}{4aad} \propto xx$. Et $x \propto \frac{c\sqrt{b}}{2a\sqrt{d}}$. De sorte que la grandeur x sera commensurable, si b & d sont deux plans semblables, ou si $\frac{b}{d}$ est un quarré parfait. Mais la grandeur z sera négative, si $2ad$ vaut moins que $c\sqrt{b}$. La résolution qu'on donne ici n'est pas infinie. Mais on apprendra ailleurs la maniére de tirer des résolutions infinies de cette même résolution, qui n'est que générale.

Suppositions.

$$\{cz + d \propto xx.\ \{\sqrt{aazz + b} \propto \frac{1}{c}\sqrt{aax^4 - 2aadxx + aadd + bcc} \propto \frac{- axx + ad}{c} + \frac{bc}{2ad}.$$

$$\textit{Résolution générale.}\ \{x \propto \frac{c}{2a}\sqrt{\frac{b}{d}}.\ z \propto \frac{xx - d}{c} \propto \frac{bcc - 4aadd}{4aacd}.$$

Exemples.

$aazz + b$.	$cz + d$.	x.	z.	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$1zz + 1$.	$14z + 1$.	7.	$\frac{24}{7}$.	$1zz + 1 = \frac{625}{49}$.	$14z + 1 = 49$.	$\frac{25}{7}$.	7.
$1zz + 20$.	$4z + 20$.	2.	-4.	$1zz + 20 = 36$.	$4z + 20 = 4$.	6.	2.
$4zz + 45$.	$8z + 5$.	6.	$\frac{31}{8}$.	$4zz + 45 = \frac{1681}{16}$.	$8z + 5 = 36$.	41.	6.

SECOND CAS.

47. *ET si les deux grandeurs connuës sont retranchées, l'une du produit des quarrez, & l'autre du plan; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La résolution positive sera toûjours possible, si b & d sont deux [b] plans semblables, ou si $\frac{b}{d}$ est un quarré [b] parfait. Et on la trouvera en suivant les vestiges de la précédente. b. 1ere partie. 86 & 89. 8.

Suppositions.

$$cz - d = xx. \quad \sqrt{aazz - b} = \frac{1}{c}\sqrt{aax^4 + 2aadxx + aadd - bcc} = \frac{axx + ad}{c} - \frac{bc}{2ad}.$$

Résolution infinie. $x = \frac{c}{2a}\sqrt{\frac{b}{d}}$. $z = \frac{xx + d}{c} = \frac{bcc + 4aadd}{4aacd}$.

Exemples.

$aazz - b$.	$cz - d$.	x.	z.	*Quarrez.*		*Côtez.*	
$1zz - 12$.	$\frac{13}{2}z - 12$.	$\frac{13}{6}$.	$\frac{361}{104}$.	$1zz - 12 = \frac{529}{10816}$.	$\frac{13}{2}z - 12 = \frac{169}{16}$.	$\frac{23}{104}$.	$\frac{13}{4}$.
$4zz - 45$.	$8z - 5$.	6.	$\frac{41}{8}$.	$4zz - 45 = \frac{961}{16}$.	$8z - 5 = 36$.	$\frac{31}{4}$.	6.

III^e. IV^e. V^e CAS.

48. SI les quarrez doivent être $aazz + b$ & $cz - d$, ou $aazz - b$ & $cz + d$, ou $aazz - b$ & $-cz + d$; la valeur du quarré xx découverte par la voie précédente renfermeroit une [b] absurdité, puisqu'elle seroit défective, ou $-\frac{bcc}{4aad}$. b. 1ere partie. 7. 3.

SIXIEME CAS.

49. *MAis si on ajoûte une grandeur connuë au produit des quarrez, & que le plan soit retranché d'une grandeur connuë; afin que la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

On trouvera la résolution positive, si $\frac{b}{d}$ est un quarré, & que $2ad$ surpasse $c\sqrt{b}$.

Suppositions.

$\{ d - cz \propto xx.\ \{ \sqrt{aazz + b} \propto \frac{1}{c}\sqrt{aax^4 - 2aadxx + aadd + bcc} \propto \frac{-ax + ad}{c} + \frac{bcc}{2ad}.$

Résolution générale. $\{ x \propto \frac{c}{2a}\sqrt{\frac{b}{d}}.\ z \propto \frac{d - xx}{c} \propto \frac{4aadd - bcc}{4aacd}.$

Exemple.

					Quarrez.	*Côtez.*
$aazz + b.$	$d - cz.$	$x.$	$z.$			
$4zz + 45.$	$20 - 8z.$	$3.$	$\frac{11}{8}.$		$\{ 4zz + 45 \propto \frac{841}{16}.\ d - 8z \propto 9.$	$\{ \frac{29}{4}.\ 3.$

I COROLLAIRE ET QUESTION VI.

50. D*Eux grandeurs étant déterminées, pour trouver un quarré auquel chacune étant ajoûtée, les deux sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé $2b$ la somme des deux grandeurs connuës, & $2c$ leur différence, & z le côté du quarré; les deux quarrez seront $zz + b + c$,
a. 3. 2. & $zz + b - c$. Et prenant $-z + t + v$ pour [a] le côté du plus grand, & $-z + t - v$ pour [a] le côté du moindre; la premiére égalité [a] sera $zz + b + c \propto zz - 2tz + tt - 2vz + 2tv + vv$. Ou $2tz + 2vz \propto tt + 2tv + vv - b - c$. Et $z \propto \frac{tt + 2tv + vv - b - c}{2t + 2v}$. Et la seconde égalité sera $zz + b - c \propto zz - 2tz + tt + 2vz - 2tv + vv$. Ou $2tz - 2vz \propto tt - 2tv + vv - b + c$. Et $z \propto \frac{tt - 2tv + vv - b + c}{2t - 2v} \propto \frac{tt + 2tv + vv - b - c}{2t + 2v}$. Et multipliant de part & d'autre par chacun des deux dénominateurs; on trouvera l'égalité $t^3 - ttv - tvv - bt + ct + v^3 - bv + cv \propto t^3 + ttv - tvv - bt - ct - v^3 + bv + cv$. Ou $2ct$
b. 16. 1. $+ 2v^3 - 2bv \propto 2ttv$. D'où l'on [b] tirera $t \propto \frac{c}{2v} + \frac{1}{2v}\sqrt{4v^4 - 4bvv + cc}$.
Et prenant $r - 2vv$ ou $2vv - r$ pour côté du quarré renfermé sous le signe, on aura $4v^4 - 4bvv + cc \propto rr - 8rvv + 4v^4$. Ou $8rvv - 4bvv \propto rr - cc$. Et $vv \propto \frac{rr - cc}{8r - 4b}$. Et afin que la grandeur v soit commensurable; il faut que sa valeur soit un quarré parfait. Ce qui arriveroit si $rr - cc$ &
c. 1ere partie. 85. 8. $2r - 1b$ étoient deux plans [c] semblables, ou s'ils étoient deux [d] quarrez parfaits. Et cela se rapporte à la résolution de la question précédente, dont
d. 1ere partie. 47. 8. le second cas l'obtiendra tres-facilement, si la demie-somme b des grandeurs connuës est un quarré parfait. On peut éxaminer les autres cas de la même sorte; & tenter d'autres voies, si celle-ci ne sert pas.

II COROLLAIRE ET QUESTION VII.

51. POur résoudre la double égalité $aazz + bz$ & $cz + d$, ou pour trouver deux quarrez égaux, l'un à la grandeur $aazz + bz$, & l'autre à la grandeur $cz + d$.

Ayant nommé zx le côté du premier, & v le côté du second; la première égalité sera $aazz + bz \propto zzxx$. Et $z \propto \frac{b}{xx - aa}$. Et la seconde est $cz + d \propto vv$. Ou $z \propto \frac{vv - d}{c} \propto \frac{b}{xx - aa}$. Et multipliant par les dénominateurs, l'égalité sera $vvxx - dxx - aavv + aad \propto bc$. Et $xx \propto \frac{aavv - aad + bc}{vv - d}$. Et afin que la grandeur x soit commensurable, il faut que sa valeur découverte soit un quarré parfait. Ce qui arriveroit, si ses deux termes étoient deux plans [b] semblables, ou si chacun pouvoit b. 1ere partie. 85. 8. être [c] quarré. Et si on divisoit par aa cette même valeur, l'exposant seroit c. 1ere partie. 47. 8. encore un quarré; & ses termes $aavv - aad + bc$ & $aavv - aad$, ayant un quarré commun & inconnu $aavv$, la question se peut rapporter à la résolution de la précédente, si aad & $aad - bc$ sont deux plans semblables. Et les autres cas peuvent être éxaminez de la même sorte. Et on pourra tenter d'autres voies, lorsque celle-ci ne pourra rien fournir.

III COROLLAIRE ET QUESTION VIII.

PREMIER CAS.

52. ET si la double égalité est $aazz + bz$ & $aazz + c$. Ayant nommé $y - az$ le côté du premier, & $x - az$ le côté du second; la première égalité sera $aazz + bz \propto yy - 2ayz + aazz$. Et $2ayz + bz \propto yy$. Ou $z \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et la seconde égalité sera $aazz + c \propto aazz - 2axz + xx$. Ou $2axz \propto \frac{xx - c}{2ax} \propto \frac{yy}{2ay + b}$. Et multipliant de part & d'autre par $2ax$, on aura $xx - c \propto \frac{2axyy}{2ay + b}$. D'où l'on [b] tirera $x \propto \frac{ayy}{2ay + b}$ b. 16. 1. $+ \frac{1}{2ay + b}\sqrt{aay^4 + 4aacyy + 4abcy + bbc}$. Et prenant $ayy + 2ac$ pour côté du quarré renfermé sous le signe, l'égalité sera $aay^4 + 4aacyy + 4abcy + bbc \propto aay^4 + 4aacyy + 4aacc$. Ou $4abcy \propto 4aacc - bbc$. Et $y \propto \frac{4aac - bb}{4ab}$.

1ere *supposition.* — 2e *supposition.*

$\{aazz + bz \propto yy - 2ayz + aazz. \quad \{aazz + c \propto xx - 2axz + aazz.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aac - bb}{4ab}. \quad z \propto \frac{yy}{2ay + b} \propto \frac{16a^4cc - 8aabbc + b^4}{32a^4bc + 8aab^3}.$

Exemple.

Quarrez. — *Côtez.*

$$\begin{cases} aazz + bz. & aazz + c. & y. & z. \\ 9zz + 6z. & 9zz + 4. & \frac{3}{2}. & \frac{3}{20}. \end{cases} \quad \left\{ 9zz + 6z \propto \frac{441}{400}. \quad 9zz + 4 \propto \frac{1681}{400}. \right. \quad \left\{ \frac{21}{20}. \quad \frac{41}{20}. \right.$$

SECOND CAS.

53. ET si la double égalité est $aazz - bz$ & $aazz - c$; la résolution découverte par la même voie que la précédente, sera positive, si $2ac$ surpasse $b\sqrt{c}$, ou si b vaut moins que $2a\sqrt{c}$. Mais si b surpasse $2a\sqrt{c}$; la résolution sera négative: comme au second exemple qu'on propose ici.

1ere *supposition.* — 2e *supposition.*

$\{aazz - bz \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz - c \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aac + bb}{4ab}.\ z \propto \frac{yy}{2ay - b} \propto \frac{16a^4cc + 8aabbc + b^4}{32a^4bc - 8aab^3}.$

Exemples.

$aazz - bz.\ aazz - c.\ y.\ z.$ *Quarrez.* *Côtez.*

$9zz - 6z.\ 9zz - 4.\ \frac{5}{2}.\ \frac{25}{36}.\ \{9zz - 6z \propto \frac{25}{144}.\ 9zz - 4 \propto \frac{49}{144}.\ \{\frac{5}{12}.\ \frac{7}{12}.$

$9zz - 24z.\ 9zz - 4.\ \frac{5}{2}.\ -\frac{25}{36}.\ \{9zz - 24z \propto \frac{3025}{144}.\ 9zz - 4 \propto \frac{49}{144}.\ \{\frac{55}{12}.\ \frac{7}{12}.$

TROISIEME CAS.

54. ET si la double égalité est $aazz - bz$ & $aazz + c$; la valeur de l'inconnuë z trouvée par la voie précédente, est toûjours négative. Mais on donnera un moyen ailleurs de trouver une valeur positive, & même une infinité de cette inconnuë z avec le secours de la négative qu'on vient de découvrir, & qu'on expose ici.

1ere *supposition.* — 2e *supposition.*

$\{aazz - bz \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz + c \propto aazz + 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{bb - 4aac}{4ab}.\ z \propto \frac{yy}{2ay - b} \propto \frac{16a^4cc - 8aabbc + b^4}{-32a^4bc - 8aab^3}.$

Exemple.

$aazz - bz.\ aazz + c.\ y.\ z.$ *Quarrez.* *Côtez.*

$9zz - 24z.\ 9zz + 4.\ \frac{3}{2}.\ -\frac{3}{20}.\ \{9zz - 24z \propto \frac{1521}{400}.\ 9zz + 4 \propto \frac{1681}{400}.\ \{\frac{39}{20}.\ \frac{41}{20}.$

QVATRIEME CAS.

55. ET si la double égalité est $aazz + bz$ & $aazz - c$; la résolution sera positive, si b surpasse $2a\sqrt{c}$. Et si b vaut moins que $2a\sqrt{c}$; la résolution sera négative, comme on le voit ici dans le second exemple.

1ere *supposition.* — 2e *supposition.*

$\{aazz + bz \propto aazz + 2ayz + yy.$ $\{aazz - c \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aac + bb}{4ab}.\ z \propto \frac{yy}{b - 2ay} \propto \frac{16a^4cc + 8aabbc + b^4}{8aab^3 - 32a^4bc}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllll} aazz + bz. & aazz - c. & y. & z. & \textit{Quarrez.} & \textit{Côtez.} \\ 9zz + 24z. & 9zz - 4. & \frac{5}{2}. & \frac{25}{36}. & \left\{ 9zz + 24z \propto \frac{3025}{144}.\ 9zz - 4 \propto \frac{49}{144}. \right. & \left\{ \frac{55}{12}.\ \frac{7}{12}. \right. \\ 9zz + 6z. & 9zz - 4. & \frac{5}{2}. & -\frac{25}{36}. & \left\{ 9zz + 6z \propto \frac{25}{144}.\ 9zz - 4 \propto \frac{49}{144}. \right. & \left\{ \frac{5}{12}.\ \frac{7}{12}. \right. \end{array}\right.$$

IX QUESTION.

PREMIER CAS.

56. SI la double égalité eſt $aazz + bz + c$ & $aazz + d$; pour en trouver la réſolution.

Ayant pris $az + y$ pour le côté du premier quarré, & $x - az$ pour le côté du ſecond; la premiére égalité ſera $aazz + bz + c \propto aazz + 2ayz + yy$. Ou $bz - 2ayz \propto yy - c$. Et $z \propto \frac{yy - c}{b - 2ay}$. Et la ſeconde ſera $aazz - 2axz + xx \propto aazz + d$. Ou $2axz \propto xx - d$. Et $z \propto \frac{xx - d}{2ax} \propto \frac{yy - c}{b - 2ay}$. Et multipliant chaque membre par $2ax$, & prenant enſuitte la valeur de l'inconnuë x, on trouvera $x \propto \frac{ayy - ac}{b - 2ay} + \frac{1}{b - 2ay}\sqrt{aay^4 - 2aacyy + aacc + 4aadyy - 4abdy + bbd}$. Et prenant pour côté de ce qui eſt ſous le ſigne la grandeur $ayy - ac + 2ad$; l'égalité des quarrez ſera $aay^4 - 2aacyy + aacc + 4aadyy - 4abdy + bbd \propto aay^4 - 2aacyy + aacc + 4aadyy - 4aacd + 4aadd$. Ou $4abdy \propto bbd + 4aacd - 4aadd$. &c. Et ſi la réſolution étoit négative, on s'en ſerviroit comme on l'enſeignera dans la ſuitte, pour en trouver d'autres qui ſeroient poſitives. Et on peut dire auſſi la même choſe des réſolutions qu'on donnera preſque dans tout le reſte de ce Livre. Et ſi le quarré yy ſurpaſſe c; la valeur de z ſera poſitive, lorſque le dénominateur $b - 2ay$ ſera poſitif, ou que $\frac{b}{2a}$ ſurpaſſera $\frac{bb + 4aac - 4aad}{4ab}$. Et multipliant de part & d'autre par $4ab$, il faudra que le produit $2bb$ ſurpaſſe le numérateur $bb + 4aac - 4aad$, ou par conſéquent que b ſurpaſſe $2a\sqrt{c - d}$. Et ce ſeroit le contraire, ſi le quarré yy étoit moindre que c.

$$\begin{array}{ll} 1^{ere}\ \textit{ſuppoſition.} & 2^{e}\ \textit{ſuppoſition.} \\ \{ aazz + bz + c \propto aazz + 2ayz + yy. & \{ aazz + d \propto aazz - 2axz + xx. \end{array}$$

Réſolution générale. $\left\{ y \propto \frac{bb + 4aac - 4aad}{4ab}.\ z \propto \frac{yy - c}{b - 2ay}. \right.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllll} aazz + bz + c. & aazz + d. & y. & z. & \textit{Quarrez.} & \\ 1zz + 12z + 4. & 1zz + 4. & 3. & \frac{5}{6}. & \left\{ 1zz + 12z + 4 \propto \frac{529}{36}.\right. & 1zz + 4 \propto \frac{169}{36}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

57. ET si la double égalité est $aazz - bz - c$ & $aazz - d$; on suivra pour la résolution les mêmes voies que pour la précédente. Et la valeur de z sera réelle, si b vaut moins que $2a\sqrt{d - c}$.

1ere supposition. $\{aazz - bz - c \propto aazz - 2ayz + yy.$ *2e supposition.* $\{aazz - d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb - 4aac + 4aad}{4ab}.\ z \propto \dfrac{yy + c}{2ay - b}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllll} aazz - bz - c. & aazz - d. & y. & z. & \multicolumn{2}{c}{\textit{Quarrez.}} \\ 9zz - 3z - 1. & 9zz - 2. & \frac{5}{4}. & \frac{41}{72}. & \{9zz - 3z - 1 \propto \frac{121}{576}. & 9zz - 2 \propto \frac{529}{576}. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

58. ET si la double égalité est $aazz + bz + c$ & $aazz - d$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $2a\sqrt{c + d}$.

1ere supposition. $\{aazz + bz + c \propto aazz + 2ayz + yy.$ *2e supposition.* $\{aazz - d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb + 4aac + 4aad}{4ab}.\ z \propto \dfrac{yy - c}{b - 2ay}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllll} aazz + bz + c. & aazz - d. & y. & z. & \multicolumn{2}{c}{\textit{Quarrez.}} \\ 1zz + 6z + 1. & 1zz - 3. & \frac{13}{6}. & \frac{133}{60}. & \{1zz + 6z + 1 \propto \frac{69169}{3600}. & 1zz - 3 \propto \frac{6889}{3600}. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

59. ET si la double égalité est $aazz - bz - c$ & $aazz + d$; la valeur de z découverte, comme aux cas précédens, sera toûjours négative.

1ere supposition. $\{aazz - bz - c \propto aazz - 2ayz + yy.$ *2e supposition.* $\{aazz + d \propto aazz + 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb - 4aac - 4aad}{4ab}.\ z \propto \dfrac{yy + c}{2ay - b}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllll} aazz - bz - c. & aazz + d. & y. & z. & \multicolumn{2}{c}{\textit{Quarrez.}} \\ 1zz - 6z - 1. & 1zz + 3. & \frac{5}{6}. & -\frac{61}{156}. & \{1zz - 6z - 1 \propto \frac{36481}{24336}. & 1zz + 3 \propto \frac{76729}{24336}. \end{array}\right.$$

CINQUIEME CAS.

60. ET si la double égalité est $aazz + bz - c$ & $aazz + d$; la résolution sera toûjours positive.

1ere supposition

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aazz + bz - c \propto aazz - 2ayz + yy. \quad \{ aazz + d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aac + 4aad - bb}{4ab}. \quad z \propto \dfrac{yy + c}{2ay + b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz + bz - c. & aazz + d. \quad y. \quad z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1zz + 2z - 1. & 1zz + 3. \quad \frac{3}{2}. \quad \frac{13}{20}. \quad \{ 1zz + 2z - 1 \propto \frac{289}{400}. \quad 1zz + 3 \propto \frac{1369}{400}. \end{cases}$$

SIXIEME CAS.

61. ET si la double égalité est $aazz + bz - c$ & $aazz - d$; il faudra que b surpasse $2a\sqrt{d - c}$, afin que l'inconnuë puisse être positive.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aazz + bz - c \propto aazz - 2ayz + yy. \quad \{ aazz - d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aac - 4aad - bb}{4ab}. \quad z \propto \dfrac{yy + c}{2ay + b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz + bz - c. & aazz - d. \quad y. \quad z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1zz + 2z - 3. & 1zz - 1. \quad \frac{1}{2}. \quad \frac{13}{12}. \quad \{ 1zz + 2z - 3 \propto \frac{49}{144}. \quad 1zz - 1 \propto \frac{25}{144}. \end{cases}$$

SEPTIEME CAS.

62. ET si la double égalité est $aazz - bz + c$ & $aazz + d$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $2a\sqrt{c - d}$, & que c vaudra moins que le quarré yy. Mais ce seroit le contraire, si le quarré yy étoit plus grand que c.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aazz - bz + c \propto aazz - 2ayz + yy. \quad \{ aazz + d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb + 4aac - 4aad}{4ab}. \quad z \propto \dfrac{yy - c}{2ay - b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz - bz + c. & aazz + d. \quad y. \quad z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 4zz - 2z + 3. & 4zz + 1. \quad \frac{9}{4}. \quad \frac{33}{112}. \quad \{ 4zz - 2z + 3 \propto \frac{8649}{3136}. \quad 4zz + 1 \propto \frac{4225}{3136}. \end{cases}$$

HUITIEME CAS.

63. ET si la double égalité est $aazz - bz + c$ & $aazz - d$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $2a\sqrt{c + d}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aazz - bz + c \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz - d \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb + 4aac + 4aad}{4ab}. \; z \propto \frac{yy - c}{2ay - b}.$

Exemple.

$\left\{\begin{array}{l} aazz - bz + c. \; aazz - d. \; y. \; z. \\ 1zz - 2z + 3. \; 1zz - 1. \; \frac{5}{2}. \; \frac{13}{12}. \end{array}\right.$ *Quarrez.* $\{1zz - 2z + 3 \propto \frac{289}{144}. \; 1zz - 1 \propto \frac{25}{144}.$

X QUESTION.

PREMIER CAS.

64. Pour résoudre l'égalité doublée $aazz + bz + c$ & $aazz + dz$. Ayant pris $y - az$ pour le côté du premier quarré, & $x - az$ pour le côté du second; la première égalité sera $aazz + bz + c \propto aazz - 2ayz + yy$. Ou $2ayz + bz \propto yy - c$. Et $z \propto \frac{yy - c}{2ay + b}$. Et la seconde égalité sera $aazz + dz \propto xx - 2axz + aazz$. Ou $2axz + dz \propto xx$. Et $z \propto \frac{xx}{2ax + d} \propto \frac{yy - c}{2ay + b}$. Et multipliant de part & d'autre par $2ax + d$, on aura l'égalité $xx \propto \frac{2axyy - 2acx + dyy - cd}{2ay + b}$. D'où l'on tirera [b] une valeur $x \propto \frac{ayy - ac}{2ay - b} + \frac{1}{2ay + b}\sqrt{aay^4 - 2acyy + aacc + 2ady^3 + bdyy - 2acdy - bcd}$. Et afin que cette valeur soit commensurable, il faudra que ce qui est sous le signe $\surd$ soit un quarré parfait. C'est pourquoi nommant $ayy - ac + dy + \frac{bd - dd}{2a}$ le côté de ce même quarré, afin que toutes les parties, où l'inconnuë y aura plusieurs dimensions, se puissent effacer; le quarré sera $aay^4 - 2acyy + aacc + 2ady^3 + bdyy - 2acdy - bcd \propto aay^4 - 2acyy + aacc + 2ady^3 - 2acdy + ddyy + bdyy - bcd + \frac{bddy}{a} + \frac{bbdd}{4aa} - ddyy + cdd - \frac{d^3y}{a} - \frac{bd^3}{2aa} + \frac{d^4}{4aa}$. Ou $\frac{bbdd - 2bd^3 + d^4}{4aa} + cdd \propto \frac{d^3y - bddy}{a}$. Et divisant chaque membre par dd, & multipliant les produits par $4aa$, on aura enfin l'égalité $bb - 2bd + dd + 4aac \propto 4ady - 4aby$. Et $y \propto \frac{bb - 2bd + dd + 4aac}{4ad - 4ab}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aazz + bz + c \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz + dz \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb - 2bd + dd + 4aac}{4ad - 4ab}. \; z \propto \frac{yy - c}{2ay + b}.$

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{aazz - bz - c \propto aazz - 2ayz + yy. \quad \{aazz + dz \propto aazz - 2ax + xx.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb + 2bd + dd - 4aac}{4ab + 4ad}. \quad z \propto \dfrac{yy + c}{2ay - b}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} aazz - bz - c. & aazz + dz. & y. \quad z. & \textit{Quarrez.} \\ 4zz - 1z - 4. & 4zz + 15z. & \frac{3}{2}. \ \frac{5}{4}. & \{4zz - 1z - 4 \propto 1. \quad 4zz + 15z \propto 25. \end{array}\right.$$

CINQUIEME CAS.

68. Et si la double égalité est $aazz + bz - bc$ & $aazz + dz$; lorsque b surpassera d, & que $b - d$ surpassera $2a\sqrt{c}$; il faudra pour rendre la résolution positive, que b soit moindre que $\sqrt{dd - 4aac}$, si on veut régler sa résolution sur le modéle qu'on expose ici.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{aazz + bz - c \propto aazz + 2ayz + yy. \quad \{aazz + dz \propto aazz - 2axz + xx.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{bb - 2bd + dd - 4aac}{4ab - 4ad}. \quad z \propto \dfrac{yy + c}{b - 2ay}.$

Exemples.

$$\left\{\begin{array}{llll} aazz + bz - c. & aazz + dz. & y. \quad z. & \textit{Quarrez.} \\ 1zz + 5z - 3. & 1zz + 3z. & -1. \ \frac{4}{7}. & \{1zz + 5z - 3 \propto \frac{9}{16}. \quad 1zz + 3z \propto \frac{100}{16}. \\ 1zz + 6z - 2. & 1zz + 2z. & \frac{1}{2}. \ \frac{9}{20}. & \{1zz + 6z - 2 \propto \frac{361}{400}. \quad 1zz + 2z \propto \frac{441}{400}. \\ 1zz + 4z - 2. & 1zz + 5z. & \frac{7}{4}. \ \frac{81}{8}. & \{1zz + 4z - 2 \propto \frac{9025}{64}. \quad 1zz + 5z \propto \frac{9801}{64}. \end{array}\right.$$

SIXIEME CAS.

69. Et si la double égalité est $aazz + bz - c$ & $aazz - dz$; lorsque $b + d$ surpassera $2a\sqrt{c}$; il faudra pour rendre la résolution positive, que b surpasse $\sqrt{dd - 4aac}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{aazz + bz - c \propto aazz - 2ayz + yy. \quad \{aazz - dz \propto aazz - 2axz + xx.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aac - bb - 2bd - dd}{4ab + 4ad}. \quad z \propto \dfrac{yy + c}{2ay + b}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} aazz + bz - c. & aazz - dz. & y. \quad z. & \textit{Quarrez.} \\ 16zz + 5z - 3. & 16zz - 3z. & 1. \ \frac{4}{13}. & \{16zz + 5z - 3 \propto \frac{9}{169}. \quad 16zz - 3z \propto \frac{100}{169}. \end{array}\right.$$

SEPTIEME CAS.

70. ET si la double égalité est $aazz - bz + c$ & $aazz + dz$; il faudra que b soit moindre que $\sqrt{4aac + dd}$, pour rendre la résolution positive. Et ce seroit le contraire, si le quarré yy étoit plus grand que c.

1^{ere} *supposition.* 2^{e} *supposition.*

$\{aazz - bz + c \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz + dz \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb + 2bd + dd + 4aac}{4ab + 4ad}.$ $z \propto \frac{yy - c}{2ay - b}.$

Exemples.

				Quarrez.
$aazz - bz + c.$	$aazz + dz.$	$y.$	$z.$	
$1zz - 3z + 3.$	$1zz + 1z.$	$\frac{7}{4}.$	$\frac{1}{8}.$	$\{1zz - 3z + 3 \propto \frac{169}{64}.$ $1zz + 1z \propto \frac{9}{64}.$
$1zz - 3z + 1.$	$1zz + 1z.$	$\frac{5}{4}.$	$-\frac{9}{8}.$	$\{1zz - 3z + 1 \propto \frac{361}{64}.$ $1zz + 1z \propto \frac{9}{64}.$

HUITIEME CAS.

71. ET si l'égalité doublée est $aazz - bz + c$ & $aazz - dz$; la résolution sera réelle, lorsque b surpassera d, & sera moindre que $\sqrt{dd + 4aac}$. Et ce seroit le contraire, si le quarré yy étoit plus grand que c.

1^{ere} *supposition.* 2^{e} *supposition.*

$\{aazz - bz + c \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz - dz \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb - 2bd + dd + 4aac}{4ab - 4ad}.$ $z \propto \frac{yy - c}{2ay - b}.$

Exemple.

				Quarrez.
$aazz - bz + c.$	$aazz - dz.$	$y.$	$z.$	
$1zz - 3z + 4.$	$1zz - 1z.$	$\frac{5}{2}.$	$\frac{9}{8}.$	$\{1zz - 3z + 4 \propto \frac{121}{64}.$ $1zz - 1z \propto \frac{9}{64}.$

XI QUESTION.

72. SI on propose à résoudre une double égalité $aazz + bz + c$ & $dz + e$. Ayant nommé $y - az$ le côté du premier quarré, & x le côté du second; la premiére égalité sera $aazz + bz + c \propto aazz - 2ayz + yy$. Ou $2ayz + bz \propto yy - c$. Et $z \propto \frac{yy - c}{2ay + b}$. Et la seconde sera $dz + e \propto xx$. Et $z \propto \frac{xx - e}{d} \propto \frac{yy - c}{2ay + b}$. Et multipliant de part & d'autre par $2ady + bd$, on aura l'égalité $2ayxx - 2aey + bxx - be \propto dyy - cd$. D'où l'on [b] tirera une valeur $y \propto \frac{axx - ae}{d} + \frac{1}{d}\sqrt{aax^4 - 2aaexx + aaee}$ b. 16. 1.

$+bdxx+cdd-bde$. Et nommant $v-axx$ le côté du quarré renfermé sous le signe $\sqrt{}$; ce même quarré sera $vv-2avxx+aax^4 \propto aax^4-2aaexx+aaee+bdxx+cdd-bde$. Ou $vv-aaee-cdd+bde \propto 2avxx-2aaexx+bdxx$. Et $xx \propto \frac{vv-aaee-cdd+bde}{2av-2aae+bd}$. Et afin que la grandeur x soit commensurable, il est à propos que les deux termes $vv-aaee-cdd+bde$ & $2av-2aae+bd$ soient deux plans semblables; ce qu'on obtiendra, si chacun peut être un quarré. De sorte que la question se peut rapporter à la résolution de la question cinquiéme. Et on peut éxaminer de la même sorte les huit cas qui restent. Et si la résolution étoit négative; elle serviroit, comme on doit l'enseigner ailleurs pour en découvrir une autre positive, & même une infinité.

1[ere] *supposition* $\{aazz+bz+c \propto aazz-2ayz+yy.$ 2[e] $\{dz+e \propto xx.$

Résolution générale. $\{\ xx \propto \frac{vv-aaee-cdd+bde}{2av-2aae+bd}.\ \ y \propto \frac{v-ae}{d}.\ \ z \propto \frac{yy-c}{2ay+b}.$

Exemple.

$aazz+bz+c.$	$dz+e.$	$v.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*	
$1zz+2z+2.$	$1z+2.$	$\frac{3}{2}.$	$-\frac{1}{2}.$	$-\frac{7}{4}.$	$\{1zz+2z+2 \propto \frac{25}{16}.$	$1z+2 \propto \frac{1}{4}.$

XII QUESTION ET PRINCIPE.

PREMIER CAS.

73. POur résoudre une double égalité $aazz+bz+d$ & $cz+d$. Ayant nommé simplement y le côté du premier, & x le côté du second; les deux égalitez seront $aazz+bz+d \propto yy$, & $cz+d \propto xx$. Et ôtant la seconde de la premiére; ou le premier membre $cz+d$ du premier $aazz+bz+d$, & le second xx du second yy: l'égalité sera $aazz+bz-cz \propto yy-xx$. Et considérant attentivement cette égalité, je reconnois que le membre $yy-xx$ est un plan de la somme $y+x$ des côtez y & x par leur différence $y-x$. D'où je conclûs, que si je puis trouver deux grandeurs, dont le plan soit $aazz+bz-cz$, & telles que la moitié de leur somme comprenne le côté az du quarré $aazz$, afin que ce quarré s'efface dans les comparaisons des membres; la moitié de la somme de ces mêmes
b. 2. 2. grandeurs sera prise [b] pour y, & la moitié de leur différence pour x. Mais divisant $aazz+bz-cz$ par az, l'exposant est $az+\frac{b-c}{1a}$. Et la moitié de la somme des deux grandeurs az & $az+\frac{b-c}{1a}$ est $az+\frac{b-c}{2a}$, que je prens pour y; & la moitié de leur différence est $\frac{b-c}{2a}$, que je prens pour x. Et comparant le quarré yy ou son égal $aazz+bz+d$ avec le quarré $aazz+bz-cz+\frac{bb-2bc+cc}{4aa}$ de la demie-somme $az+\frac{b-c}{2a}$, ou l'autre quar-

ré $cz + d \propto xx$ avec le quarré $\frac{bb - 2bc + cc}{4aa}$ de la demie-différence $\frac{b - c}{2a}$, on trouvera toûjours une même valeur de l'inconnuë z. Mais afin que la résolution soit réelle, il faudra que le quarré $bb - 2bc + cc$ surpasse $4aad$.

Double égalité.	*Resolution générale.*
$\{ aazz + bz + d \propto yy.\ cz + d \propto xx.$	$\{ z \propto \frac{bb - 2bc + cc - 4aad}{4aac}.$

Exemples.

			Quarrez.	*Côtez.*
$aazz + bz + d.$	$cz + d.$	$z.$		
$1zz + 5z + 2.$	$1z + 2.$	$2.$	$\{ 1zz + 5z + 2 \propto 16.\ 1z + 2 \propto 4.$	$\{ 4.\ 2.$
$1zz + 2z + 2.$	$1z + 2.$	$-\frac{7}{4}.$	$\{ 1zz + 2z + 2 \propto \frac{25}{16}.\ 1z + 2 \propto \frac{1}{4}.$	$\{ \frac{5}{4}.\ \frac{1}{2}.$

SECOND CAS.

74. Et si la double égalité est $aazz - bz - d$ & $cz - d$; la résolution découverte par la même voie que la précédente sera toûjours réelle.

Double égalité.	*Résolution générale.*
$\{ aazz - bz - d \propto yy.\ cz - d \propto xx.$	$\{ z \propto \frac{bb + 2bc + cc + 4aad}{4aac}.$

Exemple.

			Quarrez.	*Côtez.*
$aazz - bz - d.$	$cz - d.$	$z.$		
$1zz - 5z - 2.$	$1z - 2.$	$11.$	$\{ 1zz - 5z - 2 \propto 64.\ 1z - 2 \propto 9.$	$\{ 8.\ 3.$

TROISIEME CAS.

75. Et si la double égalité est $aazz + bz + d$ & $d - cz$; la résolution sera positive, lorsque $2a\sqrt{d}$ surpassera $b + c$.

Double égalité.	*Résolution générale.*
$\{ aazz + bz + d \propto yy.\ d - cz \propto xx.$	$\{ z \propto \frac{4aad - bb - 2bc - cc}{4aac}.$

Exemple.

			Quarrez.	*Côtez.*
$aazz + bz + d.$	$d - cz.$	$z.$		
$1zz + 5z + 12.$	$12 - 1z.$	$3.$	$\{ 1zz + 5z + 12 \propto 36.\ 12 - 1z \propto 9.$	$\{ 6.\ 3.$

QUATRIEME CAS.

76. Et si la double égalité est $aazz - bz + d$ & $d - cz$; la résolution sera positive, lorsque $4aad$ surpassera le quarré $bb - 2bc + cc$ de $b - c$ ou de $c - b$.

Double égalité. *Résolution générale.*

$$\{aazz - bz + d \propto yy.\quad d - cz \propto xx.\quad \{z \propto \frac{4aad - bb + 2bc - ce}{4aac}.$$

Exemple.

$\{aazz - bz + d.\quad d - cz.\quad z.$ *Quarrez.* *Côtez.*

$\{1zz - 5z + 12.\quad 12 - 1z.\quad 8.\ \{1zz - 5z + 12 \propto 36.\quad 12 - 1z \propto 4.\quad \{6.\ 2.$

CINQUIEME CAS.

77. ET si la double égalité est $aazz - bz + d$ & $cz + d$; la résolution sera positive, lorsque $b + c$ surpassera $2a\sqrt{c}$.

Double égalité. *Résolution générale.*

$$\{aazz - bz + d \propto yy.\quad cz + d \propto xx.\quad \{z \propto \frac{bb + 2bc + cc - 4aad}{4aac}.$$

Exemple.

$\{aazz - bz + d.\quad cz + d.\quad z.$ *Quarrez.* *Côtez.*

$\{1zz - 5z + 2.\quad 1z + 2.\quad 7.\ \{1zz - 5z + 2 \propto 16.\quad 1z + 2. \propto 9.\quad \{4.\ 3.$

SIXIEME CAS.

78. ET si les grandeurs $aazz + bz - d$ & $cz - d$ doivent être des quarrez parfaits; la résolution sera toûjours réelle.

Double égalité. *Résolution générale.*

$$\{aazz + bz - d \propto yy.\quad cz - d \propto xx.\quad \{z \propto \frac{bb - 2bc + cc + 4aad}{4aac}.$$

Exemple.

$\{aazz + bz - d.\quad cz - d.\quad z.$ *Quarrez.* *Côtez.*

$\{1zz + 5z - 2.\quad 1z - 2.\quad 6.\ \{1zz + 5z - 2 \propto 64.\quad 1z - 2 \propto 4.\quad \{8.\ 2.$

COROLLAIRE ET QUESTION XII.

79. SI l'égalité doublée, qu'on propose à résoudre, est $aazz + bz + dee$ & $cz + dff$; ou si les parties entiérement connuës dee & dff ont pour exposans des quarrez ee & ff. On multipliera la premiére grandeur $aazz + bz + dee$ par le second quarré ff, & la seconde grandeur $cz + dff$ par le premier quarré ee. Et les produits $aaffzz + bffz + deeff$ & $ceez + deeff$ seront des quarrez nouveaux qu'on découvrira par les régles de la question précédente. Et les cinq cas qui restent y seront rapportez de la même sorte.

XIII QUESTION.

PREMIER CAS.

80. SI on propose à résoudre une double égalité $azz + bz + dd$ & $cz + dd$. Ayant nommé $yz - d$ le côté du premier, & $xz - d$ le côté

côté du second ; la premiére égalité sera $azz + bz + dd \propto yyzz - 2dyz + dd$. Ou $bz + 2dyz \propto yyzz - azz$. Et $z \propto \frac{b + 2dy}{yy - a}$. Et la seconde égalité sera $cz + dd \propto xxzz - 2dxz + dd$. Ou $xxz \propto c + 2dx$. Et $z \propto \frac{c + 2dx}{xx} \propto \frac{b + 2dy}{yy - a}$. Et multipliant de part & d'autre par xx, & par $yy - a$; l'égalité sera $cyy - ac + 2dxyy - 2adx \propto bxx + 2dyxx$. D'où l'on tirera une valeur $x \propto \frac{dyy - ad}{b + 2dy} + \frac{1}{b + 2dy}\sqrt{ddy^4 - 2addyy + aadd + 2cdy^3 + bcyy - 2acdy - abc}$. Et prenant pour côté du quarré, qui doit être renfermé sous le signe, la grandeur $dyy - ad + cy + \frac{bc - cc}{2d}$, afin que toutes les parties, où y a plusieurs dimensions, se puissent effacer ; le quarré sera $ddy^4 - 2addyy + aadd + 2cdy^3 + bcyy - 2acdy - abc \propto ddy^4 - 2addyy + aadd + 2cdy^3 + bcyy - 2acdy - abc + \frac{bccy - c^3y}{d} + \frac{bbcc - 2bc^3 + c^4}{4dd} + acc$. Ou $\frac{bbcc - 2bc^3 + c^4 + 4accdd}{4dd} \propto \frac{c^3y - bccy}{d}$. Et divisant chaque membre par cc, & le multipliant aussi par $4dd$; on aura enfin l'égalité $bb - 2bc + cc + 4add \propto 4cdy - 4bdy$. &c.

Et si on eût pris $yz + d$ pour côté du premier quarré, on auroit trouvé pour derniére égalité $bb - 2bc + cc + 4add \propto 4bdy - 4cdy$. &c.

1ere supposition. $\{ azz + bz + dd \propto yyzz - 2dyz + dd.$ *2e supposition.* $\{ cz + dd \propto xxzz - 2dxz + dd.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb - 2bc + cc + 4add}{4cd - 4bd}$. $z \propto \frac{b + 2dy}{yy - a}$.

Exemples.

$azz + bz + dd.$	$cz + dd.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*	
$3zz + 5z + 1.$	$3z + 1.$	$-2.$	$1.$	$\{ 3zz + 5z + 1 \propto 9.$	$3z + 1 \propto 4.$
$3zz + 3z + \frac{1}{4}.$	$5z + \frac{1}{4}.$	$\frac{7}{4}.$	$76.$	$\{ 3zz + 3z + \frac{1}{4} \propto \frac{70225}{4}.$	$5z + \frac{1}{4} \propto \frac{1521}{4}.$

SECOND CAS.

81\. Et si la double égalité est $azz + bz + dd$ & $dd - cz$; la résolution découverte par une voie semblable à celle qui précéde, sera positive, lorsque $\frac{b}{2a}$ surpassera y ou sa valeur, ou lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4add}$. Et ce seroit le contraire, si a surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. $\{ azz + bz + dd \propto yyzz + 2dyz + dd.$ *2e supposition.* $\{ dd - cz \propto xxzz - 2dxz + dd.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb + 2bc + cc + 4add}{4bd + 4cd}$. $z \propto \frac{b - 2dy}{yy - a}$.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} azz + bz + dd. & dd - cz. & y. & z. \\ 1zz + 5z + 1. & 1 - 1z. & \frac{5}{3}. & \frac{15}{16}. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \textit{Quarrez.} \\ \{1zz + 5z + 1 \propto \frac{1681}{256}.\ 1 - 1z \propto \frac{1}{16}. \end{array}$$

TROISIEME CAS.

82. ET si la double égalité est $azz - bz + dd$ & $cz + dd$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4add}$. Et ce seroit le contraire, si a surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{azz - bz + dd \propto yyzz - 2dyz + yy. \quad \{cz + dd \propto xxzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{bb + 2bc + cc + 4add}{4bd + 4cd}.\ z \propto \frac{2dy - b}{yy - a}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} azz - bz + dd. & cz + dd. & y. & z. \\ 1zz - 1z + 1. & 5z + 1. & \frac{5}{3}. & \frac{21}{16}. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \textit{Quarrez.} \\ \{1zz - 1z + 1 \propto \frac{361}{256}.\ 5z + 1 \propto \frac{121}{16}. \end{array}$$

Autre exemple.

$$\left\{\begin{array}{ll} azz - bz + dd. & cz + dd. \\ 1zz - 6144z + 1048576. & 16384z + 1048576. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} y. & z. \\ \frac{1048633}{22538}. & \frac{39424}{225}. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

83. ET si la double égalité est $azz - bz + dd$ & $dd - cz$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4add}$. Et ce seroit le contraire, si a surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{azz - bz + dd \propto yyzz - 2dyz + dd. \quad \{dd - cz \propto xxzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{bb - 2bc + cc + 4add}{4bd - 4cd}.\ z \propto \frac{2dy - b}{yy - a}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} azz - bz + dd. & dd - cz. & y. & z. \\ 3zz - 5z + 4. & 4 - 1z. & 2. & 3. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \textit{Quarrez.} \\ \{3zz - 5z + 4 \propto 16.\ 4 - 1z \propto 1. \end{array}$$

CINQUIEME CAS.

84. ET si la double égalité est $dd + bz - azz$ & $cz + dd$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc - 4add}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{dd + bz - azz \propto yyzz + 2dyz + dd. \quad \{cz + dd \propto xxzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{bb - 2bc + cc - 4add}{4bd - 4cd}.\ z \propto \frac{b - 2dy}{yy + a}.$

Exemple.

Quarrez.

$$\left\{\begin{array}{llll} dd + bz - azz. & dd + cz. & y. & z. \\ 1 + 5z - 1zz. & 1 + 1z. & \frac{3}{4}. & \frac{56}{25}. \end{array}\right. \quad \left\{ 1 + 5z - 1zz \propto \frac{4489}{625}. \quad 1 + 1z \propto \frac{81}{25}. \right.$$

SIXIEME CAS.

85. ET si la double égalité est $dd + bz - azz$ & $dd - cz$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc - 4add}$.

1ere *supposition.* 2e *supposition.*

$$\{ dd + bz - azz \propto yyzz + 2dyz + dd. \quad \{ dd - cz \propto xxzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb + 2bc + cc - 4add}{4bd + 4cd}. \quad z \propto \frac{b - 2dy}{yy + a}.$

Exemple.

Quarrez.

$$\left\{\begin{array}{llll} dd + bz - azz. & dd - cz. & y. & z. \\ 1 + 5z - 1zz. & 1 - 1z. & \frac{4}{3}. & \frac{21}{25}. \end{array}\right. \quad \left\{ 1 + 5z - 1zz \propto \frac{2809}{625}. \quad 1 - 1z \propto \frac{4}{25}. \right.$$

SEPTIEME CAS.

86. ET si la double égalité est $dd - bz - azz$ & $cz + dd$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc - 4add}$.

1ere *supposition.* 2e *supposition.*

$$\{ dd - bz - azz \propto yyzz - 2dyz + dd. \quad \{ cz + dd \propto xzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb + 2bc + cc - 4add}{4bd + 4cd}. \quad z \propto \frac{2dy - b}{yy + a}.$

Exemple.

Quarrez.

$$\left\{\begin{array}{llll} dd - bz - azz. & cz + dd. & y. & z. \\ 1 - 1z - 1zz. & 5z + 1. & \frac{4}{3}. & \frac{3}{5}. \end{array}\right. \quad \left\{ 1 - 1z - 1zz \propto \frac{1}{25}. \quad 5z + 1 \propto 4. \right.$$

HUITIEME CAS.

87. ET si la double égalité est $dd - bz - azz$ & $dd - cz$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc - 4add}$, & que le quarré $bb - 2bc + cc$ surpassera $4add$.

1ere *supposition.* 2e *supposition.*

$$\{ dd - bz - azz \propto yyzz - 2dyz + dd. \quad \{ dd - cz \propto xxzz - 2dxz + dd.$$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{bb - 2bc + cc - 4add}{4bd - 4cd}. \quad z \propto \frac{2dy - b}{yy + a}.$

Exemple.

$$\begin{cases} dd - bz - azz. \quad dd - cz. \quad y. \quad z. \\ 4 - 1z - 1zz. \quad 4 - 3z. \quad \frac{3}{4}. \quad \frac{32}{25}. \end{cases} \quad \text{Quarrez.} \left\{ 4 - 1z - 1zz \propto \frac{676}{625}. \quad 4 - 3z \propto \frac{4}{25}. \right.$$

COROLLAIRE ET QUESTION XIV.

88. SI on propoſe à réſoudre une double égalité $azz + bz + dd$ & $cz + ee$, où les deux parties entiérement connuës ſont deux divers quarrez dd & ee. Ayant pris leurs expoſans ff & gg, & multiplié la premiére grandeur $azz + bz + dd$ par le ſecond expoſant gg, & la ſeconde grandeur $cz + ee$ par le premier expoſant ff; les deux produits auront un même quarré pour les parties entiérement connuës. Et la réſolution ſera rapportée à celle de la queſtion précédente. Et les ſept cas qui reſtent y ſeront rapportez de la même ſorte. Et ſi on le juge à propos, on pourra multiplier ſimplement $azz + bz + dd$ par le quarré ee, & $cz + ee$ par le quarré dd.

XV QUESTION.

PREMIER CAS.

89. SI l'égalité doublée eſt $aazz + bz + d$ & $aazz + cz + e$. Ayant nommé $az - y$ le côté du premier, & $az - x$ le côté du ſecond; la premiére égalité ſera $aazz - 2azy + yy \propto aazz + bz + d$. Ou $2azy + bz \propto yy - d$. Et $z \propto \frac{yy - d}{2ay + b}$. Et la ſeconde ſera $aazz - 2axz + xx \propto aazz + cz + e$. Ou $2axz + cz \propto xx - e$. Et $z \propto \frac{xx - e}{2ax + c} \propto \frac{yy - d}{2ay + b}$. Et multipliant de part & d'autre par $2ax + c$, & par $2ay + b$; on aura l'égalité $2ayxx + bxx - 2aey - be \propto 2axyy - 2adx + cyy - cd$. Et on en tirera une valeur $x \propto \frac{ayy - ad}{2ay + b} + \frac{1}{2ay + b}\sqrt{aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 + bcyy + 4aaeyy + 4abey - 2acdy + bbe - bcd}$. Et afin que la grandeur renfermée ſous le ſigne puiſſe être un quarré parfait, on nommera ſon côté $ayy - ad + cy + \frac{bc - cc}{2a} + 2ae$, qui doit faire effacer toutes les parties, où y a pluſieurs dimenſions. Et le quarré ſera $aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 + bcyy + 4aaeyy + 4abey - 2acdy + bbe - bcd \propto aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 - 2acdy + ccyy + bcyy - ccyy + 4aaeyy + \frac{bccy - c^3y}{a} + 4acey - bcd + ccd - 4aade + 2bce - 2cce + 4aaee + \frac{bbcc - 2bc^3 + c^4}{4aa}$. Et ordonnant cette égalité, on aura $\frac{bccy - c^3y}{a} + 4acey - 4abey \propto 4aade + bbe - 2bce + 2cce - 4aaee$

$-ccd - \frac{bbcc + 2bc^3 - c^4}{4aa}$. Et multipliant chaque membre par $4aa$, pour ôter les fractions; on aura l'égalité $4abccy - 4ac^3y + 16a^2cey - 16a^3bey \propto 16a^4de + 4aabbe - 8aabce + 8aacce - 16a^4ee - 4aaccd - bbcc + 2bc^3 - c^4$. Et chaque membre étant divisé par $4aae - cc$, on trouvera enfin l'égalité $4acy - 4aby \propto 4aad - 4aae + bb - 2bc + cc$. &c. Et la résolution sera positive, lorsque c surpassera chacune des grandeurs b & $b + 2a\sqrt{e - d}$; ou lorsque b surpassera chacune des deux c & $\sqrt{cc + 4aad - 4aae}$: parceque le dénominateur $2ay + b$ sera réel. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1^{ere} *supposition.*	2^e *supposition.*
$\{ aazz + bz + d \propto aazz - 2ayz + yy.$	$\{ aazz + cz + e \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{4aad - 4aae + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}. \quad z \propto \frac{yy - d}{2ay + b}.$

Exemples.

		y.	z.	*Quarrez.*	
$aazz + bz + d.$	$aazz + cz + e.$				
$1zz + 1z + 1.$	$1zz + 7z + 2.$	$\frac{4}{3}.$	$\frac{7}{33}.$	$1zz + 1z + 1 \propto \frac{1369}{1089}.$	$1zz + 7z + 2 \propto \frac{3844}{1089}.$
$4zz + 5z + 3.$	$4zz + 1z + 1.$	$-\frac{3}{2}.$	$\frac{3}{4}.$	$4zz + 5z + 3 \propto 9.$	$4zz + 1z + 1 \propto 4.$

SECOND CAS.

90. ET si la double égalité est $aazz + bz + d$ & $aazz + cz - e$; la résolution sera positive, lorsque c surpassera b; ou lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1^{ere} *supposition.*	2^e *supposition.*
$\{ aazz + bz + d \propto aazz - 2ayz + yy.$	$\{ aazz + cz - e \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{ y \propto \frac{4aad + 4aae + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}. \quad z \propto \frac{yy - d}{2ay + b}.$

Exemple.

		y.	z.	*Quarrez.*	
$aazz + bz + d.$	$aazz + cz - e.$				
$1zz + 1z + 3.$	$1zz + 5z - 1.$	$2.$	$\frac{1}{5}.$	$1zz + 1z + 3 \propto \frac{81}{25}$	$1zz + 5z - 1 \propto \frac{1}{25}.$

TROISIEME CAS.

91. ET si la double égalité est $aazz + bz + d$ & $aazz - cz + e$; la résolution sera positive, lorsque $2a\sqrt{e - d}$ surpassera $b + c$; ou lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aad - 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aazz + bz + d \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz - cz + e \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aae - 4aad - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}.$ $z \propto \frac{yy - d}{2ay + b}.$

Exemples.

$aazz+bz+d.$	$aazz-cz+e.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*	
$1zz+1z+1.$	$1zz-1z+5.$	$\frac{3}{2}.$	$\frac{5}{16}.$	$\{1zz+1z+1 \propto \frac{361}{256}.$	$1zz-1z+5 \propto \frac{1225}{256}.$
$1zz+2z+3.$	$1zz-2z+2.$	$-\frac{5}{4}.$	$\frac{23}{8}.$	$\{1zz+2z+3 \propto \frac{1089}{64}.$	$1zz-2z+2 \propto \frac{289}{64}.$

QUATRIEME CAS.

92. ET si la double égalité est $aazz + bz + d$ & $aazz - cz - e$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aazz + bz + d \propto aazz + 2ayz + yy.$ $\{aazz - cz - e \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aad + 4aae + bb + 2bc + cc}{4ab + 4ac}.$ $z \propto \frac{yy - d}{b - 2ay}.$

Exemples.

$aazz+bz+d.$	$aazz-cz-e.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*	
$4zz+7z+1.$	$4zz-1z-1.$	$\frac{3}{2}.$	$\frac{5}{4}.$	$\{4zz+7z+1 \propto 16.$	$4zz-1z-1 \propto 4.$
$4zz+1z+3.$	$4zz-7z-1.$	$2.$	$-\frac{1}{7}.$	$\{4zz+1z+3 \propto \frac{144}{49}.$	$4zz-7z-1 \propto \frac{4}{49}.$

CINQUIEME CAS.

93. ET si la double égalité est $aazz + bz - d$ & $aazz + cz - e$; la résolution sera positive, lorsque c surpassera chacune des grandeurs b & $b + 2a\sqrt{d - e}$; ou lorsque b vaudra plus que c, & plus encore que $\sqrt{cc + 4aae - 4aad}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aazz + bz - d \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{aazz + cz - e \propto aazz - 2axz + xx.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aae - 4aad + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}.$ $z \propto \frac{yy + d}{2ay + b}.$

Exemple.

$aazz+bz-d.$	$aazz+cz-e.$	$y.$	$z.$	*Quarrez.*	
$1zz+2z-3.$	$1zz+6z-1.$	$\frac{1}{2}.$	$\frac{13}{12}.$	$\{1zz+2z-3 \propto \frac{49}{144}.$	$1zz+6z-1 \propto \frac{961}{144}.$

SIXIEME CAS.

94. ET ſi la double égalité eſt $aazz + bz - d$ & $aazz - cz + e$; la réſolution ſera poſitive, lorſque c vaudra moins que $\sqrt{bb + 4aad + 4aae}$.

1ere *ſuppoſition.* 2e *ſuppoſition.*

$\{ aazz + bz - d \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{ aazz - cz + e \propto aazz - 2axz + xx.$

Réſolution générale. $\{ y \propto \frac{4aad + 4aae - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}.\ z \propto \frac{yy + d}{2ay + b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz + bz - d.\ \ aazz - cz + e.\ \ y.\ \ z. & \textit{Quarrez.} \\ 1zz + 2z - 1.\ \ 1zz - 2z + 7.\ \ 1.\ \ \frac{1}{2}. & \{ 1zz + 2z - 1 \propto \frac{1}{4}.\ \ 1zz - 2z + 7 \propto \frac{25}{4}. \end{cases}$$

SEPTIEME CAS.

95. ET ſi la double égalité eſt $aazz + bz - d$ & $aazz - cz - e$; la réſolution ſera poſitive, lorſque b ſurpaſſera $\sqrt{cc + 4aae - 4aad}$.

1ere *ſuppoſition.* 2e *ſuppoſition.*

$\{ aazz + bz - d \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{ aazz - cz - e \propto aazz - 2axz + xx.$

Réſolution générale. $\{ y \propto \frac{4aad - 4aae - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}.\ z \propto \frac{yy + d}{2ay + b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz + bz - d.\ \ aazz - cz - e.\ \ y.\ \ z. & \textit{Quarrez.} \\ 1zz + 1z - 7.\ \ 1zz - 1z - 3.\ \ \frac{3}{2}.\ \ \frac{37}{16}. & \{ 1zz + 1z - 7 \propto \frac{169}{256}.\ \ 1zz - 1z - 3 \propto \frac{9}{256}. \end{cases}$$

HUITIEME CAS.

96. ET ſi la double égalité eſt $aazz - bz + d$ & $aazz - cz + e$; la réſolution ſera poſitive, lorſque c ſurpaſſera $\sqrt{bb + 4aae - 4aad}$. Et ce ſeroit le contraire, ſi d ſurpaſſoit le quarré yy.

1ere *ſuppoſition.* 2e *ſuppoſition.*

$\{ aazz - bz + d \propto aazz - 2ayz + yy.$ $\{ aazz - cz + e \propto aazz - 2axz + xx.$

Réſolution générale. $\{ y \propto \frac{4aad - 4aae + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}.\ z \propto \frac{yy - d}{2ay - b}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aazz - bz + d.\ \ aazz - cz + e.\ \ y.\ \ z. & \textit{Quarrez.} \\ 1zz - 3z + 5.\ \ 1zz - 1z + 1.\ \ \frac{5}{2}.\ \ \frac{5}{8}. & \{ 1zz - 3z + 5 \propto \frac{225}{64}.\ \ 1zz - 1z + 1 \propto \frac{49}{64}. \end{cases}$$

NEUVIEME CAS.

97. Et si la double égalité est $aazz - bz + d$ & $aazz - cz - e$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1[ere] *supposition.* 2[e] *supposition.*

$aazz - bz + d \propto aazz - 2ayz + yy$. $aazz - cz - e \propto aazz - 2axz + xx$.

Résolution générale. $y \propto \frac{4aad + 4aae + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}$. $z \propto \frac{yy - d}{2ay - b}$.

Exemple.

$aazz - bz + d$. $aazz - cz - e$. y. z. *Quarrez.*

$1zz - 3z + 1$. $1zz - 1z - 3$. $\frac{5}{2}$. $\frac{21}{8}$. $1zz - 3z + 1 \propto \frac{1}{64}$. $1zz - 1z - 3 \propto \frac{81}{64}$.

DIXIEME CAS.

98. Et enfin si la double égalité est $aazz - bz - d$ & $aazz - cz - e$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4aae - 4aad}$.

1[ere] *supposition.* 2[e] *supposition.*

$aazz - bz - d \propto aazz - 2ayz + yy$. $aazz - cz - e \propto aazz - 2axz + xx$.

Résolution générale. $y \propto \frac{4aae - 4aad + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}$. $z \propto \frac{yy + d}{2ay - b}$.

Exemple.

$aazz - bz - d$. $aazz - cz - e$. y. z. *Quarrez.*

$1zz - 5z - 1$. $1zz - 3z - 9$. $\frac{9}{2}$. $\frac{85}{16}$. $1zz - 5z - 1 \propto \frac{169}{256}$. $1zz - 3z - 9 \propto \frac{841}{256}$.

I COROLLAIRE ET QUESTION XVI.

99. Si on propose à résoudre une double égalité $ffzz + bz + d$ & $ggzz + cz + e$; on prendra les exposans hh & kk des quarrez connus ff & gg; & ensuitte on multipliera le premier quarré $ffzz + bz + d$ par le second exposant kk, & l'autre quarré $ggzz + cz + e$ par le premier exposant ff. Et les produits $ffkkzz + bkkz + dkk$ & $gghhzz + chhz + ehh$ seront deux nouveaux quarrez, où les parties $ffkkzz$ & $gghhzz$ seront égales, ou ne seront qu'une même grandeur. De sorte que la résolution de cette double égalité sera facilement tirée du premier cas de la question précédente. Et les neuf cas qui restent, pourront être rapportez de la même sorte aux cas qui leur répondent dans la même question.

II COROLLAIRE ET QUESTION XVII.

PREMIER CAS.

100. Pour résoudre la double égalité $aa + bz + dzz$ & $aa + cz + ezz$, où la partie entiérement connuë de part & d'autre est un même quarré aa. On nommera $yz - a$ le côté du premier quarré, & $xz - a$ le côté du second. Et alors la premiére égalité sera $aa + bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz$. Ou $b + 2ay \propto yyz - dz$. Et $z \propto \frac{b + 2ay}{yy - d}$. Et la seconde égalité sera $aa + cz + ezz \propto xxzz - 2axz + aa$. Ou $2ax + c \propto xxz - ez$. Et $z \propto \frac{2ax + c}{xx - e} \propto \frac{b + 2ay}{yy - d}$. Et multipliant de part & d'autre par $xx - e$, & les produits égaux par $yy - d$, on aura l'égalité nouvelle $2axyy - 2adx + cyy - cd \propto 2ayxx + bxx - 2aey - be$, que nous avons déja trouvée, & qu'on a résoluë au premier cas de la question quinziéme. Et la résolution sera positive, lorsque b surpassera c, & qu'elle surpassera encore $\sqrt{cc + 4aad - 4aae}$; ou lorsque b sera moindre que c, & moindre encore que $c - 2a\sqrt{e} - d$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aa + bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz.$ $\{aa + cz + ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aad - 4aae + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}$. $z \propto \frac{2ay + b}{yy - d}$.

Exemples.

$aa + bz + dzz.$ $aa + cz + ezz.$ $y.$ $z.$ *Quarrez.*

$1 + 1z + 1zz.$ $1 + 7z + 2zz.$ $\frac{4}{3}.$ $\frac{33}{7}.$ $\{1 + 1z + 1zz \propto \frac{1369}{49}.$ $1 + 7z + 2zz \propto \frac{3844}{49}.$

$4 + 5z + 3zz.$ $4 + 1z + 1zz.$ $-\frac{3}{2}.$ $\frac{4}{3}.$ $\{4 + 5z + 3zz \propto 16.$ $4 + 1z + 1zz \propto \frac{64}{9}.$

SECOND CAS.

101. Et si la double égalité est $aa + bz + dzz$ & $aa + cz - ezz$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que c, ou qu'elle surpassera $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{aa + bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz.$ $\{aa + cz - ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$

Résolution générale. $\{y \propto \frac{4aad + 4aae + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}$. $z \propto \frac{2ay + b}{yy - d}$.

Exemple.

$$\begin{cases} aa + bz + dzz. & aa + cz - ezz. \quad y. \quad z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1 + 1z + 3zz. & 1 + 5z - 1zz. \quad 2. \quad 5. \quad \{1 + 1z + 3zz \propto 81. \quad 1 + 5z - 1zz \propto 1. \end{cases}$$

TROISIEME CAS.

102. ET si la double égalité est $aa + bz + dzz$ & $aa - cz + ezz$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aad - 4aae}$, ou sera moindre que $-c + 2a\sqrt{e - d}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1[ere] *supposition.* 2[e] *supposition.*

$$\{aa + bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \qquad \{aa - cz + ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$$

Résolution générale. $\{y \propto \dfrac{4aae - 4aad - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}. \quad z \propto \dfrac{2ay + b}{yy - b}.$

Exemples.

$$\begin{cases} aa + bz + dzz. & aa - cz + ezz. & y. \quad z. & \qquad \textit{Quarrez.} \\ 1 + 1z + 1zz. & 1 - 1z + 5zz. & \frac{3}{2}. \ \frac{16}{5}. & \{1 + 1z + 1zz \propto \frac{361}{25}. \quad 1 - 1z + 5zz \propto \frac{1225}{25}. \\ 1 + 2z + 3zz. & 1 - 2z + 2zz. & \frac{-5}{4}. \ \frac{8}{23}. & \{1 + 2z + 3zz \propto \frac{1089}{529}. \quad 1 - 2z + 2zz \propto \frac{289}{529}. \end{cases}$$

QVATRIEME CAS.

103. ET si la double égalité est $aa + bz + dzz$ & $aa - cz - ezz$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1[ere] *supposition.* 2[e] *supposition.*

$$\{aa + bz + dzz \propto aa + 2ayz + yyzz. \qquad \{aa - cz - dzz \propto aa - 2axz + xxzz.$$

Résolution générale. $\{y \propto \dfrac{4aad + 4aae + bb + 2bc + cc}{4ab + 4ac}. \quad z \propto \dfrac{b - 2ay}{yy - d}.$

Exemple.

$$\begin{cases} aa + bz + dzz. & aa - cz - dzz. & y. \quad z. & \qquad \textit{Quarrez.} \\ 4 + 7z + 1zz. & 4 - 1z - 1zz. & \frac{3}{2}. \ \frac{4}{5}. & \{4 + 7z + 1zz \propto \frac{256}{25}. \quad 4 - 1z - 1zz \propto \frac{64}{25}. \end{cases}$$

CINQVIEME CAS.

104. ET si la double égalité est $aa + bz - dzz$ & $aa + cz - ezz$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que c, & moindre encore que $c - 2a\sqrt{d - e}$; ou lorsque b vaudra plus que c, & plus encore que $\sqrt{cc + 4aad - 4aae}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aa + bz - dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \quad \{ aa + cz - ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aae - 4aad + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}. \quad z \propto \dfrac{2ay + b}{yy + d}.$

Exemple.

$\begin{cases} aa + bz - dzz. \ aa + cz - ezz. \ y. \ z. \\ 1 + 2z - 3zz. \ 1 + 6z - 1zz. \ \frac{1}{2}. \ \frac{12}{13}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\begin{cases} 1 + 2z - 3zz \propto \frac{49}{169}. \ 1 + 6z - 1zz \propto \frac{961}{169}. \end{cases}$

SIXIEME CAS.

105. ET si la double égalité est $aa + bz - dzz$ & $aa - cz + ezz$; la résolution sera positive, lorsque c vaudra moins que $\sqrt{bb + 4aad + 4aae}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aa + bz - dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \quad \{ aa - cz + ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aad + 4aae - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}. \quad z \propto \dfrac{2ay + b}{yy + d}.$

Exemple.

$\begin{cases} aa + bz - dzz. \ aa - cz + ezz. \ y. \ z. \\ 1 + 2z - 1zz. \ 1 - 2z + 7zz. \ 1. \ 2. \end{cases}$ $\{ 1 + 2z - 1zz \propto 1. \ 1 - 2z + 7zz \propto 25.$ *Quarrez.*

SEPTIEME CAS.

106. ET si la double égalité est $aa + bz - dzz$ & $aa - cz - ezz$; la résolution sera positive, lorsque b surpassera $\sqrt{cc + 4aae - 4aad}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$\{ aa + bz - dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \quad \{ aa - cz - ezz \propto 2axz + xxzz.$

Résolution générale. $\{ y \propto \dfrac{4aad - 4aae - bb - 2bc - cc}{4ab + 4ac}. \quad z \propto \dfrac{2ay + b}{yy + d}.$

Exemple.

$\begin{cases} aa + bz - dzz. \ aa - cz - ezz. \ y. \ z. \\ 1 + 1z - 7zz. \ 1 - 1z - 3zz. \ \frac{3}{2}. \ \frac{16}{37}. \end{cases}$ *Quarrez.* $\begin{cases} 1 + 1z - 7z \propto \frac{169}{1369}. \ 1 - 1z - 3zz \propto \frac{9}{1369}. \end{cases}$

HVITIEME CAS.

107. ET si la double égalité est $aa - bz + dzz$ & $aa - cz + ezz$; la résolution sera positive; lorsque c surpassera $\sqrt{bb + 4aae - 4aad}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{\, aa - bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \qquad \{\, aa - cz + ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$$

Résolution générale. $\{\, y \propto \dfrac{4aad - 4aae + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}. \; z \propto \dfrac{2ay - b}{yy - d}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} aa - bz + dzz.\; aa - cz + ezz.\; y.\; z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1 - 3z + 5zz.\; 1 - 1z + 1zz.\; \frac{5}{2}.\; \frac{8}{5}.\; \{1 - 3z + 1zz \propto \frac{225}{25}.\; 1 - 1z + 1zz \propto \frac{49}{25}. \end{array}\right.$$

NEUVIEME CAS.

108. Et si la double égalité est $aa - bz + dzz$ & $aa - cz - ezz$; la résolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4aad + 4aae}$. Et ce seroit le contraire, si d surpassoit le quarré yy.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{\, aa - bz + dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \qquad \{\, aa - czz - ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$$

Résolution générale. $\{\, y \propto \dfrac{4aad + 4aae + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}. \; z \propto \dfrac{2ay - b}{yy - d}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} aa - bz + dzz.\; aa - cz - ezz.\; y.\; z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1 - 3z + 1zz.\; 1 - 1z - 3zz.\; \frac{5}{2}.\; \frac{8}{21}.\; \{1 - 3z + 1zz \propto \frac{1}{441}.\; 1 - 1z - 3zz \propto \frac{81}{441}. \end{array}\right.$$

DIXIEME CAS.

109. Et enfin si la double égalité est $aa - bz - dzz$ & $aa - cz - ezz$; la resolution sera positive, lorsque b sera moindre que $\sqrt{cc + 4aae - 4aad}$.

1ere supposition. *2e supposition.*

$$\{\, aa - bz - dzz \propto aa - 2ayz + yyzz. \qquad \{\, aa - cz - ezz \propto aa - 2axz + xxzz.$$

Résolution générale. $\{\, y \propto \dfrac{4aae - 4aad + bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac}. \; z \propto \dfrac{2ay - b}{yy + d}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} aa - bz - dzz.\; aa - cz - ezz.\; y.\; z. \qquad\qquad \textit{Quarrez.} \\ 1 - 5z - 1zz.\; 1 - 3z - 9zz.\; \frac{9}{2}.\; \frac{16}{85}.\; \{1 - 5 - 1zz \propto \frac{169}{7225}.\; 1 - 3z - 9zz \propto \frac{841}{7225}. \end{array}\right.$$

III COROLLAIRE ET QUESTION XVIII.

110. Pour résoudre une double égalité $ff + bz + dzz$ & $gg + cz + ezz$, où les parties entiérement connuës sont deux divers quarrez ff & gg ; on prendra les [a] exposans hh & kk de ces quarrez. Et ensuitte on multipliera $ff + bz + dzz$ par kk, & $gg + cz + ezz$ par hh. Et on aura

a. 1ere partie. 16. 9.

une [b] double égalité $ffkk + bkkz + dkkzz$ & $gghh + cggz + eggzz$, dont on rapportera la réſolution au premier cas de la queſtion précédente. Et les neuf cas qui reſtent, pourront être rapportez de la même ſorte aux cas qui leur répondent dans la même queſtion. b. 1ere partie. 48. 8.

IV COROLLAIRE.

111. QUoique pluſieurs réſolutions expoſées dans ce Livre ne ſoient pas infinies, elles le ſont néanmoins ordinairement dans l'application qui s'en fait aux queſtions indéterminées, dont elles fourniſſent les réſolutions. Comme on peut l'obſerver tres-facilement dans la queſtion ſuivante.

EXEMPLE ET QUESTION XIX.

PREMIER CAS.

112. *POur trouver deux grandeurs, telles que leur plan recevant l'une ou l'autre, ou la ſomme des deux, les ſommes ſoient chacune un quarré.*

Ayant nommé z la premiére des grandeurs, & la ſeconde y; les trois ſommes $zy + z$, $zy + y$, $zy + z + y$, ſont des quarrez parfaits par la ſuppoſition. Et nommant yv le côté du quarré $zy + y$; l'égalité $zy + y \propto yyvv$ fournira une valeur $z \propto yvv - 1$. Et mettant pour z ſa valeur $yvv - 1$ dans chacune des ſommes $zy + z$ & $zy + z + y$, ces mêmes ſommes ſeront $yyvv - 1y + yvv - 1$ & $yyvv + yvv - 1$. Et comme chacune doit être un quarré parfait; elles formeront une double égalité, où un même quarré $yyvv$ ſera de part & d'autre. Et la réſolution ſera rapportée à celle de la queſtion quinziéme, ſelon le cas qui luy conviendra. Et comme v peut être arbitraire, la réſolution ſera infinie.

Suppoſitions.

$$\{ zy + y \propto yyvv. \quad \{ zy + z \propto tt. \quad \{ zy + z + y \propto tt + 2ts + ss.$$

Réſolution infinie. $\{ v$ *arbitraire.* $y \propto \frac{16vv + 1}{16v^4 - 8vv}$. $z \propto \frac{9}{16vv - 8}$.

Exemples.

$$\begin{cases} v \propto 1. \; y \propto \frac{17}{8}. \; z \propto \frac{9}{8}. \; \{ yz + y \propto \frac{289}{64}. \quad yz + z \propto \frac{225}{64}. \quad yz + z + y \propto \frac{361}{64}. \\ v \propto 2. \; y \propto \frac{65}{224}. \; z \propto \frac{9}{56}. \; \{ yz + y \propto \frac{4225}{12544}. \quad yz + z \propto \frac{2601}{12544}. \quad yz + z + y \propto \frac{6241}{12544}. \end{cases}$$

SECOND CAS.

113. *ET pour trouver deux grandeurs, telles que chacune ou la ſomme des deux étant ôtée du plan des ces mêmes grandeurs, les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé, comme auparavant, la premiére z, & la ſeconde y, & vy le côté du quarré $zy - y$; on aura déja l'égalité $zy - y \propto yyvv$. Et

$z \infty yvv + 1$. Et pour remplir les autres conditions, les ſommes $zy - z$ & $zy - z - y$, ou leurs valeurs $yyvv - vvy + 1y - 1$ & $yyvv - vvy - 1$ doivent être des quarrez. Ce qui fournit encore une double égalité, dont la réſolution dépend ou peut être tirée, comme la précédente, du cas qui luy eſt propre dans la queſtion quinziéme. Et v doit être plus petite que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ſi on veut avoir une réſolution poſitive.

Suppoſitions.

$\{ zy - y \infty yyvv.$ $\{ zy - z \infty tt.$ $\{ zy - z - y \infty tt - 2tſ + ſſ.$

Réſolution générale. $\{ v$ *arbitraire.* $y \infty \frac{16vv + 1}{8vv - 16v^4}$. $z \infty \frac{9}{8 - 16vv}$.

Exemple.

$$\begin{cases} v \infty \frac{1}{2}.\ y \infty 5.\ z \infty \frac{9}{4}.\ \{ zy - y \infty \frac{25}{4}.\ zy - z \infty 9.\ zy - z - y \infty 4. \\ v \infty \frac{1}{4}.\ y \infty \frac{32}{7}.\ z \infty \frac{9}{4}.\ \{ zy - y \infty \frac{64}{49}.\ zy - z \infty \frac{225}{49}.\ zy - z - y \infty \frac{1}{49}. \end{cases}$$

V COROLLAIRE ET QUESTION XX.

114. *Pour rendre infinies les réſolutions, qu'on n'a donné dans ce Livre que d'une maniére générale & déterminée.*

On ſuppoſera de nouveau l'inconnuë z égale à ſa valeur découverte g plus ou moins une autre inconnuë y. Et mettant pour z ſa nouvelle valeur $y + g$ ou $g - y$ dans la double égalité qu'on avoit d'abord propoſée, on trouvera une double égalité où les parties entiérement connuës de part & d'autre ſeront des quarrez. De ſorte qu'on pourra tirer ſa réſolution des régles précédentes, & chercher enſuitte une valeur de z, ajoûtant g à la valeur découverte de la grandeur y, ou ôtant y de g, ſelon la ſuppoſition que l'on aura faite. Les éxemples éclairciront & fixeront ces régles, & leur principale partie ſera fermement établie par la demonſtration ſuivante.

Demonstration.

Si la double égalité eſt $aa + bz + dzz$ & $aa + cz + ezz$, & que g ſoit la valeur de z, que les régles auront découverte ; il eſt viſible que les deux grandeurs $aa + bg + dgg$ & $aa + cg + egg$ ſont des quarrez parfaits. Mais ſuppoſant $y + g$ pour z, & mettant par tout au lieu de z cette valeur $y + g$ dans la double égalité $aa + bz + dzz$ & $aa + cz + ezz$, ces deux quarrez ſeront $aa + bg + ggd + by + 2dgy + dyy$ & $aa + cg + egg + cy + 2egy + eyy$. Et les parties entiérement connuës ſont d'une part le quarré parfait $aa + bg + ggd$, & de l'autre le quarré parfait $aa + cg + egg$. Et ſi ces deux quarrez entiérement connus ſont différens entr'eux ; la double égalité ſera rapportée à la réſolution de la queſtion dix-huitiéme. Et toutes les diverſes eſpêces des doubles égalitez, & leurs différens cas, ſe pourront démontrer généralement de la même ſorte.

PREMIER EXEMPLE.

Les régles du problême, que je viens d'exposer & de démontrer, ne sont qu'une application en particulier des régles générales inventées par Monsieur Descartes pour la transformation des égalitez, quoique le R. Pére De Billy Jésuitte veüille attribuer la gloire à Monsieur de Fermat d'en être absolument l'Auteur. Le premier des éxemples que propose ce sçavant Pére, est de quarrer chacune des grandeurs $4z + 1$ & $1zz - 2z + 1$. Mais cet éxemple est peu propre en particulier pour la méthode dont il s'agit ici, puisque la seconde grandeur $1zz - 2z + 1$ est déja un quarré parfait, dont $z - 1$ ou $1 - 1z$ peut être le côté; & qu'il suffit pour résoudre infiniment la question de prendre $\frac{yy - 1}{4}$ pour z, en supposant y arbitraire ou indéterminée, pourvû néanmoins qu'elle surpasse l'unité, afin de régler plus facilement sa résolution sur le modéle qu'on expose ici.

Double égalité. *Résolution infinie.*

$$\{4z + 1 \propto yy. \quad \{1zz - 2z + 1 \propto xx. \qquad \{z \propto \frac{yy - 1}{4}.$$

$$\textit{Exemples.}\begin{cases} y \propto 2.\ z \propto \frac{3}{4}.\ \begin{cases}4z + 1 \propto 4.\ 1zz - 2z + 1 \propto \frac{1}{16}.\end{cases} \\ y \propto 3.\ z \propto 2.\ \{4z + 1 \propto 9.\ 1zz - 2z + 1 \propto 1.\end{cases}$$

APPLICATION DES REGLES.

POUR TROUVER SUCCESSIVEMENT UNE INFINITE' DE RESOLUTIONS.

Premiére résolution.

Je m'arrêterai pourtant au choix du même éxemple. Et j'en rapporterai la résolution au modéle général du cinquiéme cas de la question douziéme, sans considérer $1zz - 2z + 1$ comme un quarré parfait. On trouvera ici la suitte des résolutions différente de celle du R. Pére De Billy, où il s'est glissé quelque erreur par un changement de signes.

Double égalité. *Resolution générale.*

$$\begin{cases} cz + d. \quad aazz - bz + d. \\ 4z + 1. \quad 1zz - 2z + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} z \propto \dfrac{bb + 2bc + cc - 4aad}{4aac} \propto 2. \\ 4z + 1 \propto 9.\ 1zz - 2z + 1 \propto 1. \end{cases}$$

Seconde résolution.

Ayant donc une valeur 2 de z, je suppose de nouveau $z \propto y + 2$. Et par conséquent $4z + 1 \propto 4y + 9$, & $1zz - 2z + 1 \propto yy + 2y + 1$. De sorte qu'il faut résoudre de nouveau la double égalité $4y + 9$ & $yy + 2y + 1$. Et afin qu'il y ait de part & d'autre un même quarré 9, je multiplie $yy + 2y + 1$ par 9. Et le produit est $9yy + 18y + 9$. De sorte que la double égalité est $4y + 9$ & $9yy + 18y + 9$. Et sa résolution étant réglée sur le modéle du premier cas de la question douziéme, on trouvera $y \propto -\frac{8}{9}$. Et $z \propto y + 2 \propto \frac{10}{9}$.

Double égalité. *Résolution générale.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} cy + d. & aayy + by + d. \\ 4y + 9. & 9yy + 18y + 9. \end{array} \right. \begin{array}{l} \{\, y \propto \frac{bb - 2bc + cc - 4aad}{4aac} \propto -\frac{8}{9}. \\ \{\, 4y + 9 \propto \frac{49}{9}.\ 9yy + 18y + 9 \propto \frac{1}{9}. \end{array}$$

$$\{\, z \propto \frac{10}{9}.\ \left\{ \textit{Double égalité résoluë}.\ 4z + 1 \propto \frac{49}{9}.\ 1zz - 2z + 1 \propto \frac{1}{81}. \right.$$

Troisiéme résolution.

Supposant donc encore $z \propto y + \frac{10}{9}$; les grandeurs $4z + 1$ & $1zz - 2z + 1$ seront $4y + \frac{49}{9}$ & $yy + \frac{2}{9}y + \frac{1}{81}$. Et afin que les grandeurs connuës soient de part & d'autre un même quarré, je multiplie $4y + \frac{49}{9}$ par 9, & $yy + \frac{2y}{9} + \frac{1}{81}$ par 81 fois 49. Et les produits $36y + 49$ & $3969yy + 882y + 49$ forment une double égalité, dont la résolution étant réglée sur le modéle du premier cas de la question douziéme, fournit une valeur négative $y \propto -\frac{16}{147}$. Et la valeur de $z \propto y + \frac{10}{9}$ est $\frac{442}{441}$. Et cette valeur peut servir à son tour pour en trouver une autre. Et cette autre une nouvelle. Et ainsi de suitte jusqu'à l'infini.

Double égalité. *Résolution générale.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} cy + d. & aayy + by + d. \\ 36y + 49. & 3969yy + 882y + 49. \end{array} \right. \begin{array}{l} \{\, y \propto \frac{bb - 2bc + cc - 4aad}{4aac}. \\ \{\, y \propto -\frac{16}{147}.\ \left\{ \textit{Quarrez}.\ \frac{2209}{49} \ \& \ \frac{1}{49}. \right. \end{array}$$

$$\{\, z \propto \frac{442}{441}.\ \left\{ \textit{Double égalité résoluë}.\ 4z + 1 \propto \frac{2209}{441}.\ 1zz - 2z + 1 \propto \frac{1}{194481}. \right.$$

Autre maniére d'appliquer les régles.

Et parcequ'on trouve aussi d'autres valeurs des grandeurs z & y, en se réglant sur la résolution de la question treiziéme; on peut se servir de ces mêmes valeurs pour en découvrir encore d'autres, en se réglant sur la résolution de la même question, ou sur celle de la question douziéme. Et les valeurs découvertes par les modéles de la question douziéme peuvent servir de la même sorte pour en trouver aussi de nouvelles en se servant des modéles de la question treiziéme. De sorte que ce premier éxemple peut être infiniment résolu, & même par des voies différentes.

SECOND

SECOND EXEMPLE.

Si on propoſe à réſoudre une double égalité $1 - 2z$ & $1 - 4z + 2zz$. Le quatriéme cas de la queſtion treiziéme fournira une valeur $z \propto -4$. Et ſuppoſant enſuitte $z \propto y - 4$; la double égalité $1 - 2z$ & $1 - 4z + 2zz$ ſera $9 - 2y$ & $49 - 20y + 2yy$. Et parceque les expoſans des quarrez connus 9 & 49 ſont encore 9 & 49; on multipliera $9 - 2y$ par 49, & $49 - 20y + 2yy$ par 9. Et les produits formeront une double égalité $441 - 98y$ & $441 - 180y + 18yy$. Et le quatriéme cas de la queſtion treiziéme fournira une valeur $y \propto \frac{161933436}{39150049}$. Et $z \propto y - 4$ ſera $\frac{5333240}{39150049}$. Et cette valeur de z qui réſoût la queſtion, pourra ſervir pour en trouver une autre. Et cette autre à ſon tour pour en trouver encore une nouvelle. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini.

TROISIEME EXEMPLE.

Pour réſoudre la double égalité $4 + 16z + 8zz$ & $4 + 4z + 2zz$. Si on veut égaler une grandeur à l'autre, on trouvera $z \propto -2$. Et parceque le quarré connu 4 eſt au juſte le quarré de -2; cette valeur négative -2 peut réſoûdre la queſtion. Et ainſi ſuppoſant $z \propto y - 2$; l'égalité double ſera $4 - 16y + 8yy$ & $4 - 4y + 2yy$. Et le huitiéme cas de la queſtion dix-ſeptiéme fournira une valeur $y \propto \frac{24}{7}$. Et $z \propto y - 2$ ſera $\frac{10}{7}$. De ſorte que les quarrez $4 + 16z + 8zz$ & $4 + 4z + 2zz$ ſeront $\frac{2116}{49}$ & $\frac{676}{49}$. Et la valeur $\frac{10}{7}$ de z pourra ſervir de la même ſorte pour en trouver une autre. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini. Le premier cas de la queſtion dix-ſeptiéme pouvoit fournir d'abord une valeur négative de z, qui eſt $-\frac{24}{7}$.

QUATRIEME EXEMPLE.

Pour réſoudre la double égalité $1 + 2z + 2zz$ & $1 + 6z + 2zz$. Le premier cas de la queſtion dix-ſeptiéme fournit d'abord une valeur négative -4 de l'inconnuë z. Et ſuppoſant $z \propto y - 4$; la double égalité $1 + 2z + 2zz$ & $1 + 6z + 2zz$ ſera $9 - 10y + 2yy$ & $25 - 14y + 2yy$. Et multipliant d'une part par 25, & de l'autre par 9; on aura de nouveau une double égalité $225 - 250y + 50yy$ & $225 - 126y + 18yy$. Et le huitiéme cas de la queſtion dix-ſeptiéme fournira une valeur poſitive $y \propto \frac{15540300}{3188129}$. Et $z \propto y - 4$ aura une valeur poſitive $\frac{2787784}{3188129}$. Et cette valeur pourra ſervir à en trouver une autre. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini.

METHODE DE DIOPHANTE.

115. LA méthode précédente, dont on veut uniquement attribuer l'invention à Monsieur de Fermat, est non seulement une suitte naturelle des régles générales, que Monsieur Descartes a prescrites pour transformer les égalitez. Mais il est encore aisé de reconnoître, qu'elle n'est qu'une simple application de celle qu'a suivi Diophante, pour résoûdre la seiziéme question de son sixiéme Livre, & que le sçavant Bachet son Commentateur a ensuitte imitée, en expliquant la dix-neuviéme question de ce même Livre.

PREMIER EXEMPLE ET QUESTION XXI.

PREMIER CAS.

116. SI deux grandeurs connuës a & b sont telles, qu'ayant multiplié la premiére a par un quarré déterminé dd, & retranché la seconde b du produit add, le reste $add - b$ soit un quarré parfait; pour trouver un quarré, dont le produit par a étant diminué de la grandeur b, le reste soit encore un quarré.

Ayant pris à l'imitation de Diophante, quoique d'une maniére infiniment plus générale, $z + d$ pour le côté du nouveau quarré qui doit multiplier la premiére grandeur a; ce quarré sera $zz + 2dz + dd$. Et son produit par a sera $azz + 2adz + add$. Et ôtant b de ce même produit, il faudra que le reste $azz + 2adz + add - b$ soit un quarré. Nommant donc gg le quarré parfait $add - b$; le quarré sera $azz + 2adz + gg$. C'est pourquoi si on nomme $yz - g$ son côté; l'égalité sera $azz + 2adz + gg \propto yyzz - 2gyz + gg$. Ou $2ad + 2gy \propto yyz - az$. Et $z \propto \frac{2ad + 2gy}{yy - a}$. Et l'arbitraire y surpasse $\sqrt{a}$. Et si le nouveau côté $z + d$ ou sa valeur $\frac{dyy + 2gy + ad}{yy - a}$ devoit surpasser le premier côté g, comme Diophante le veut dans sa question; on multiplieroit de part & d'autre par $yy - a$. Et le numérateur $dyy + 2gy + ad$ surpassant alors le pro-
b. 21. 1. duit $gyy - ag$; l'arbitraire y seroit nécessairement plus [b] petite que $\frac{g + \sqrt{gg + agg - add}}{g - d}$ ou que $\frac{g + \sqrt{aadd - ab - b}}{g - d}$.

Suppositions.		*Résolution infinie.*
$\{ add - b \propto gg.$	$\{ azz + 2adz + gg \propto yyzz - 2gyz + gg.$	$\{ y$ *arbitraire.* $z \propto \frac{2ad + 2gy}{yy - a}.$

Exemple.

$\{ a \propto 3.\ b \propto 11.\ d \propto 5.\ \{ g \propto 8.\ y \propto 2.\ z \propto 62.\ \{$ *Quarré* $azz + 2adz + gg \propto 13456.$

SECOND CAS.

117. ET si on ajoûte b au produit add, & que la somme $add + b$ soit un quarré parfait; pour trouver un autre quarré, dont le produit

par a ayant receu b, la ſomme ſoit encore un quarré.

On découvrira la réſolution de la même ſorte que la précédente. Et ſi le côté $z + d$ ſurpaſſe l'autre g; l'arbitraire y vaudra plus que $\sqrt{a}$, & moins que $\frac{g + \sqrt{aadd + ab + b}}{g - d}$. Et ſi d valoit plus que g; l'arbitraire y ſurpaſſeroit $\frac{-g + \sqrt{aadd + ab + b}}{d - g}$, & ſurpaſſeroit encore $\sqrt{a}$.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

{ $add + b = gg$. { $azz + 2adz + gg = yyzz - 2gyz + gg$. { y *arbitraire*. $z = \frac{2ad + 2gy}{yy - a}$.

Exemple.

{ $a = 3$. $b = 6$. $d = 5$. { $g = 9$. $y = 2$. $z = 66$. { *Quarré* $azz + 2adz + gg = 15129$.

TROISIEME EXEMPLE ET QUESTION XXII.

118. SI la ſomme de deux grandeurs connuës a & b eſt un quarré parfait; pour trouver un quarré, tel que ſon produit par l'une des grandeurs ayant receu l'autre, la ſomme ſoit un quarré parfait.

Pour réſoudre ce lemme avec Diophante par une voie ſemblable à celle des éxemples précédens; je nomme dd le quarré $a + b$, & $z + 1$ le côté du nouveau quarré. Et multipliant par a le quarré $zz + 2z + 1$, & ajoûtant b au produit $azz + 2az + 1a$, il faudra que la ſomme $azz + 2az + 1a + 1b$ ou $azz + 2az + dd$ ſoit un quarré parfait. C'eſt pourquoi ſi on prend $yz - d$ pour ſon côté; l'égalité ſera $azz + 2az + dd = yyzz - 2dyz + dd$. Ou $2a + 2dy = yyz - az$. Et $z = \frac{2a + 2dy}{yy - a}$. Et l'arbitraire y ſurpaſſe $\sqrt{a}$.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

{ $a + b = dd$. { $azz + 2az + dd = yyzz - 2dyz + dd$. { y *arbitraire*. $z = \frac{2a + 2dy}{yy - a}$.

Exemple.

{ $a = 3$. $b = 6$. $d = 3$. { $y = 3$. $z = 4$. { *Quarré* $azz + 2az + dd = 81$. *Côté* $yz - d = 9$.

QUATRIEME EXEMPLE ET QUESTION XXIII.

119. SI un quarré déterminé aa reçoit une grandeur connuë b, & que la ſomme $aa + b$ ſoit un cube parfait; pour trouver un nouveau quarré, auquel ayant ajoûté la grandeur connuë b, la ſomme ſoit un cube parfait.

Pour réſoudre généralement cette queſtion, dont le ſçavant Bachet ne réſoût qu'un éxemple en particulier. On pourra ſe régler en cette ſorte par une méthode ſemblable à la précédente. Ayant nommé c le côté du cube $aa + b$, & $z - a$, ou $a - z$ le côté du nouveau quarré : Si on ajoûte b à ce quarré $zz - 2az + aa$; la ſomme $zz - 2az + aa + b$ ou zz

$-2az+c^3$ eſt un cube parfait. Nommant donc $c-zy$ le côté de ce même cube, l'égalité ſera $zz-2az+c^3 \propto c^3-3cczy+3czzyy-z^3y^3$. Ou $zzy^3 \propto 2a-3ccy+3czyy-1z$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \frac{3cyy-1}{2y^3}+\frac{1}{2y^3}\sqrt{3ccy^4-6cyy+1+4ay^3}$. Et afin que cette valeur ſoit commenſurable, on nommera $3cyy-1$ ou $1-3cyy$ le côté de ce qui eſt renfermé ſous le ſigne $\sqrt{}$; & l'égalité ſera $3ccy^4-6cyy+1+4ay^3 \propto 9ccy^4-6cyy+1$. Ou $6ccy^4 \propto 4ay^3$. Et $y \propto \frac{2a}{3cc}$. &c. Et la valeur de z étant déterminée, le côté $z-a$ ou $a-z$ du nouveau quarré le ſera par conſéquent. Et le nouveau cube $zz-2az+c^3$ ſervira à ſon tour pour découvrir un troiſiéme quarré qui réſoudra encore la queſtion. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini. Ce qui revient parfaitement à la méthode, dont on prétend ſi abſolument que Monſieur de Fermat doit être l'unique Auteur, quoi qu'il ait reconnû de bonne foi luy même ſur la queſtion dix-neuviéme du ſixiéme Livre de Diophante, que la réſolution de Monſieur Bachet ne ſatisfait pas ſimplement comme celle de Diophante, mais qu'elle eſt véritablement infinie. On auroit pû beaucoup abbréger, en ſuppoſant d'abord $2az \propto 3cczy$, ou $y \propto \frac{2a}{3cc}$.

Suppoſitions.		*Réſolution générale.*
$\{\, aa+b \propto c^3$.	$\{\, zz-2az+c^3 \propto c^3-3cczy+3czzyy-z^3y^3$.	$\{\, z \propto \frac{36aac^3-27c^6}{8a^3}$.

Exemple.

a. b. c.	$y \propto \frac{2a}{3cc}$.	z.	*Cube.*	*Côté.*
5. 2. 3.	$\frac{10}{27}$.	$\frac{4617}{1000}$.	$\{\, zz-2az+aa+b \propto \frac{2146689}{1000000}$.	$\{\, c-zy \propto \frac{129}{100}$.

VI COROLLAIRE ET PROBLEME.

Pour faciliter la réſolution des doubles égalitez.

120. *Pour rendre la réſolution des doubles égalitez plus courte & plus facile.*

On les transformera, en ſuppoſant le côté du quarré inconnu, plus ou moins une grandeur connuë, égal à une autre inconnuë. Et la ſuppoſition étant formée de la maniére qui ſera la plus propre, on mettra par tout dans la double égalité la valeur ſuppoſée de ſon inconnuë. Et on trouvera de nouveau une double égalité plus facile à réſoudre que la précédente, comme on peut aiſément juger par les deux éxemples qu'on propoſe.

Premier exemple.

Pour réſoudre avec facilité la double égalité $9zz-21z+15$ & $9zz-48z+24$. Je ſuppoſe le côté $3z \propto y+1$. Et mettant par tout $y+1$

pour $3z$; la double égalité eſt $yy - 5y + 9$ & $yy - 14y + 9$. Et il eſt beaucoup plus facile de la réſoudre que la précédente. Et même comme 9 eſt quarré de part & d'autre, on la pourra réſoudre en deux maniéres différentes : la premiére en la rapportant au huitiéme cas de la queſtion quinziéme, d'où l'on tirera une valeur $y \propto \frac{63}{152}$, & enſuitte une valeur $z \propto \frac{y+1}{3} \propto \frac{215}{456}$; & la ſeconde en la rapportant au huitiéme cas de la queſtion dix-ſeptiéme, d'où l'on tirera une valeur $y \propto \frac{152}{7}$, & enſuitte une valeur $z \propto \frac{y+1}{3} \propto \frac{53}{7}$.

Premiére réſolution.

$$\left\{\begin{array}{l} aayy - by + d.\ aayy - cy + d. \\ 1yy - 5y + 9.\ 1yy - 14y + 9. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x \propto \frac{bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac} \propto -\frac{9}{4}. \\ \textit{Quarrez}\ \frac{164025}{23104}.\ \frac{77841}{23104}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{xx - d}{2ax - b} \propto \frac{63}{152}. \\ \textit{Côtez}\ \frac{405}{152}.\ \frac{279}{152}. \end{array}\right.$$

Seconde réſolution.

$$\left\{\begin{array}{l} aa - by + dyy.\ aa - cy + dyy. \\ 9 - 5y + 1yy.\ 9 - 14y + 1yy. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x \propto \frac{bb - 2bc + cc}{4ab - 4ac} \propto -\frac{3}{4}. \\ \textit{Quarrez}\ \frac{18225}{49}.\ \frac{8649}{49}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{2ax - b}{xx - d} \propto \frac{152}{7}. \\ \textit{Côtez}\ \frac{135}{7}.\ \frac{93}{7}. \end{array}\right.$$

SECOND EXEMPLE.

Pour réſoudre encore d'une autre maniére avec facilité la double égalité $9zz - 21z + 15$ & $9zz - 48z + 24$. Je ſuppoſe $3z \propto y + 3$. Et mettant par tout $y + 3$ pour pour $3z$; la double égalité eſt $yy - 1y + 3$ & $yy - 10y - 15$. Et ſa réſolution eſt beaucoup plus facile que celle de la double égalité propoſée. Le neuviéme cas de la queſtion quinziéme fournit une valeur négative $y \propto -\frac{241}{152}$. D'où l'on tire, comme au premier éxemple, une valeur poſitive $z \propto \frac{y+3}{3} \propto \frac{215}{456}$. Où l'on peut obſerver, comment par des ſuppoſitions différentes, on arrive toûjours à une même réſolution. Les quarrez ſont ici les mêmes qu'a fourni la premiére des réſolutions précédentes. Et les valeurs nouvelles de l'inconnuë z en pourront fournir d'autres à leur tour de la même ſorte. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini. De ſorte qu'il ne reſte plus rien, ce me ſemble, à deſirer ſur le vaſte ſujet des doubles égalitez, qui ont donné juſqu'ici de ſi grandes tortures à tant d'habiles Mathématiciens.

VII COROLLAIRE ET QUESTION XXIV.

Pour la resolution des triples egalitez.

PREMIER CAS.

121. Pour résoudre une triple égalité $aa + bz$, $aa + cz$, $aa + dz$, ou chacune des grandeurs, qui doit être un quarré, comprend un même quarré connu aa plus un plan de l'inconnuë z par une grandeur connuë.

Ayant nommé $a + by$ le côté du premier quarré $aa + bz$; l'égalité sera $aa + bz \propto aa + 2aby + bbyy$. Et $z \propto 2ay + byy$. Et mettant pour z sa valeur $2ay + byy$ dans l'égalité double $aa + cz$ & $aa + dz$; on trouvera de nouveau une double égalité $aa + 2acy + bcyy$ & $aa + 2ady + bdyy$. Et la résolution sera rapportée au premier cas de la question dix-septiéme.

Suppositions.

$$\{ aa + bz \propto aa + 2aby + bbyy. \quad \{ aa + cz \propto xx. \quad \{ aa + dz \propto vv.$$

Résolution générale. $\{ t \propto \frac{d - b - c}{2}. \ y \propto \frac{2at + 2ac}{tt - bc}. \ z \propto 2ay + byy.$

Exemples.

$aa + bz$.	$aa + cz$.	$aa + dz$.	t.	y.	z.	*Quarrez.*			*Côtez.*		
$1 + 1z$.	$1 + 2z$.	$1 + 5z$.	1.	-6.	24.	25.	49.	121.	5.	7.	11.
$4 + 2z$.	$4 + 3z$.	$4 + 6z$.	$\frac{1}{2}$.	$-\frac{56}{23}$.	$\frac{1120}{529}$.	$\frac{4356}{529}$.	$\frac{5476}{529}$.	$\frac{8836}{529}$.	$\frac{66}{23}$.	$\frac{74}{23}$.	$\frac{94}{23}$.
$9 + 1z$.	$9 + 3z$.	$9 + 5z$.	$\frac{1}{2}$.	$-\frac{84}{11}$.	$\frac{1512}{121}$.	$\frac{2601}{121}$.	$\frac{5625}{121}$.	$\frac{8649}{121}$.	$\frac{51}{11}$.	$\frac{75}{11}$.	$\frac{93}{11}$.

SECOND CAS.

122. Et si la triple égalité est $aa + bz$, $aa + cz$, $aa - dz$; la résolution sera positive, lorsque c surpassera $b + d$.

Suppositions.

$$\{ aa + bz \propto aa + 2aby + bbyy \quad \{ aa + cz \propto xx. \quad \{ aa + dz \propto vv.$$

Résolution générale. $\{ t \propto \frac{b + c + d}{2}. \ y \propto \frac{2ac - 2at}{tt - bc}. \ z \propto 2ay + byy.$

Exemple.

$aa + bz$.	$aa + cz$.	$aa - dz$.	t.	y.	z.	*Quarrez.*			*Côtez.*		
$1 + 1z$.	$1 + 5z$.	$1 - 2z$.	4.	$\frac{2}{11}$.	$\frac{48}{121}$.	$\frac{169}{121}$.	$\frac{361}{121}$.	$\frac{25}{121}$.	$\frac{13}{11}$.	$\frac{19}{11}$.	$\frac{5}{11}$.

TROISIEME CAS.

123. Et si la triple égalité est $aa + bz$, $aa - cz$, $aa - dz$; on la résoûdra par les mêmes voies que les précédentes.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllllll} aazz - bz. & aazz - cz. & aazz - dz. & t. & y. & z. & & \textit{Quarrez.} \\ 1zz - 5z. & 1zz - 4z. & 1zz - 3z. & 3. & \frac{2}{11}. & \frac{121}{24}. & \left\{\frac{121}{576}.\right. & \frac{3025}{576}. \ \frac{5929}{576}. \end{array}\right.$$

IX COROLLAIRE ET QUESTION XXVI.

129. ET si au lieu du même quarré aa, il y avoit trois divers quarrez. Comme si on proposoit une triple égalité $1+1z$, $4+3z$, $9+2z$; on prendroit le moindre quarré 36, que les trois 1, 4, 9, peuvent diviser au juste. Et on multiplieroit la premiére grandeur $1+1z$ par 36 exposant de $\frac{36}{1}$, & la seconde $4+3z$ par l'exposant 9 de $\frac{36}{4}$, & la troisiéme $9+2z$ par l'exposant 4 de $\frac{36}{9}$. Et on trouveroit de nouveau une triple égalité $36+36z$ & $36+27z$ & $36+8z$, dont la résolution seroit rapportée aux régles précédentes. Et les autres cas seroient aisément transformez de la même sorte.

X COROLLAIRE ET QUESTION XXVII.

130. ET si la triple égalité est $aa+bz$, $e+cz$, $f+dz$; pour trouver la valeur de z.

Ayant nommé $a+by$ le côté du premier quarré $a+bz$, & mis pour z sa valeur $2ay+byy$ dans la double égalité $e+cz$ & $f+dz$; on trouvera une double égalité $e+2acy+bcyy$ & $f+2ady+bdyy$, où si e, f, sont des quarrez parfaits, la valeur de l'inconnuë y sera découverte par la résolution de la question dix-septiéme. Et si bc & bd en sont deux parfaits; la valeur de l'inconnuë y sera découverte par la résolution de la question quinziéme. Et les autres cas seront examinez de la même sorte. Et ces derniéres sortes d'égalitez triples ont aussi bien que les précédentes des usages tres-vastes pour la résolution des problêmes indéterminez.

DES EGALITEZ QUADRUPLES.

DES QUINTUPLES, ET DES AUTRES *multipliées en diverses maniéres.*

LA résolution des égalitez quadruples dépendant d'une Analyse beaucoup plus composée que celle dont nous avons parlé, il seroit inutile d'en tenter en ce lieu la résolution. Car pour celles qu'il plaît au R. Pére de Billy de nommer quadruples, quintuples, centuples, &c; ce ne sont que des noms, qui ne changent rien dans la nature des triples égalitez : puiſqu'ayant ſuppoſé ſeulement deux divers quarrez, comme $aa+bz$ & $ee+cz$, tous les autres qu'il y joint ne ſont qu'un ſeul & même quarré $ff+dz$ multiplié ſucceſſivement par divers quarrez entiérement connus. De ſorte que ſes égalitez quadruples, centuples, & autres ſemblables ne ſont jamais que des triples égalitez. Et en effet ne doit-on pas conſidérer comme une égalité toute ſimple la triple égalité $aa+bz$, $4aa+4bz$, $9aa+9bz$; puiſqu'il ſuffit de quarrer la ſeule grandeur $aa+bz$, pour quarrer toutes les autres. Il ſeroit aiſé d'enfler à l'infini les noms de toutes les diverſes égalitez doubles & triples, dont on a découvert les réſolutions dans ce Livre, ſi on affectoit de le faire à de ſemblables titres. On pourra néanmoins donner ou conſerver à ces égalitez traveſties tels noms que l'on voudra, lorſqu'il ſera néceſſaire de les mettre en uſage ; pourvû que l'on ait ſoin de marquer au juſte leur nature, & de les conſidérer ſimplement comme des égalitez, ou ſimples, ou doubles, ou comme des égalitez triples.

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES

LIVRE CINQUIEME.

DE L'ANALYSE INDETERMINE'E.

DES QUESTIONS,

où l'on demande au moins trois divers quarrez.

I QUESTION.

PREMIER CAS.

1. *POur trouver trois quarrez parfaits, tels que l'excez, dont le premier surpasse le second, soit à l'excez, dont le second surpasse le troisiéme; comme une grandeur connuë est à une grandeur connuë.*

Ayant nommé z le côté du quarré moyen, & $z + y$ le côté du plus grand, & $z - x$ le côté du moindre; l'excez, dont le premier quarré $zz + 2zy + yy$ surpasse le second zz, est $2zy + yy$. Et l'excez, dont le second zz surpasse le troisiéme $zz - 2zx + xx$, est $2zx - xx$. Et si le premier excez est au second, comme une grandeur connuë c est à une connuë d; la proportion sera $2zy + yy. 2zx - xx :: c. d.$ Et multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens; l'égalité sera $2dzy + dyy = 2cxz - cxx$. Ou $2cxz - 2dyz = cxx + dyy$. Et $z = \frac{cxx + dyy}{2cx - 2dy}$. Et les deux grandeurs y & x sont arbitraires. Et comme z ou sa valeur doit surpasser x: Si on multiplie de part & d'autre par le dénominateur $2cx - 2dy$; le numérateur $cxx + dyy$ surpassera le produit $2cxx - 2dyx$. Et dyy surpassera $cxx - 2dyx$. De sorte que l'arbitraire y doit [b] surpasser $-x + \frac{x}{d}\sqrt{cd + dd}$. Et afin que le dénominateur $2cx - 2dy$ soit positif, la même y est moindre que $\frac{cx}{d}$.

Supposition. *Résolution infinie.*

$$\{\, 2yz + yy.\ 2zx - xx :: c.\ d. \quad \{\, x.\ y.\ \textit{arbitraires}. \quad z \propto \frac{cxx + dyy}{2cx - 2dy}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllllllll} c. & d. & \{x.\ y.\ z. & \{z+y.\ z.\ z-x. & & \textit{Quarrez.} & & & \textit{Proportion.} & \\ 3. & 1. & \{1.\ 2.\ \frac{7}{2}. & \{\frac{11}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \frac{5}{2}. & & \{\frac{121}{4}.\ \frac{49}{4}.\ \frac{25}{4}. & & & \{\frac{121-49}{4}.\ \frac{49-25}{4} & :: 3.\ 1. \\ 3. & 1. & \{2.\ 4.\ 7. & \{11.\ 5.\ 5. & & \{121.\ 49.\ 25. & & & \{121-49.\ 49-25 & :: 3.\ 1. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

2. *ET si l'excez, dont le premier quarré surpasse le second, est à l'excez, dont le premier même surpasse le troisiéme, comme une grandeur connuë est à une grandeur connuë.*

Les raisonnemens étant ordonnez, & la résolution découverte à peu prés comme au premier cas, les grandeurs x & y seront encore arbitraires. Et afin que z ou sa valeur $\frac{cxx + dyy - cyy}{2cy - 2dy + 2cx}$ puisse surpasser x, il faudra que le numérateur $cxx + dyy - cyy$ surpasse le produit $2cyx - 2dyx$
b. 22. 1. $+ 2cxx$, & par conséquent que [b] l'arbitraire y surpasse $-x + \frac{x\sqrt{d}}{\sqrt{d-c}}$. Et afin que le dénominateur puisse être positif; la même y doit être plus petite que $\frac{cx}{d-c}$. On suppose ici que le second quarré surpasse le troisiéme. Si le troisiéme surpassoit le second; on n'auroit qu'à les transposer, pour régler sa résolution sur le modéle de celle qu'on expose.

Supposition. *Résolution infinie.*

$$\{\, 2yz + yy.\ 2yz + yy + 2xz - xx :: c.\ d. \quad \{\, x.\ y.\ \textit{arbitraires}. \quad z \propto \frac{cxx + dyy - cyy}{2cy + 2cx - 2dy}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llllllllll} c. & d. & \{x.\ y.\ z. & \{z+y.\ z.\ z-x. & & \textit{Quarrez.} & & & \textit{Proportion.} & \\ 3. & 4. & \{1.\ 2.\ \frac{7}{2}. & \{\frac{11}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \frac{5}{2}. & & \{\frac{121}{4}.\ \frac{49}{4}.\ \frac{25}{4}. & & & \{\frac{121-49}{4}.\ \frac{121-25}{4} & :: 3.\ 4. \\ 3. & 4. & \{2.\ 4.\ 7. & \{11.\ 7.\ 5. & & \{121.\ 49.\ 25. & & & \{121-49.\ 121-25 & :: 3.\ 4. \end{array}\right.$$

II QUESTION.

PREMIER CAS.

3. *POur trouver trois grandeurs, telles qu'ayant ajoûté la seconde au quarré de la premiére, & la troisiéme au quarré de la seconde, & la pre-*

miére au quarré de la troisiéme; les trois sommes soient chacune un quarré parfait.

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde, & x la troisiéme; & $z + v$ le côté du premier quarré $zz + y$, & $y + t$ le côté du second $yy + x$, & $x + s$ le côté du troisiéme $xx + z$; la premiére égalité sera $zz + y \propto zz + 2vz + vv$. Ou $y \propto 2vz + vv$. Et la seconde $yy + x \propto yy + 2ty + tt$. Ou $2ty \propto x - tt$. Et $y \propto \frac{x - tt}{2t} \propto 2vz + vv$. Et multipliant les membres par $2t$, on aura $x - tt \propto 4tvz + 2tvv$. Ou $x \propto 4tvz + 2tvv + tt$. Et la troisiéme égalité sera $xx + z \propto xx + 2sx + ss$. Ou $2sx \propto z - ss$. Et $x \propto \frac{z - ss}{2s} \propto 4tvz + 2tvv + tt$. Et multipliant par $2s$, l'égalité sera $z - ss \propto 8stvz + 4stvv + 2stt$. Et $1z - 8stvz \propto 4stvv + 2stt + ss$. Et $z \propto \frac{4stvv + 2stt + ss}{1 - 8stv}$.

Et les grandeurs s, t, v, sont arbitraires. Mais $\frac{1}{8}$ surpasse leur solide stv.

1ere *supposition.* 2e *supposition.* 3e *supposition.*

$\{ zz + y \propto zz + 2vz + vv.$ $\{ yy + x \propto yy + 2ty + tt.$ $\{ xx + z \propto xx + 2sx + ss.$

Résolution infinie.

$\{ v.\ t.\ s.$ *arbitraires.*

$$\{ z \propto \frac{4stvv + 2stt + ss}{1 - 8stv}. \quad \{ y \propto \frac{4sttv + 2ssv + vv}{1 - 8stv}. \quad \{ x \propto \frac{4sstv + 2tvv + tt}{1 - 8stv}.$$

Exemples.

$v.$	$t.$	$s.$	$z.$	$y.$	$x.$	$zz + y.$	$yy + x.$	$xx + z.$	$z + v.$	$y + t.$	$x + s.$
1.	$\frac{3}{8}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{65}{32}$.	$\frac{81}{16}$.	$\frac{63}{16}$.	$\frac{9409}{1024}$.	$\frac{7569}{256}$.	$\frac{4489}{256}$.	$\frac{97}{32}$.	$\frac{87}{16}$.	$\frac{67}{16}$.
1.	1.	$\frac{1}{57}$.	$\frac{7}{57}$.	$\frac{71}{57}$.	$\frac{199}{57}$.	$\frac{4096}{3249}$.	$\frac{16384}{3249}$.	$\frac{40000}{3249}$.	$\frac{64}{57}$.	$\frac{128}{57}$.	$\frac{200}{57}$.

SECOND CAS.

4. *ET si on retranche la seconde grandeur du quarré de la premiére, & la troisiéme du quarré de la seconde, & la premiére du quarré de la troisiéme; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La résolution sera formée par les mêmes voies que la précédente. Et $\frac{1}{8}$ vaudra moins que le solide stv des trois arbitraires s, t, v.

1ere *supposition.* 2e *supposition.* 3e *supposition.*

$\{ zz - y \propto zz - 2vz + vv.$ $\{ yy - x \propto yy - 2ty + tt.$ $\{ xx - z \propto xx - 2sx + ss.$

Résolution infinie.

$\{ v.\ t.\ s.$ *arbitraires.*

$$\{ z \propto \frac{4stvv + 2stt + ss}{8stv - 1}.\quad y \propto \frac{4sttv + 2ssv + vv}{8stv - 1}.\quad x \propto \frac{4sstv + 2tvv + tt}{8stv - 1}.$$

Exemples.

$v.$	$s.$	$t.$	$z.$	$y.$	$x.$	$zz - y.$	$yy - x.$	$xx - z.$	$z - x.$	$y + t.$	$x - s.$
1.	1.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{17}{8}$.	$\frac{13}{4}$.	$\frac{25}{16}$.	$\frac{81}{64}$.	9.	$\frac{81}{256}$.	$\frac{9}{8}$.	3.	$\frac{9}{16}$.
1.	$\frac{2}{9}$.	1.	$\frac{16}{9}$.	$\frac{23}{9}$.	$\frac{37}{9}$.	$\frac{49}{81}$.	$\frac{196}{81}$.	$\frac{1225}{81}$.	$\frac{7}{9}$.	$\frac{14}{9}$.	$\frac{35}{9}$.

III QUESTION.

PREMIER CAS.

5. *Pour trouver trois grandeurs, telles que leur somme étant ajoûtée au quarré de chacune, les nouvelles sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde, & x la troisiéme; & $z + v$ le côté du premier quarré $zz + z + y + x$, & $y + t$ le côté du second $yy + z + y + x$, & $x + s$ le côté du troisiéme $xx + z + y + x$. On formera la premiére égalité $zz + z + y + x \propto zz + 2vz + vv$. Et $x \propto 2vz + vv - z - y$. Et la seconde égalité sera $yy + z + y + x \propto yy + 2ty + tt$. Et $x \propto 2ty + tt - z - y \propto 2vz + vv - z - y$. Ou $2ty \propto 2vz + vv - tt$. Et $y \propto \frac{2vz + vv - tt}{2t}$. Et la troisiéme égalité sera $xx + z + y + x \propto xx + 2sx + ss$. Ou $x \propto \frac{z + y - ss}{2s - 1} \propto 2ty + tt - z - y$. Et multipliant de part & d'autre par $2s - 1$, on aura l'égalité $z + y - ss \propto 4sty + 2stt - 2sz - 2sy - 2ty - tt + z + y$. Ou $4sty - 2sy - 2ty \propto 2sz + tt - 2stt - ss$. Et $y \propto \frac{2sz + tt - 2stt - ss}{4st - 2s - 2t} \propto \frac{2vz + vv - tt}{2t}$. Et multipliant par les dénominateurs chacun des deux membres, l'égalité sera $4stz + 2t^3 - 4st^3 - 2sst \propto 8stvz + 4stvv - 4st^3 - 4svz - 2svv + 2stt - 4tvz - 2tvv + 2t^3$. Ou $2stz + 2svz + 2tvz - 4stvz \propto stt + sst - svv - tvv + 2stvv$. Et $z \propto \frac{stt + sst - svv - tvv + 2stvv}{2st + 2sv + 2tv - 4stv}$. Et les trois grandeurs s, t, v sont arbitraires.

1ere *supposition* $\{ zz + z + y + x \propto zz + 2vz + vv$.

2e $\{ yy + z + y + x \propto yy + 2ty + tt$. 3e $\{ xx + z + y + x \propto xx + 2sx + ss$.

Résolution infinie.

$$\{ s.\ t.\ v.\ \textit{arbitraires.}\ \{ z \propto \frac{stt + sst - svv - tvv + 2stvv}{2st + 2sv + 2tv - 4stv}.$$

$$\{ y \propto \frac{svv + ssv - stt - ttv + 2sttv}{2st + 2sv + 2tv - 4stv}.\ \{ x \propto \frac{ttv + tvv - sst - ssv + 2sstv}{2st + 2sv + 2tv - 4stv}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} v \propto \frac{2}{3}.\ t \propto \frac{4}{3}.\ s \propto 2.\ \{ z \propto \frac{11}{3}.\ y \propto \frac{4}{3}.\ x \propto \frac{1}{3}.\ \{ zz + z + y + x \propto \frac{169}{9}.\ z + v \propto \frac{13}{3}. \\ yy + z + y + x \propto \frac{64}{9}.\ y + t \propto \frac{8}{3}.\ \{ xx + z + y + x \propto \frac{49}{9}.\ x + s \propto \frac{7}{3}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

6. *ET si la somme des trois grandeurs est retranchée du quarré de chacune; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

La résolution sera formée par les mêmes voies que la précédente. Et il ne faudra que changer les signes du commun dénominateur.

1^ere^ *supposition* $\{ zz - z - y - x \propto zz - 2vz + vv.$

2^e^ $\{ yy - z - y - x \propto yy - 2ty + tt.$ 3^e^ $\{ xx - z - y - x \propto xx - 2sx + ss.$

Résolution infinie.

$$\{ s.\ t.\ v.\ \textit{arbitraires}.\ \{ z \propto \frac{stt + sst - svv - tvv + 2stvv}{4stv - 2st - 2sv - 2tv}.$$

$$\{ y \propto \frac{svv + ssv - stt - ttv + 2sttv}{4stv - 2st - 2sv - 2tv}.\quad \{ x \propto \frac{ttv + tvv - sst - ssv + 2sstv}{4stv - 2st - 2sv - 2tv}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} v \propto \frac{7}{6}.\ t \propto \frac{7}{3}.\ s \propto \frac{7}{2}.\ \{ y \propto \frac{56}{12}.\ z \propto \frac{91}{12}.\ x \propto \frac{49}{12}.\ \{ zz - z - y - x \propto \frac{5929}{144}.\ z - v \propto \frac{77}{12}. \\ yy - z - y - x \propto \frac{784}{144}.\ y - t \propto \frac{28}{12}.\ \{ xx - z - y - x \propto \frac{49}{144}.\ x - s \propto \frac{7}{12}. \end{array}\right.$$

AUTRES CAS.

7. *ET si la somme des trois grandeurs est ajoûtée à l'un des quarrez, & retranchée de chacun des deux autres; ou retranchée de l'un, & ajoûtée à chacun des deux autres; afin que la somme & les restes, ou le reste & les sommes soient des quarrez parfaits.*

On pourra former les modéles des résolutions par les mêmes voies que les précédentes. Ce que je laisse à la recherche de ceux qui voudront s'exercer.

IV QUESTION.

8. *POur trouver trois grandeurs, telles que le quarré de chacune étant retranché de la somme des trois, les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé zy la premiére grandeur, & zx la seconde, & zv la troisiéme; & tz le côté du premier des quarrez que doivent fournir les retranchemens, & sz le côté du second de ces mêmes quarrez, & rz le côté du troisiéme; la premiére égalité sera $ttzz \propto zy + zx + zv - zzyy$. Ou ttz

$+ zyy \propto y + x + v$. Et $z \propto \frac{y + x + v}{tt + yy}$. Et la seconde égalité sera $sszz \propto zy + zx + zv - zzxx$. Ou $ssz + zxx \propto y + x + v$. Et $z \propto \frac{y + x + v}{ss + xx} \propto \frac{y + x + v}{tt + yy}$. Et divisant de part & d'autre par $y + x + v$, on aura $\frac{1}{ss + xx} \propto \frac{1}{tt + yy}$. Et les deux membres étant multipliez par les dénominateurs, on trouvera l'égalité $tt + yy \propto ss + xx$. Ou $yy \propto ss + xx - tt$. Et la troisiéme égalité sera $rrzz \propto zy + zx + zv - zzvv$. Ou $rrz + zvv \propto y + x + v \propto ttz + zyy$. Et $rr + vv \propto tt + yy$. Ou $yy \propto rr + vv - tt \propto ss + xx - tt$. Et $rr + vv \propto ss + xx$. De sorte que la question se réduit à coupper deux quarrez tt & yy en deux autres ss & xx, & de nouveau encore en deux rr & vv. On peut néanmoins prendre s pour y, & x pour t. Et il seroit facile de former une suitte infinie de résolutions.

1ere *supposition* $\{ zy + zx + zv - zzyy \propto ttzz$.

2e $\{ zy + zx + zv - zzxx \propto sszz$. 3e $\{ zy + zx + zv - zzvv \propto rrzz$.

Résolution infinie.

$t.\ y.\ p.\ n.$ *arbitraires.* $\{ s \propto \frac{ppt - 2py - t}{pp + 1}$. $x \propto \frac{ppy + 2pt - y}{pp + 1}$.
$r \propto \frac{nny + 2nt - y}{nn + 1}$. $v \propto \frac{nnt - 2ny - t}{nn + 1}$. $z \propto \frac{y + x + v}{tt + yy}$.

Premier exemple.

$t \propto 3.\ y \propto 2.\ p \propto 2.\ n \propto 3.\ \{ s \propto \frac{1}{5}.\ x \propto \frac{18}{5}.\ r \propto \frac{17}{5}.\ v \propto \frac{6}{5}.\ z \propto \frac{34}{65}$.
$zy \propto \frac{68}{65}.\ zx \propto \frac{612}{325}.\ zv \propto \frac{204}{325}.\ \{ tz \propto \frac{102}{65}.\ sz \propto \frac{34}{325}.\ rz \propto \frac{578}{325}$.
$\{$ 1er *Quarré* $\{ zy + zx + zv - zzyy \propto \frac{10404}{4225}$.
3d $\{ zy + zx + zv - zzxx \propto \frac{1156}{105625}$. 3e $\{ zy + zx + zv - zzvv \propto \frac{334084}{105625}$.

Second exemple.

$t \propto 170.\ y \propto 85.\ p \propto 3.\ n \propto 2.\ \{ s \propto 85.\ x \propto 170.\ r \propto 187.\ v \propto 34.\ z \propto \frac{1}{125}$.
$zy \propto \frac{85}{125}.\ zx \propto \frac{170}{125}.\ zv \propto \frac{34}{125}.\ \{ tz \propto \frac{170}{125}.\ sz \propto \frac{85}{125}.\ rz \propto \frac{187}{125}$.
1er *Quarré* $\{ zy + zx + zv - zzyy \propto \frac{28900}{15625}$.
2d $\{ zy + zx + zv - zzxx \propto \frac{7225}{15625}$. 3e $\{ zy + zx + zv - zzvv \propto \frac{34969}{15625}$.

Troisiéme

Troisiéme exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} t \propto 2.\ y \propto 1.\ p \propto 2.\ n \propto 3.\ \{ s \propto \frac{2}{5}.\ x \propto \frac{11}{5}.\ r \propto 2.\ v \propto 1.\ z \propto \frac{21}{25}. \\ zy \propto \frac{21}{25} : zx \propto \frac{231}{125}.\ zv \propto \frac{21}{25}.\ \{ tz \propto \frac{42}{25}.\ sz \propto \frac{42}{125}.\ rz \propto \frac{42}{25}. \\ 1^{er}\ \textit{Quarré}\ \{ zy + zx + zv - zzyy \propto \frac{1764}{625}. \\ 2^{d}\ \{ zy + zx + zv - zzxx \propto \frac{1764}{15625}.\ zy + zx + zv - zzvv \propto \frac{1764}{625}. \end{array}\right.$$

V QUESTION.

PREMIER CAS.

9. *POur trouver trois grandeurs, telles que chacune étant ajoûtée au quarré de leur somme, les nouvelles sommes soient chacune un quarré.*

Ayant nommé zy la somme des trois, & s la premiére, & la seconde r, & la troisiéme q; & zx le côté du premier des quarrez que doivent former les nouvelles sommes, & zv le côté du second, & zt le côté du troisiéme; la premiére égalité sera $zzyy + s \propto zzxx$. Ou $s \propto zzxx - zzyy$. Et la seconde sera $zzyy + r \propto zzvv$. Ou $r \propto zzvv - zzyy$. Et la troisiéme sera $zzyy + q \propto zztt$. Ou $q \propto zztt - zzyy$. Et la somme des grandeurs est $s + r + q \propto zy \propto zzxx + zzvv + zztt - 3zzyy$. Ou $y \propto zxx + zvv + ztt - 3zyy$. Et $z \propto \frac{y}{xx + vv + tt - 3yy}$. Et les quatre grandeurs y, x, v, t, seront arbitraires. Mais y est la moindre des quatre. Et on pourroit former une suitte infinie de résolutions infinies.

1^{re} *supposition.*	2^{e} *supposition.*	3^{e} *supposition.*	4^{e} *supposition.*
$zzyy + s \propto zzxx$.	$zzyy + r \propto zzvv$.	$zzyy + q \propto zztt$.	$zy \propto s + r + q$.

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad y.\ x.\ v.\ t.\ \textit{arbitraires.} \\ z \propto \frac{y}{xx + vv + tt - 3yy}.\ \{ s \propto zzxx - zzyy.\ r \propto zzvv - zzyy.\ q \propto zztt - zzyy. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} y \propto 1.\ x \propto 2.\ v \propto 3.\ t \propto 4.\ \{ z \propto \frac{1}{26}.\ zy \propto \frac{1}{26}.\ s \propto \frac{3}{676}.\ r \propto \frac{8}{676}.\ q \propto \frac{15}{676}. \\ \textit{Quarrez.}\ zzyy + s \propto \frac{4}{676}.\ \{ zzyy + r \propto \frac{9}{676}.\ \{ zzyy + q \propto \frac{16}{676}. \\ \textit{Côtez.}\ zx \propto \frac{2}{26}.\ zv \propto \frac{3}{26}.\ zt \propto \frac{4}{26}.\ \{ \textit{Somme}\ s + r + q \propto \frac{26}{676} \propto \frac{1}{26}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

10. *ET si chacune des grandeurs est retranchée du quarré de la somme, afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On formera la réſolution par les mêmes voies que la précédente. Et l'arbitraire y ſurpaſſera chacune des trois autres x, v, t. Et on pourra former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1^ere ſuppoſition. $zzyy - s = zzxx$. *2^e ſuppoſition.* $zzyy - r = zzvv$. *3^e ſuppoſition.* $zzyy - q = zztt$. *4^e ſuppoſition.* $s + r + q = zy$.

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z = \frac{y}{3yy - xx - vv - tt}. \quad s = zzyy - zzxx. \quad r = zzyy - zzvv. \quad q = zzyy - zztt.$$

Exemple.

$y = 4.\ x = 3.\ v = 2.\ t = 1.\ z = \frac{2}{17}.\ zy = \frac{8}{17}.\ s = \frac{28}{289}.\ r = \frac{48}{289}.\ q = \frac{60}{289}.$

Quarrez. $zzyy - s = \frac{36}{289}.\ zzyy - r = \frac{16}{289}.\ zzyy - q = \frac{4}{289}.$

Côtez. $zx = \frac{6}{17}.\ zv = \frac{4}{17}.\ zt = \frac{2}{17}.$ *Somme* $s + r + q = \frac{136}{289} = \frac{8}{17}.$

TROISIEME CAS.

11. *ET ſi le quarré de la ſomme eſt retranché de chacune des grandeurs; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Les quatre arbitraires y, x, v, t, n'auront point de limites. Et on pourra former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1^ere ſuppoſition. $s - zzyy = zzxx$. *2^e ſuppoſition.* $r - zzyy = zzvv$. *3^e ſuppoſition.* $q - zzyy = zztt$. *4^e ſuppoſition.* $s + r + q = zy$.

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z = \frac{y}{xx + vv + tt + 3yy}. \quad s = zzyy + zzxx. \quad r = zzyy + zzvv. \quad q = zzyy + zztt.$$

Exemple.

$y = 1.\ x = 1.\ v = 2.\ t = 3.\ z = \frac{1}{17}.\ zy = \frac{1}{17}.\ s = \frac{2}{289}.\ r = \frac{5}{289}.\ q = \frac{10}{289}.$

Quarrez. $s - zzyy = \frac{1}{289}.\ r - zzyy = \frac{4}{289}.\ q - zzyy = \frac{9}{289}.$

Côtez. $zx = \frac{1}{17}.\ zv = \frac{2}{17}.\ zt = \frac{3}{17}.$ *Somme* $s + r + q = \frac{17}{289} = \frac{1}{17}.$

QUATRIEME CAS.

12. *ET ſi l'une des grandeurs eſt ôtée du quarré de la ſomme, & que chacune des autres ſoit ajoûtée à ce même quarré; afin que le reſte & les ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

L'arbitraire x eſt la moindre des quatre, & l'arbitraire y vaut moins que chacune des deux v & t. Et on peut former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1ere ſuppoſition. $zzyy - s \propto zzxx$. *2e ſuppoſition.* $zzyy + r \propto zzvv$. *3e ſuppoſition.* $zzyy + q \propto zztt$. *4e ſuppoſition.* $s + r + q \propto zy$.

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z \propto \frac{y}{vv + tt - xx - yy} \quad s \propto zzyy - zzxx.\ r \propto zzvv - zzyy.\ q \propto zztt - zzyy.$$

Exemple.

$y \propto 2.\ x \propto 1.\ v \propto 3.\ t \propto 4.\ z \propto \frac{1}{10}.\ zy \propto \frac{2}{10}.\ s \propto \frac{3}{100}.\ r \propto \frac{5}{100}.\ q \propto \frac{12}{100}.$

Quarrez. $zzyy - s \propto \frac{1}{100}.\ zzyy + r \propto \frac{9}{100}.\ zzyy + q \propto \frac{16}{100}.$

Côtez. $zx \propto \frac{1}{10}.\ zv \propto \frac{3}{10}.\ zt \propto \frac{4}{10}.$ *Somme* $s + r + q \propto \frac{20}{100} \propto \frac{2}{10}.$

CINQVIEME CAS.

13. *ET ſi l'une des grandeurs eſt ajoûtée au quarré de la ſomme, & que chacune des deux autres ſoit retranchée de ce même quarré; afin que la ſomme & les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

L'arbitraire x ſera la plus grande des quatre, & l'arbitraire y ſurpaſſera chacune des deux v & t. Et on pourra former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1ere ſuppoſition. $zzyy + s \propto zzxx$. *2e ſuppoſition.* $zzyy - r \propto zzvv$. *3e ſuppoſition.* $zzyy - q \propto zztt$. *4e ſuppoſition.* $s + r + q \propto zy$.

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z \propto \frac{y}{yy + xx - vv - tt}.\quad s \propto zzxx - zzyy.\ r \propto zzyy - zzvv.\ q \propto zzyy - zztt.$$

Exemple.

$y \propto 3.\ x \propto 4.\ v \propto 2.\ t \propto 1.\ z \propto \frac{3}{20}.\ zy \propto \frac{9}{20}.\ s \propto \frac{63}{400}.\ r \propto \frac{45}{400}.\ q \propto \frac{72}{400}.$

Quarrez. $zzyy + s \propto \frac{144}{400}.\ zzyy - r \propto \frac{36}{400}.\ zzyy - q \propto \frac{9}{400}.$

Côtez. $zx \propto \frac{12}{20}.\ zv \propto \frac{6}{20}.\ zt \propto \frac{3}{20}.$ *Somme* $s + r + q \propto \frac{180}{400} \propto \frac{9}{20}.$

SIXIEME CAS.

14. *ET ſi le quarré de la ſomme eſt ajoûté à l'une des grandeurs, & retranché de chacune des deux autres; afin que la ſomme & les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

L'arbitraire x ſurpaſſera l'arbitraire y. Et les trois y, v, t, n'auront point de limites les unes à l'égard des autres. Et on pourra former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1ere ſuppoſition.	*2e ſuppoſition.*	*3e ſuppoſition.*	*4e ſuppoſition.*
$zzyy + s \propto zzxx.$	$r - zzyy \propto zzvv.$	$q - zzyy \propto zztt.$	$s + r + q \propto zy.$

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z \propto \frac{y}{yy + xx + vv + tt}. \quad s \propto zzxx - zzyy. \quad r \propto zzyy + zzvv. \quad q \propto zzyy + zztt.$$

Exemple.

$$y \propto 3.\ x \propto 4.\ v \propto 1.\ t \propto 2. \quad z \propto \frac{1}{10}.\ zy \propto \frac{3}{10}.\ s \propto \frac{7}{100}.\ r \propto \frac{10}{100}.\ q \propto \frac{13}{100}.$$

Quarrez. $zzyy + s \propto \frac{16}{100}.\ r - zzyy \propto \frac{1}{100}.\ q - zzyy \propto \frac{4}{100}.$

Côtez. $zx \propto \frac{4}{10}.\ zv \propto \frac{1}{10}.\ zt \propto \frac{2}{10}.$ *Somme* $s + r + q \propto \frac{3}{10}.$

SEPTIEME CAS.

15. *ET enfin ſi le quarré de la ſomme eſt retranché de l'une des grandeurs, & ajoûté à chacune des deux autres; afin que la ſomme & les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

L'arbitraire y vaut moins que chacune des deux v & t. Tout le reſte eſt ſans bornes. Et on peut former une ſuitte infinie de réſolutions infinies.

1ere ſuppoſition.	*2e ſuppoſition.*	*3e ſuppoſition.*	*4e ſuppoſition.*
$s - zzyy \propto zzxx.$	$zzyy + r \propto zzvv.$	$zzyy + q \propto zztt.$	$s + r + q \propto zy.$

Réſolution infinie.

y. x. v. t. arbitraires.

$$z \propto \frac{y}{xx + vv + tt - yy}. \quad s \propto zzyy + zzxx. \quad r \propto zzvv - zzyy. \quad q \propto zztt - zzyy.$$

Exemple.

$$y \propto 2.\ x \propto 1.\ v \propto 4.\ t \propto 3. \quad z \propto \frac{1}{11}.\ zy \propto \frac{2}{11}.\ s \propto \frac{5}{121}.\ r \propto \frac{12}{121}.\ q \propto \frac{5}{121}.$$

Quarrez. $s - zzyy \propto \frac{1}{121}.\ zzyy + r \propto \frac{16}{121}.\ zzyy + q \propto \frac{9}{121}.$

Côtez. $zx \propto \frac{1}{11}.\ zv \propto \frac{4}{11}.\ zt \propto \frac{3}{11}.$ *Somme* $s + r + q \propto \frac{22}{121} \propto \frac{2}{11}.$

VI QUESTION.

16. *POur trouver trois grandeurs dont la ſomme ſoit un quarré parfait, & de plus que les excez alternatifs, dont deux d'entr'elles ſurpaſſent l'autre qui reſte ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & x la troiſiéme; & v le côté du premier quarré $z + y + x$, & t le côté du ſecond $z + y - x$, & s le côté du troiſiéme $z + x - y$. La premiére égalité $z + y + x \propto vv$ fournira une valeur $z \propto vv - y - x$. Et la ſeconde $z + y - x \propto tt$ fournira une valeur $z \propto tt - y + x \propto vv - y - x$. Et on en tirera l'égalité $2x \propto vv - tt$. Ou $x \propto \frac{vv - tt}{2}$. Et la troiſiéme égalité $z + x - y \propto ss$ fournira encore une valeur $z \propto ss + y - x \propto vv - y - x$. D'où l'on tirera une égalité $2y \propto vv - ss$. Ou $y \propto \frac{vv - ss}{2}$. Et mettant pour x & pour y leurs valeurs $\frac{vv - tt}{2}$ & $\frac{vv - ss}{2}$ dans l'égalité $z \propto vv - y - x$, on aura une valeur $z \propto \frac{tt + ss}{2}$. Et parceque la différence $y + x - z$ eſt encore un quarré par la derniére des ſuppoſitions; il faudra que la valeur $vv - tt - ss$ de cette différence ſoit un quarré parfait. C'eſt pourquoi nommant $r - v$ ou $v - r$ le côté du quarré, on formera l'égalité $vv - tt - ss \propto vv - 2rv + rr$. Ou $2rv \propto tt + ss + rr$ Et $v \propto \frac{tt + ss + rr}{2r}$. Et les grandeurs t, s, r, ſont arbitraires.

Suppoſitions.

$\{z + y + x \propto vv$. $\{z + y - x \propto tt$. $\{z - y + x \propto ss$. $\{y + x - z \propto rr - 2rv + vv$.

Réſolution infinie.

$\{t.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $\{v \propto \frac{tt + ss + rr}{2r}$. $\{z \propto \frac{tt + ss}{2}$. $y \propto \frac{vv - ss}{2}$. $x \propto \frac{vv - tt}{2}$.

Exemple.

$\{t \propto 2.\ s \propto 3.\ r \propto 1.\ v \propto 7.$ $\{1^{ere}$ *grandeur* $z \propto \frac{13}{2}$. $2^{e}\ y \propto \frac{40}{2}$. $3^{e}\ x \propto \frac{45}{2}$.
Quarrez. $z + y + x \propto 49$. $z + y - x \propto 4$. $z - y + x \propto 9$. $y + x - z \propto 36$.

VII QUESTION.

17. *Pour trouver trois grandeurs, dont la ſomme entière & chacune des ſommes alternatives ſoit un quarré parfait.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & x la troiſiéme; & v le côté du premier quarré $z + y + x$, & t le côté du ſecond $z + y$, & s le côté du troiſiéme $z + x$, & r le côté du quatriéme $y + x$. La premiére égalité $z + y + x \propto vv$ fournira une valeur $z \propto vv - y - x$. Et la ſeconde $z + y \propto tt$ fournira une valeur $z \propto tt - y \propto vv - y - x$. Et par conſéquent $x \propto vv - tt$. Et la troiſiéme égalité $z + x \propto ss$ fournira encore une valeur $z \propto ss - x \propto vv - y - x$. Et par conſéquent $y \propto vv - ss$. Et enfin la derniére égalité $y + x \propto rr$ ſera $2vv - tt - ss \propto rr$. Et afin que la grandeur v puiſſe s'abbaiſſer au linéaire;

on ſuppoſera $v - p$ pour t, & $v - n$ pour s. Et alors l'égalité $2vv - tt - ss = rr$, ſera $2vv - vv + 2pv - pp - vv + 2nv - nn = rr$. Ou $2pv + 2nv = rr + pp + nn$. Et $v = \frac{rr + pp + nn}{2p + 2n}$. Mais afin que z ou ſa valeur $tt + ss - vv$ ſoit poſitive, il faut que $tt + ss$ ſurpaſſe vv. Ou prenant leurs valeurs, & laiſſant le dénominateur commun ; il faut que les quarrez enſemble des grandeurs $rr - pp - 2pn + nn$ & $rr + pp - 2pn - nn$ ſurpaſſent le quarré du numérateur $rr + pp + nn$; c'eſt à dire que $2r^4 + 2p^4 - 8pnrr + 4ppnn + 2n^4$ doit ſurpaſſer $r^4 + 2pprr + p^4 + 2nnrr + 2ppnn + n^4$. Et ainſi $r^4 - 2pprr - 2nnrr - 8pnrr + p^4$
b. 21. 1. $+ 2ppnn + n^4$ doit ſurpaſſer zéro. D'où il eſt aiſé de conclurre [b] que le quarré rr doit encore ſurpaſſer $pp + nn + 4pn + 2\sqrt{2p^3n + 2pn^3 + 4ppnn}$. Et en effet, ſi on prenoit 2 pour p, & 1 pour n ; le quarré rr ſurpaſſeroit néceſſairement 25, & l'arbitraire r ſurpaſſeroit 5. Et ſi on vouloit prendre au juſte 5 pour r ; la grandeur z ſeroit égale à rien. Et ſi r étoit moindre que 5 ; la grandeur z ſeroit moindre que rien.

1ere *ſuppoſition* $\{z + y + x = vv$. 2e $\{z + y = tt$. 3e $\{z + x = ss$. 4e $\{y + x = rr$.

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} r.\ p.\ n.\ \textit{arbitraires}.\ v = \frac{rr + pp + nn}{2p + 2n}.\ t = v - p.\ s = v - n. \\ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z = tt + ss - vv.\ 2^{e}\ y = vv - ss.\ 3^{e}\ x = vv - tt. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} p = 2.\ n = 1.\ r = 11.\ v = 21.\ t = 19.\ s = 20.\ \{z = 320.\ y = 41.\ x = 80. \\ \textit{Quarrez}.\ z + y + x = 441.\ z + y = 361.\ z + x = 400.\ y + x = 121. \end{array}\right.$$

VIII QUESTION.

18. *Pour trouver trois grandeurs, dont la ſomme & les trois différences ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére des grandeurs, & y la ſeconde, & x la troiſiéme ; & v le côté du quarré $z + y + x$, & t le côté du ſecond $z - y$, & s le côté du troiſiéme $z - x$. La premiére égalité ſera $z + y + x = vv$. Et $z = vv - y - x$. Et la ſeconde $z - y = tt$. Ou $z = tt + y = vv - y - x$. Et $x = vv - tt - 2y$. Et la troiſiéme égalité ſera $z - x = ss$. Ou $z = ss + x = vv - y - x$. Et $2x = vv - ss - y$. Et $x = \frac{vv - ss - y}{2} = vv - tt - 2y$. Et multipliant par 2 de part & d'autre, on aura l'égalité $vv - ss - y = 2vv - 2tt - 4y$. Ou $3y = vv - 2tt + ss$. Et pour remplir la derniére condition, il faut que le reſte ou la différence $y - x$ ou ſa valeur $ss - tt = 3y - vv + tt$ ſoit un quarré parfait. Nommant donc ſon côté $r - s$ ou $s - r$; l'égalité ſera $rr - 2rs + ss = ss - tt$. Ou $2rs = rr + tt$. Et $s = \frac{rr + tt}{2r}$. Et les trois grandeurs v, t, r, ſont arbitraires. Mais comme $y - x$ eſt poſitive; la grandeur y ou ſa valeur $\frac{vv - 2tt + ss}{3}$ ſurpaſſe la grandeur x ou $\frac{vv + tt - 2ss}{3}$, qui en eſt la valeur. Et par conſéquent la grandeur s ou ſa valeur $\frac{rr + tt}{2r}$ ſurpaſſe l'arbitraire t. Et les deux r & t ſont[b] différentes. Et le quarré vv ſurpaſſant chacun des trois autres; l'arbitraire v ſurpaſſe s ou ſa valeur $\frac{rr + tt}{2r}$. Mais la grandeur x ſera poſitive, ſi $vv + tt$ ſurpaſſe $2ss$ ou ſa valeur $\frac{r^4 + 2rrtt + t^4}{2rr}$. Et multipliant de part & d'autre par $2rr$, le produit $2vvrr + 2ttrr$ ſurpaſſera $r^4 + 2rrtt + t^4$. Et $2vvrr$ ſurpaſſera $r^4 + t^4$. Et par conſéquent le quarré vv doit ſurpaſſer $\frac{r^4 + t^4}{2rr}$. Et ſi on veut multiplier les grandeurs z, y, x, par le quarré du commun dénominateur 3 de leurs différentes valeurs; les produits réſoûdront la queſtion par entiers. Et on pourra toûjours appliquer la même obſervation aux réſolutions, où les ſommes & les différences de diverſes grandeurs doivent former des quarrez parfaits. Et lorſqu'on aura une réſolution par entiers, les produits des grandeurs par tels quarrez qu'on voudra, en fourniront toûjours d'autres, qui réſoûdront de nouveau la queſtion par entiers. b. 23. 1.

Suppoſitions.

$\{ z + y + x \propto vv.$ $\{ z - y \propto tt.$ $\{ z - x \propto ss.$ $\{ y - x \propto ss - 2rs + rr \propto ss - tt.$

Réſolution infinie.

$v.\ t.\ r.$ *arbitraires.* $\{ s \propto \frac{rr + tt}{2r}.$

1^{ere} *grandeur* $z \propto \frac{vv + tt + ss}{3}$. 2^e $y \propto \frac{vv - 2tt + ss}{3}$. 3^e $x \propto \frac{vv + tt - 2ss}{3}$.

Exemple. $t \propto 3.\ r \propto 1.\ v \propto 7.\ s \propto 5.\ \{ z \propto \frac{83}{3}.\ y \propto \frac{56}{3}.\ x \propto \frac{8}{3}.$
Quarrez. $z + y + x \propto 49.\ z - y \propto 9.\ z - x \propto 25.\ y - x \propto 16.$

Autre réſolution. 1^{ere} *grandeur* $z \propto 249.$ 2^e $y \propto 168.$ 3^e $x \propto 24.$
Quarrez. $z + y + x \propto 441.\ z - y \propto 81.\ z - x \propto 225.\ y - x \propto 144.$

IX QUESTION.

PREMIER CAS.

19. *Pour trouver trois grandeurs, telles que la ſomme entière & chacune des ſommes alternatives ayant receu une grandeur connuë, les nouvelles ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la première grandeur, & la ſeconde y, & x la troiſiéme, & a la grandeur connuë que les ſommes alternatives & la ſomme entiére reçoivent; & v le côté du premier quarré $z + y + x + a$, & t le

côté du ſecond $z + y + a$, & s le côté du troiſiéme $z + x + a$, & r le côté du quatriéme $y + x + a$. La premiére égalité $z + y + x + a \propto vv$ fournira une valeur $z \propto vv - y - x - a$. Et la ſeconde $z + y + a \propto tt$ une valeur $z \propto tt - y - a \propto vv - y - x - a$. Et $x \propto vv - tt$. Et la troiſiéme $z + x + a \propto ss$ fournit encore une valeur $z \propto ss - x - a \propto vv - y - x - a$. Et $y \propto vv - ss$. Et la quatriéme égalité eſt $rr \propto y + x + a$. Où mettant pour y ſa valeur $vv - ss$, & pour x la ſienne $vv - tt$, on aura le quarré $rr \propto 2vv - tt - ss + a$. C'eſt pourquoi ſi on prend $v - p$ pour s, & $v - n$ pour t; le même quarré rr ou $2vv - tt - ss + a$ fournira l'égalité $rr \propto 2pv + 2nv - pp - nn + a$. Ou $2pv + 2nv \propto rr + pp + nn - a$. Et $v \propto \frac{rr + pp + nn - a}{2p + 2n}$. Et afin que la grandeur v ou ſa valeur entiérement découverte ſoit plus grande que chacune des arbitraires n & p; il faut que le numérateur $rr + pp + nn - a$ ſurpaſſe chacune des grandeurs $2pn + 2nn$ & $2pp + 2pn$; ou que le quarré rr ſurpaſſe chacune des deux grandeurs $2pn + nn + a - pp$ & $2pn + pp + a - nn$. Et pour faire en ſorte que z ou ſa valeur $ss + tt - vv - a$ ſoit poſitive, il faut que la grandeur $ss + tt$ ſurpaſſe $vv + a$. Ou prenant les valeurs, & laiſſant leur commun dénominateur; il faut que les quarrez enſemble des grandeurs $rr + pp - 2pn - nn - a$, & $rr - pp - 2pn + nn - a$ ſurpaſſent le quarré de la grandeur $rr + pp + nn - a$ plus la grandeur $4app + 8apn + 4ann$. De ſorte que $2r^4 + 2p^4 - 8pnrr + 4ppnn + 2n^4 - 4arr + 8apn + 2aa$ ſurpaſſe $r^4 + 2pprr + p^4 + 2nnrr + 2ppnn + n^4 - 2arr + 2app + 2ann + 8apn + aa$. D'où il eſt enfin aiſé de con-
b. 21. 1. clurre, en achevant [b] les comparaiſons, que le quarré rr ſurpaſſe $pp + nn + 4pn + a + \sqrt{16ppnn + 8p^3n + 8pn^3 + 8apn + 4app + 4ann}$.

Suppoſitions.

$\{z + y + x + a \propto vv. \ \{z + y + a \propto tt. \ \{z + x + a \propto ss. \ \{y + x + a \propto rr.$

Réſolution infinie.

$$\begin{cases} r.\ p.\ n.\ \textit{arbitraires.}\ v \propto \frac{rr + pp + nn - a}{2p + 2n}.\ t \propto v - n.\ s \propto v - p. \\ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto ss + tt - vv - a.\ 2^{e}\ y \propto vv - ss.\ 3^{e}\ x \propto vv - tt. \end{cases}$$

Exemple.

$$\begin{cases} a \propto 3.\ r \propto 10.\ p \propto 2.\ n \propto 1.\ \{v \propto 17.\ t \propto 16.\ s \propto 15.\ \{z \propto 189.\ y \propto 64.\ x \propto 33. \\ z + y + x + 3 \propto 289.\ z + y + 3 \propto 256.\ z + x + 3 \propto 225.\ y + x + 3 \propto 100. \end{cases}$$

SECOND CAS.

20. *ET ſi on ôte la grandeur connuë de la ſomme entiére des trois grandeurs, & de chacune de leurs ſommes alternatives; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

On trouvera la réſolution par la même voie que la précédente. Et il n'y aura qu'à changer dans le modéle tous les ſignes des parties, où ſe trouve la la grandeur connuë a. Et le quarré arbitraire rr surpassera chacune des grandeurs $2pn + nn - a - pp$ & $2pn + pp - a - nn$. Et il surpassera encore la grandeur $pp + nn + 4pn - a + \sqrt{16ppnn + 8p^3n + 8pn^3 - 8apn - 4app - 4ann}$. Mais a peut surpasser $rr + pp + nn$.

Suppositions.

$z + y + x - a \propto vv$. $z + y - a \propto tt$. $z + x - a \propto ss$. $y + x - a \propto rr$.

Résolution infinie.

r. p. n. arbitraires. $v \propto \dfrac{rr + pp + nn + a}{2p + 2n}$. $t \propto v - n$. $s \propto v - p$.
1ere *grandeur* $z \propto ss + tt - vv + a$. 2e $y \propto vv - ss$. 3e $x \propto vv - tt$.

Exemple.

$a \propto 3$. $r \propto 11$. $p \propto 4$. $n \propto 2$. $v \propto 12$. $t \propto 10$. $s \propto 8$. $z \propto 23$. $y \propto 80$. $x \propto 44$.
$z + y + x - a \propto 144$. $z + y - a \propto 100$. $z + x - a \propto 64$. $y + x - a \propto 121$.

X QUESTION.

21. *POur trouver trois grandeurs en proportion arithmétique continuë, & dont les sommes alternatives soient chacune un quarré parfait.*

Ayant nommé z la moindre des trois grandeurs, & y la différence de la proportion arithmétique continuë ; la moyenne sera $z + y$, & la plus grande $z + 2y$. Et les trois sommes alternatives de ces trois grandeurs seront $2z + y$, $2z + 2y$, $2z + 3y$. C'est pourquoi nommant x le côté du premier de ces trois quarrez, & v le côte du second, & t le côté du troisiéme; la premiére égalité sera $2z + y \propto xx$. Ou $2z \propto xx - y$. Et la seconde $2z + 2y \propto vv$. Ou $2z \propto vv - 2y \propto xx - y$. Et $y \propto vv - xx$. Et la troisiéme sera $2z + 3y \propto tt$. Ou $2z \propto tt - 3y \propto vv - 2y$. Et $y \propto tt - vv \propto vv - xx$. Et $tt + xx \propto 2vv$. Et le côté v surpasse le côté x. Et le côté t surpasse le côté v. C'est pourquoi prenant $v + s$ pour t, & $v - r$ pour x; l'égalité $tt + xx \propto 2vv$ sera $2vv + 2sv - 2rv + ss + rr \propto 2vv$. Ou $2rv - 2sv \propto ss + rr$. Et $v \propto \dfrac{ss + rr}{2r - 2s}$. Et l'arbitraire r surpasse l'arbitraire s. Et afin que la grandeur v ou sa valeur $\dfrac{ss + rr}{2r - 2s}$ puisse surpasser r, parcequ'on a supposé $x \propto v - r$; aprés avoir multiplié de part & d'autre par $2r - 2s$, le numérateur $ss + rr$ surpassera $2rr - 2rs$. Et le quarré ss surpassera $rr - 2rs$. Et par [b] conséquent l'arbitraire r est moindre que la grandeur $s + s\sqrt{2}$. Et afin que z soit positive, il faut encore que le quar- b. 21. 1.
ré tt, plus grand que le quarré vv, soit moindre que les deux ensemble xx & vv. Ou prenant les valeurs, & laissant le dénominateur qui leur est commun, il faut que le quarré $s^4 - 2ssrr + r^4 - 4rs^3 + 4r^3s + 4rrss$ soit moindre que les deux ensemble $s^4 - 2ssrr + r^4 + 4rs^3 - 4r^3s + 4rrss$ & $s^4 + 2ssrr + r^4$, ou par transposition, que le quarré seul $s^4 + 2ssrr + r^4$ surpasse $8r^3s - 8rs^3$. Mais parceque cette égalité est trop

compoſée, pour en donner ici la réſolution ; on réſervera à en parler ailleurs. Et néanmoins pour ne rien laiſſer ici, qui ne ſoit pleinement éclairci ; on remarquera que le quarré $s^4 + 2ssrr + r^4$ ſurpaſſe néceſſairement $8r^3s - 8rs^3$, puiſque l'arbitraire r eſt moindre que $s + s\sqrt{2}$, & qu'elle eſt moindre à plus forte raiſon que la ſeule arbitraire s. De ſorte que $8r^3s$ vaut moins que $8r^3s$; ce qui eſt cauſe que la grandeur $8r^3s - 8rs^3$ eſt négative, au lieu que le quarré $s^4 + 2ssrr + r^4$ eſt toûjours poſitif.

Suppoſitions.

$$\{ \div\ z.\ z+y.\ z+2y.\ \{ 2z+y \propto xx.\ \{ 2z+2y \propto vv.\ \{ 2z+3y \propto tt.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} r.\ s.\ \textit{arbitraires.}\ \{ v \propto \dfrac{ss+rr}{2r-2s}.\ t \propto v+s.\ x \propto v-r.\ y \propto tt-vv. \\ z \propto \dfrac{xx+vv-tt}{2}.\ z+y \propto \dfrac{xx-vv+tt}{2}.\ z+2y \propto \dfrac{xx-3vv+3tt}{2}. \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} s \propto 16.\ r \propto 20.\ v \propto 82.\ t \propto 98.\ x \propto 62.\ y \propto 2880.\ \{ z \propto 482.\ z+y \propto 3362. \\ z+2y \propto 6242.\ \{ \textit{Quarrez.}\ 2z+y \propto 3844.\ 2z+2y \propto 6724.\ 2z+3y \propto 9604. \end{array} \right.$$

XI QUESTION.

22. *Pour trouver trois grandeurs en proportion géométrique continuë, & telles que la moyenne étant ajoûtée à chacune des extrêmes, les deux ſommes ſoient un quarré parfait.*

b. 1ere partie. 2. 11.

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y ; la troiſiéme [b] eſt $\frac{yy}{z}$. Et ſi on prend x pour côté du premier quarré $z + y$, & v pour côté du ſecond $y + \frac{yy}{z}$; la premiére égalité $z + y \propto xx$ fournira une valeur $z \propto xx - y$. Et la ſeconde égalité ſera $y + \frac{yy}{z} \propto vv$. Ou $zy + yy \propto vvz$. Et $vvz - zy \propto yy$. Et $z \propto \frac{yy}{vv - y} \propto xx - y$. Et multipliant de part & d'autre par $vv - y$, l'égalité ſera $yy \propto vvxx - vvy - xxy + yy$. Ou $vvy + xxy \propto vvxx$. Et $y \propto \frac{vvxx}{vv + xx}$. Et les deux grandeurs v & x ſont arbitraires. Et ſi on veut multiplier chacune des grandeurs par le quarré du dénominateur qui leur eſt commun ; la queſtion ſera réſoluë par entiers.

Suppoſitions.

$$\textit{Proportion}\ \{ z.\ y :: y.\ \frac{yy}{z}.\ \textit{Quarrez}\ \{ z+y \propto xx.\ \{ y+\frac{yy}{z} \propto vv.$$

Réſolutions.

$$\left\{ \begin{array}{l} v.\ x.\ \textit{arbitraires.}\ \{ z \propto \dfrac{x^4}{vv+xx}.\ y \propto \dfrac{vvxx}{vv+xx}.\ \dfrac{yy}{z} \propto \dfrac{v^4}{vv+xx}. \\ \textit{Par entiers.}\ \{ z \propto vvx^4 + x^6.\ y \propto v^4xx + vvx^4.\ \dfrac{yy}{z} \propto v^6 + v^4xx. \end{array} \right.$$

Exemple.

$\{ x \propto 1.\ v \propto 2.\ \{ z \propto 5.\ y \propto 20.\ \frac{yy}{z} \propto 80.\ \{ z + y \propto 25.\ y + \frac{yy}{z} \propto 100.$

XII QUESTION.

23. *POur trouver trois grandeurs en proportion géométrique continuë, & telles que leurs trois différences soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la plus grande des trois, & y la moyenne, & x la plus petite; les trois différences $z - y$, $z - x$, $y - x$, seront des quarrez parfaits. Nommant donc v le côté du premier quarré, & t le côté du second, & s le côté du troisiéme; la première égalité sera $z - y \propto vv$. Ou $z \propto vv + y$. Et la seconde $z - x \propto tt$. Ou $z \propto tt + x \propto vv + y$. Et $y \propto tt - vv + x$. Et la troisiéme $y - x \propto ss$. Ou $y \propto ss + x \propto tt - vv + x$. Et $ss + vv \propto tt$. Comme donc les quarrez ss & vv sont ensemble égaux au seul quarré tt; on pourra [b] prendre $rr + pp$ pour t, & $rr - pp$ pour s, & $2rp$ pour v. Et alors on aura une valeur $z \propto r^4 + 2rrpp + p^4 + x \propto tt + x$, & une autre $y \propto r^4 - 2rrpp + p^4 + x$. Et la troisiéme x doit être determinée par la condition qui reste à remplir, & qui veut que les trois grandeurs z, y, x, soient en proportion géométrique continuë. C'est pourquoi si on prend pour z & pour y les valeurs précédentes; la proportion continuë $z.\ y :: y.\ x.$ sera $\div\ r^4 + 2rrpp + p^4 + x.\ r^4 - 2rrpp + p^4 + x.\ x.$ Et prenant d'une part le produit des extrêmes z & x ou $r^4 + 2rrpp + p^4 + x$ & x, & de l'autre le quarré de la moyenne y ou $r^4 - 2rrpp + p^4 + x$; ou pour abbréger prenant d'une part le produit des extrêmes z & x ou $tt + x$ & x, & de l'autre celuy des moyennes y & y ou $ss + x$ & $ss + x$; on formera une nouvelle égalité $ttx + xx \propto s^4 + 2ssx + xx$. Ou $ttx - 2ssx \propto s^4$. Et $x \propto \frac{s^4}{tt - 2ss}$. Et t ou sa valeur $rr + pp$ surpasse $s\sqrt{2}$ ou $rr\sqrt{2} - pp\sqrt{2}$. Et l'arbitraire r surpasse encore l'arbitraire p. Et si les grandeurs sont multipliées par le quarré de leur commun dénominateur; les produits résoûdront la question par entiers. b. 10. 3.

Suppositions.

Proportion $\{ z.\ y :: y.\ x.$ *Quarrez* $\{ z - y \propto vv.\ \{ z - x \propto tt.\ \{ y - x \propto ss.$

Résolution infinie.

$\{ r.\ p.$ *arbitraires.* $t \propto rr + pp.\ s \propto rr - pp.\ \{ x \propto \frac{s^4}{tt - 2ss}.\ y \propto ss + x.\ z \propto tt + x.$

Exemple.

$r \propto 2.\ p \propto 1.\ t \propto 5.\ s \propto 3.\ \{ x \propto \frac{81}{7}.\ y \propto \frac{144}{7}.\ z \propto \frac{256}{7}\ \{ \div\ \frac{81}{7}.\ \frac{144}{7}.\ \frac{256}{7} :: 9.\ 16.$

1er *Quarré.* $z - y \propto 16.$ 2d $z - x \propto 25.$ 3e $y - x \propto 9.$

Par entiers. $\{ x \propto 567.\ y \propto 1008.\ z \propto 1792.\ \{ \div\ 1792.\ 1008.\ 567 :: 16.\ 9.$

1er *Quarré.* $z - y \propto 784.$ 2d $z - x \propto 1225.$ 3e $y - x \propto 441.$

XIII QUESTION.

PREMIER CAS.

24. *Pour trouver trois grandeurs en proportion géométrique continuë, & telles qu'ayant ôté une grandeur connuë de chacune, les restes soient des quarrez parfaits.*

b. 1ere partie. 2. 11.

Ayant nommé zz la premiére des trois, & zy la seconde, & la [b] troisiéme yy, parceque les dénominations ordinaires donnent une égalité dont la résolution paroît trop composée ; & a la grandeur connuë. Si on prend $z - x$ ou $x - z$ pour côté du premier quarré $zz - a$, & v pour côté du second $zy - a$, & $t - y$ ou $y - t$ pour côté du troisiéme $yy - a$; La premiére égalité sera $zz - a \propto zz - 2xz + xx$. Ou $2xz \propto xx + a$. Et $z \propto \frac{xx + a}{2x}$. Et la seconde sera $zy - a \propto vv$. Ou $z \propto \frac{vv + a}{y} \propto \frac{xx + a}{2x}$. Et multipliant chaque membre par $2yx$, on trouvera $2vvx + 2ax \propto xxy + ay$. Et $y \propto \frac{2vvx + 2ax}{a + xx}$. Et la troisiéme égalité sera $tt - 2ty + yy \propto yy - a$. Ou $2ty \propto tt + a$. Et $y \propto \frac{tt + a}{2t} \propto \frac{2vvx + 2ax}{a + xx}$. Et comme dans la suitte des comparaisons, les inconnuës s'élévent encore à des degrez trop composez, on l'évitera en prenant x pour v. Et l'égalité précédente sera $y \propto \frac{tt + a}{2t} \propto \frac{2x^3 + 2ax}{a + xx} \propto 2x$. Et on en tirera une valeur $x \propto \frac{tt + a}{4t}$. Mais quoique la question soit infiniment résoluë, elle ne l'est pas néanmoins dans toute son étenduë, à cause des restrictions qui obligent à prendre deux quarrez zz & yy pour extrêmes, & à choisir $z - v$ & v pour côtez des deux premiers quarrez. Ce qui peut fournir un éxemple de la méthode la plus ordinaire de Diophante & de tous les sçavans qui ont écrit sur l'Analyse.

Suppositions.

$$\{ zz . zy :: zy . yy . \quad \{ zz - a \propto zz - 2xz + xx . \quad \{ zy - a \propto vv . \quad \{ yy - a \propto yy - 2ty + tt .$$

Résolution infinie. $\{ t$ *arbitraire.* $x \propto \frac{tt + a}{4t} . \quad \left\{ z \propto \frac{xx + a}{2x} . \quad y \propto 2x . \right.$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} a. & t. & x. & z. & y. & & \textit{Quarrez.} \\ 12. & 2. & 2. & 4. & 4. & \{ & zz - 12 \propto 4. \quad zy - 12 \propto 4. \quad yy - 12 \propto 4. \\ 12. & 4. & \frac{7}{2}. & \frac{241}{56}. & \frac{7}{2}. & \{ & zz - 12 \propto \frac{21449}{3136}. \quad zy - 12 \propto \frac{9604}{3136}. \quad yy - 12 \propto \frac{784}{3136}. \end{array} \right.$$

SECOND CAS.

25. *Et si chacun des termes de la proportion géométrique continuë reçoit la grandeur connuë; afin que les sommes soient des quarrez parfaits.*

On changera dans la résolution précédente les signes des parties où la connuë a se rencontre. Et l'arbitraire t surpassera $\sqrt{a}$. Et x ou sa valeur

$\frac{tt - a}{4t}$ ſurpaſſera encore $\sqrt{a}$. Et multipliant de part & d'autre par $4t$, le numérateur $tt - a$ ſurpaſſera $4t\sqrt{a}$. Et t par conſéquent ſurpaſſera $2\sqrt{a} + \sqrt{5a}$.

Suppoſitions.

$$\{ zz . zy :: zy . yy. \{ zz + a \propto zz - 2xz + xx. \{ zy + a \propto vv. \{ yy + a \propto yy - 2ty + tt.$$

Réſolution infinie. $\{ t$ *arbitraire.* $x \propto \frac{tt - a}{4t}. \{ z \propto \frac{xx - a}{2x}. \; y \propto 2x.$

Exemple.

Quarrez.

$$\left\{\begin{array}{lllll} a. & t. & x. & z. & y. \\ 1. & 5. & \frac{6}{5}. & \frac{11}{60}. & \frac{12}{5}. \end{array}\right. \{ zz + 1 \propto \frac{3721}{3600}. \; zy + 1 \propto \frac{5184}{3600}. \; yy + 1 \propto \frac{24336}{3600}.$$

XIV QUESTION.

26. P*Our trouver trois grandeurs, dont les plans alternatifs ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & x la troiſiéme; & v le côté du premier quarré, & t le côté du ſecond, & s le côté du troiſiéme; la premiére égalité ſera $zy \propto vv$. Ou $z \propto \frac{vv}{y}$. Et la ſeconde $zx \propto tt$. Ou $z \propto \frac{tt}{x} \propto \frac{vv}{y}$. Et $tty \propto vvx$. Et $y \propto \frac{vvx}{tt}$. Et la troiſiéme égalité ſera $yx \propto ss$. Ou $y \propto \frac{ss}{x} \propto \frac{vvx}{tt}$. Et $sst \propto vvxx$. Et $st \propto vx$ Et $x \propto \frac{st}{v}$. Et les grandeurs v, t, s, ſont arbitraires.

Suppoſitions. *Réſolution infinie.*

$$\{ zy \propto vv. \; zx \propto tt. \; yx \propto ss. \{ v. \; t. \; s. \text{ arbitraires. } \{ z \propto \frac{tv}{s}. \; y \propto \frac{vs}{t}. \; x \propto \frac{ts}{v}.$$

Exemple.

$$\{ v \propto 12. \, t \propto 4. \, s \propto 6. \{ z \propto 8. \, y \propto 18. \, x \propto 2. \{ zy \propto 144. \, zx \propto 16. \, yx \propto 36.$$

XV QUESTION.

PREMIER CAS.

27. P*Our trouver trois grandeurs, dont les plans alternatifs ayant receu chacun une grandeur connuë, les ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére des trois, & la ſeconde y, & x la troiſiéme; & v le côté du premier quarré $zy + a$, & t le côté du ſecond $zx + a$, & q le côté du troiſiéme $yx + a$. La premiére égalité $zy + a \propto vv$ fournira une valeur $y \propto \frac{vv - a}{z}$. Et la ſeconde $zx + a \propto tt$ fournira auſſi une valeur $x \propto \frac{tt - a}{z}$. Et mettant pour y & pour x ces deux valeurs qu'on vient de découvrir, dans l'égalité $yx + a \propto qq$; cette même égalité ſera $\frac{vvtt - avv - att + aa + azz}{zz} \propto qq$. Et parceque le dénominateur de la fraction est un quarré zz, il suffit de faire ensorte que le numérateur $vvtt - avv - att + aa + azz$ soit un quarré parfait. Et d'abord cela seroit facile, en prenant simplement $v + t$ pour z, puisque le numérateur seroit le quarré parfait $vvtt + 2avt + aa$. Et si on prenoit même $v - t$ ou $t - v$ pour z; le numérateur seroit encore le quarré parfait $vvtt - 2avt + aa$. Et la résolution unique qu'on expose peut servir pour ces suppositions différentes, en prenant indifféremment une grandeur négative ou positive pour t. Mais si elle est positive; on la supposera plus petite que l'arbitraire v. Et l'une & l'autre de ces deux arbitraires surpassera $\sqrt{a}$.

Suppositions.

$$\{ zy + a \propto vv. \{ zx + a \propto tt. \{ yx + a \propto qq \propto \frac{vvtt - 2avt + aa}{zz}.$$

Résolution infinie.

$$\{ v.\ t.\ \textit{arbitraires}. \{ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto v - t.\ 2^{e}\ y \propto \frac{vv - a}{z}.\ 3^{e}\ x \propto \frac{tt - a}{z}.$$

Exemples.

a.	v.	t.	z.	y.	x.	*Quarrez.*		
8.	4.	3.	1.	8.	1.	$\{ zy + 8 \propto 16$.	$zx + 8 \propto 9$.	$\{ yx + 8 \propto 9$.
8.	6.	4.	2.	14.	4.	$\{ zy + 8 \propto 36$.	$zx + 8 \propto 16$.	$\{ yx + 8 \propto 64$.

Autre resolution plus vaste.

Mais pour avoir une résolution plus étenduë ou moins déterminée, on considérera que le quarré tt est multiplié par $vv - a$. De sorte qu'il sera à propos de prendre un quarré égal à $vv - a$. Et nommant son côté $v - s$ ou $s - v$, le quarré sera $vv - a \propto vv - 2vs + ss$. Et on aura l'égalité $2vs \propto ss + a$. Ou $v \propto \frac{ss + a}{2s}$. Et $s - v \propto \frac{ss - a}{2s}$. Prenant donc, afin d'abbréger, une grandeur $r \propto s - v$, ou supposant $r \propto \frac{ss - a}{2s}$; le quarré $vv - a$ sera égal au quarré rr. Et le numérateur $vvtt - avv - att + aa$ sera $rrtt - arr + azz$. Et nommant $p - rt$ ou $rt - p$ le côté de ce même quarré, on formera l'égalité $rrtt - arr + azz \propto rrtt - 2prt + pp$. Ou $2prt \propto pp + arr - azz$. Et $t \propto \frac{pp + arr - azz}{2pr}$. Et comme v ou sa valeur $\frac{ss + a}{2s}$ surpasse $\sqrt{a}$, le numérateur $ss + a$ surpasse $2s\sqrt{a}$. Et
b. 23. 1. l'arbitraire s par conséquent [b] surpasse $\sqrt{a}$. Et parceque t ou sa valeur $\frac{pp + arr - azz}{2pr}$ surpasse encore $\sqrt{a}$; le numérateur $pp + arr - azz$ surpasse $2pr\sqrt{a}$. Et p par conséquent surpasse $r\sqrt{a} + z\sqrt{a}$. Et il faut encore que $pp + arr$ surpasse azz, afin que le côté t soit réel. De sorte que l'arbitraire r surpasse encore $\sqrt{zz - \frac{pp}{a}}$.

Suppositions.

$$\{ zy + a \propto vv. \{ zx + a \propto tt. \{ yx + a \propto qq \propto \frac{rrtt - 2prt + pp}{zz}.$$

Résolution infinie. $\left\{ \begin{array}{l} z.\ p.\ s.\ \textit{arbitraires.}\ r \propto \dfrac{ss - a}{2s}.\ v \propto \dfrac{ss + a}{2s}. \\ t \propto \dfrac{pp + arr - azz}{2pr}\ \{ y \propto \dfrac{vv - a}{z}.\ x \propto \dfrac{tt - a}{z}. \end{array} \right.$

Exemples.

a.	z.	p.	ſ.	r.	v.	t.	y.	x.	Quarrez.
8.	2.	12.	4.	1.	3.	5.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{17}{2}$.	$\{zy + 8 \propto 9.\ zx + 8 \propto 25.\ yx + 8 \propto \frac{49}{4}.$
192.	32.	576.	24.	8.	16.	16.	2.	2.	$\{zy + 192 \propto 256.\ zx + 192 \propto 256.\ yx + 192 \propto 196.$
192.	44.	1056.	4.	22.	26.	18.	11.	3.	$\{zy + 192 \propto 676.\ zx + 192 \propto 324.\ yx + 192 \propto 225.$

SECOND CAS.

28. *ET si on ôte la grandeur connuë de chacun des trois produits alternatifs; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On n'aura qu'à changer les signes dans la résolution précédente pour toutes les parties où la grandeur connuë a se rencontrera. Et l'arbitraire r sera moindre que $\sqrt{zz + \frac{pp}{a}}$. Et l'arbitraire s surpassera $\sqrt{a}$, si l'on veut ne rien changer dans la résolution, & que le côté v soit réel. Et on peut encore former une autre résolution comme au cas précédent.

Suppositions. $\{ zy - a \propto vv.\ \{ zx - a \propto tt.\ \{ yx - a \propto qq \propto \dfrac{rrtt - 2prt + pp}{zz}.$

Résolution infinie. $\left\{ \begin{array}{l} z.\ p.\ s.\ \textit{arbitraires.}\ r \propto \dfrac{ss + a}{2s}.\ v \propto \dfrac{ss - a}{2s}. \\ t \propto \dfrac{pp - arr + azz}{2pr}.\ \{ y \propto \dfrac{vv + a}{z}.\ x \propto \dfrac{tt + a}{z}. \end{array} \right.$

Exemples.

a.	z.	p.	ſ.	r.	v.	t.	y.	x.	Quarrez.
8.	6.	6.	4.	3.	1.	7.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{19}{2}$.	$\{zy - 8 \propto 1.\ zx - 8 \propto 49.\ yx - 8 \propto \frac{25}{4}.$
40.	1.	32.	10.	7.	3.	2.	49.	44.	$\{zy - 40 \propto 9.\ zx - 40 \propto 4.\ yx - 40 \propto 2116.$

Autre résolution infinie.

$\{ v.\ t.\ \textit{arbitraires.}\ \{ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto v - t.\ 2^{e}\ y \propto \dfrac{vv + a}{z}.\ 3^{e}\ x \propto \dfrac{tt + a}{z}.$

Exemples.

a.	v.	t.	z.	y.	x.	Quarrez.		
40.	2.	1.	1.	44.	41.	$\{zy - 40 \propto 4.$	$zx - 40 \propto 1.$	$yx - 40 \propto 1764.$
40.	3.	2.	1.	49.	44.	$\{zy - 40 \propto 9.$	$zx - 40 \propto 4.$	$yx - 40 \propto 2116.$
40.	4.	2.	2.	28.	22.	$\{zy - 40 \propto 16.$	$zx - 40 \propto 4.$	$yx - 40 \propto 576.$

XVI QUESTION.

PREMIER CAS.

29. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacune étant ajoûtée au plan des deux autres, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Si on employe les dénominateurs ordinaires ; la comparaison des égalitez portera les inconnuës à des degrez trop élevez. On cherchera donc quelque moyen d'abbréger, & de faciliter la résolution, nommant par exemple la premiére z, & la seconde $z + 2y$, & la troisiéme yy, afin que le plan $zz + 2zy$ des deux premiéres ayant receu la troisiéme yy remplisse une des conditions, en fournissant un quarré parfait $zz + 2zy + yy$ pour la somme. Et si on multiplie la premiére z par la troisiéme yy, & qu'on ajoûte au plan zyy la seconde $z + 2y$, il faut que la somme $zyy + z + 2y$ forme un quarré tt. Ce qui fournit une égalité $zyy + 1z \infty tt - 2y$. Ou $z \infty \frac{tt - 2y}{yy + 1}$. Et si on multiplie la seconde $z + 2y$ par la troisiéme yy, & qu'on ajoûte au produit $zyy + 2y^3$ la premiére z ; la somme $zyy + 2y^3 + z$ formera encore un quarré vv. Et on aura l'égalité $zyy + 1z \infty vv - 2y^3$. Ou $z \infty \frac{vv - 2y^3}{yy + 1} \infty \frac{tt - 2y}{yy + 1}$. Et ôtant le commun dénominateur $yy + 1$; l'égalité sera $vv - 2y^3 \infty tt - 2y$. Ou $vv \infty tt + 2y^3 - 2y$. Et prenant $t + s$ pour v ; on aura le même quarré vv ou $tt + 2y^3 - 2y \infty tt + 2ts + ss$. Et $2ts \infty 2y^3 - 2y - ss$. Et $t \infty \frac{2y^3 - 2y - ss}{2s}$. Et les deux grandeurs y & s sont arbitraires. Et afin que z ou sa valeur $\frac{tt - 2y}{yy + 1}$ soit positive, il faut que t ou sa valeur $\frac{2y^3 - 2y - ss}{2s}$ surpasse $\sqrt{2y}$, ou que $2y^3 - 2y - ss$ surpasse $2s\sqrt{2y}$. Et par conséquent ss vaut moins que $2y^3 - 2y - 2s\sqrt{2y}$. Et l'arbitraire s est plus petite que $- \sqrt{2y} + \sqrt{2y^3}$. Et la même s sera moindre encore que $\sqrt{2y^3 - 2y}$, si on veut se régler sur le modéle qu'on expose ici, & que t soit réel. On suppose y plus grande que l'unité.

Grandeurs.	*1er Quarré.*	*2d Quarré.*	*3e Quarré.*
$z.\ z + 2y.\ yy.$	$zz + 2zy + yy.$	$zyy + z + 2y \infty tt.$	$zyy + 2y^3 + z \infty vv.$

Résolution infinie.

$\{s.\ y.$ *arbitraires.* $t \infty \frac{2y^3 - 2y - ss}{2s}.\ v \infty t + s.\ \{z \infty \frac{tt - 2y}{yy + 1}.$

Exemples.

$s.$	$y.$	$t.$	$v.$	$z.$	$z + 2y.$	$yy.$	*Quarrez.*			*Côtez.*		
4.	3.	4.	8.	1.	7.	9.	16.	16.	64.	4.	4.	8.
2.	3.	11.	13.	$\frac{23}{2}$.	$\frac{35}{2}$.	9.	$\frac{841}{4}$.	121.	169.	$\frac{29}{2}$.	11.	13.

SECOND

SECOND CAS.

30. *ET si chacune des grandeurs est retranchée du plan des deux autres, afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Comme les dénominations ordinaires donnent des égalitez, dont les inconnuës s'élevent à des degrez trop hauts; on pourra tenter en cette sorte un moyen plus court de résoûdre la question. Ayant nommé z la premiére grandeur, & $z + y$ la seconde; leur plan est $zz + zy$. Et si on ôte de ce plan la partie zy; le reste zz est un quarré parfait. C'est pourquoi si on nomme zy la troisiéme grandeur, on aura déja satisfait à la premiére des trois conditions; puisque le produit des deux premiéres z & $z + y$ moins la troisiéme zy donne un quarré zz. Et prenant, pour remplir la seconde, le plan de la premiére z par la troisiéme zy moins la seconde $z + y$, il faudra que le reste $zzy - z - y$ soit un quarré parfait. Et si on ôte enfin la premiére z du plan des deux autres $z + y$ & zy, il faudra encore que le reste $zzy + zyy - z$ soit un quarré parfait. De sorte qu'il faudra résoûdre une double égalité $zzy + zyy - z$ & $zzy - z - y$. Et parceque rien n'est déterminé; si on veut supposer un quarré ss pour y, les deux quarrez seront $zzss + 1zs^4 - 1z$ & $zzss - 1z - ss$. Et si l'arbitraire s surpasse l'unité; on rapportera la résolution au quatriéme cas de la dixiéme question.

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Grandeurs.}\\ z.\ z + y.\ zy.\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}1^{er}\ \textit{Quarré.}\\ zz + zy - zy.\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}2^{d}\ \textit{Quarré.}\\ zzy - z - y \propto vv.\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}3^{e}\ \textit{Quarré.}\\ zzy + zyy - z \propto tt.\end{array}\right.$$

$$\textit{Résolution infinie.}\ \{ s\ \textit{arbitraire.}\ y \propto ss.\ z \propto \frac{s^8 + 8s^4 + 16}{8s^6 - 48ss}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s.\ y.\ \{z.\ z + y.\ zy. \\ 2.\ 4.\ \left\{\frac{5}{4}.\ \ \frac{21}{4}.\ \ 5.\right. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \textit{Quarrez.} \\ \{zz \propto \frac{25}{16}.\ zzy - z - y \propto 1.\ \{zzy + zyy - z \propto 25. \end{array}$$

XVII QUESTION.

31. *POur trouver trois grandeurs, telles qu'ayant ajoûté chacun de leurs quarrez au plan des deux autres, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Les inconnuës s'élevant à des dimensions trop hautes, si on se sert des dénominations ordinaires; on pourra trouver d'abord une résolution assez simple pour deux des conditions. Car si on prend z pour la premiére des grandeurs, & y pour la seconde, & $4z + 4y$ pour la troisiéme; le plan de la premiére z par la troisiéme $4z + 4y$ recevant le quarré de la seconde y, fournira un quarré $4zz + 4zy + yy$ de $2z + y$. Et le plan de la seconde y par la troisiéme $4z + 4y$ recevant le quarré de la premiére z, fournira encore un quarré $zz + 4zy + 4yy$ de $z + 2y$. Et pour remplir la condition qui reste, il faudra que le plan des deux z & y recevant le quarré de la troisiéme $4z + 4y$, forme un quarré parfait égal à $16zz + 33zy + 16yy$. Ce qui sera facile. Car ayant pris $x - 4z$ pour côté du quarré, on aura l'égalité $xx - 8zx + 16zz \propto 16zz + 33zy + 16yy$. Ou $33zy + 8zx \propto xx - 16yy$. Et $z \propto \frac{xx - 16yy}{8x + 33y}$. Et les deux grandeurs x & y sont arbitraires. Mais x surpasse $4y$.

1er *Quarré.*	2d *Quarré.*	3e *Quarré.*
$4zz + 4zy + yy$.	$zz + 4zy + 4yy$.	$16zz + 33zy + 16yy \propto 16zz - 8zx + xx$.

Résolution infinie.

{ y. x. *arbitraires.* { 1ere *grandeur* $z \propto \frac{xx - 16yy}{8x + 33y}$. 2e y. 3e $4z + 4y$.

Exemple.

x.	y.	z.	y.	$4z + 4y$.	*Quarrez.*			$2z + y$.	$2y + z$.	$x - 4z$.
5.	1.	$\frac{9}{73}$.	1.	$\frac{328}{73}$.	$\frac{8281}{5329}$.	$\frac{24025}{5329}$.	$\frac{108241}{5329}$.	$\frac{91}{73}$.	$\frac{155}{73}$.	$\frac{329}{73}$.

XVIII QUESTION.

PREMIER CAS.

52. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacun des plans alternatifs recevant ses deux côtez; les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde, & x la troisiéme; & v le côté du premier quarré, & t le côté du second, & f le côté du troisiéme; La premiére égalité sera $zy + z + y \propto vv$. Et $z \propto \frac{vv - y}{y + 1}$. Et la seconde sera $zx + z + x \propto tt$. Et $z \propto \frac{tt - x}{x + 1} \propto \frac{vv - y}{y + 1}$. Et multipliant en croix les numérateurs par les dénominateurs, c'est à dire $tt - x$ par $y + 1$, & $vv - y$ par $x + 1$; on aura l'égalité $tty - xy + tt - x \propto vvx - xy + vv - y$. Ou $vvx + 1x \propto tty + tt + y - vv$. Et $x \propto \frac{tty + tt + y - vv}{vv + 1}$. Et la troisiéme supposition fournira à son tour l'égalité $yx + y + x \propto ff$. Ou $x \propto \frac{ff - y}{y + 1} \propto \frac{tty + tt + y - vv}{vv + 1}$. Et les deux membres étant multipliez par $y + 1$, & les produits égaux par $vv + 1$; l'égalité sera $ffvv - vvy + ff - y \propto ttyy + tty + yy - vvy + tty + tt + y - vv$. Ou $ttyy + 1yy + 2tty + 2y \propto vvff + vv + ff - tt$. Et divisant par $tt + 1$; elle sera $yy + 2y \propto \frac{vvff + vv + ff - tt}{tt + 1}$. Et ajoûtant 1 de part & d'autre, & tirant ensuitte les racines quarrées, & ordonnant encore l'égalité selon la coûtume ordinaire, on trouvera une valeur $y \propto -1 + \sqrt{\frac{vvff + vv + ff + 1}{tt + 1}}$. De sorte que la grandeur

$\frac{vvss + vv + ss + 1}{tt + 1}$ renfermée sous le signe doit être un quarré parfait. Et comme son premier terme est un produit des grandeurs $vv + 1$ & $ss + 1$; il est visible que si l'une & l'autre est un quarré parfait, & que le numérateur $tt + 1$ soit encore un quarré; la grandeur renfermée sous le signe sera nécessairement un quarré. Prenant donc $r - v$ pour côté du quarré $vv + 1$, & $p - s$ pour côté du quarré $ss + 1$, & $n - t$ pour côté du quarré $tt + 1$; on trouvera $2rv = rr - 1$, ou $v = \frac{rr - 1}{2r}$; & $2ps = pp - 1$, ou $s = \frac{pp - 1}{2p}$; & $2nt = nn - 1$, ou $t = \frac{nn - 1}{2n}$. Et chacune des arbitraires r, p, n, surpassera l'unité, afin que les côtez s, t, v, puissent être réels, & qu'il n'y ait rien à changer au modéle qu'on expose.

1ere *supposition* $\{zy + z + y = vv$. 2e $\{zx + z + x = tt$. 3e $\{yx + y + x = ss$.

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} n.\ p.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ v = \frac{rr - 1}{2r}.\ t = \frac{nn - 1}{2n}.\ s = \frac{pp - 1}{2p}. \\ y = -1 + \frac{npprr + npp + nrr + 1n}{2nnpr + 2pr}.\ z = \frac{vv - y}{y + 1}.\ x = \frac{ss - y}{y + 1}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} n = \frac{7}{2}.\ r = 3.\ p = 2.\ \{v = \frac{4}{3}.\ s = \frac{3}{4}.\ t = \frac{45}{28}.\ \{y = \frac{16}{159}.\ z = \frac{32}{21}.\ x = \frac{47}{112}. \\ \textit{Quarrez.}\ \{zy + z + y = \frac{16}{9}.\ zx + z + x = \frac{2025}{784}.\ yx + y + x = \frac{9}{16}. \end{array}\right.$$

AUTRE RESOLUTION.

Et si on veut se contenter de supposer d'abord $vv + 1 = vv - 2vr + rr$. Ou $v = \frac{rr - 1}{2v}$; il faudra que $\frac{ss + 1}{tt + 1}$ soit un quarré mm. De sorte qu'ayant multiplié les membres par $tt + 1$, l'égalité sera $ttmm + 1mm = ss + 1$. Ou $ttmm + 1mm - 1 = ss$. Et prenant $l - tm$ pour s, on aura une autre égalité $ttmm + 1mm - 1 = ttmm - 2ltm + ll$. Et $2ltm = ll - mm + 1$. Ou $t = \frac{ll - mm + 1}{2lm}$.

1ere *supposition* $\{zy + z + y = vv$. 2e $\{zx + z + x = tt$. 3e $yx + y + x = ss$.

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} l.\ m.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ v = \frac{rr - 1}{2r}.\ t = \frac{ll - mm + 1}{2lm}.\ s = l - tm. \\ y = -1 + \sqrt{\frac{vvss + vv + ss + 1}{tt + 1}}.\ z = \frac{vv - y}{y + 1}.\ x = \frac{ss - y}{y + 1}. \end{array}\right.$$

Premier éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} r \propto 2.\ l \propto 6.\ m \propto 1.\ \{t \propto 3.\ s \propto 3.\ v \propto \frac{3}{4}.\ \{y \propto \frac{1}{4}.\ z \propto \frac{1}{4}.\ x \propto 7. \\ \textit{Quarrez.}\ \{zy + z + y \propto \frac{9}{16}.\ zx + z + x \propto 9.\ yx + y + x \propto 9. \end{array}\right.$$

Second éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} r \propto 3.\ l \propto 3.\ m \propto 2.\ \{v \propto \frac{4}{3}.\ t \propto \frac{1}{2}.\ s \propto 2.\ \{y \propto \frac{7}{3}.\ z \propto -\frac{1}{6}.\ x \propto \frac{1}{2}. \\ \textit{Quarrez,}\ \{zy + z + y \propto \frac{16}{9}.\ zx + z + x \propto \frac{1}{4}.\ yx + y + x \propto 4. \end{array}\right.$$

Troisiéme résolution.

Et si dans les résolutions précédentes, on prend $rr + 1r + 1$ pour v, & $2rr + 1r + 2$ pour s, & $2rr + 3r + 3$ pour t; on trouvera rr pour y, & $rr + 2r + 1$ pour z, & $4rr + 4r + 4$ pour x. Et l'arbitraire r n'aura point de limites.

1ere *supposition* $\{zy + z + y \propto vv.$ 2e $\{zx + z + x \propto tt.$ 3e $\{yx + y + x \propto ss.$

Résolution infinie.

$\{r$ *arbitraire.* $\{z \propto rr + 2r + 1.\ y \propto rr.\ x \propto 4rr + 4r + 4.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{cccc} r. & z. & y. & x. \\ 2. & 9. & 4. & 28. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ccc} zy + z + y. & zx + z + x. & yx + y + x. \\ 49. & 289. & 144. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \textit{Côtez.} \\ 7.\ 17.\ 12. \end{array}\right.$$

COROLLAIRE ET QUESTION XIX.

33. *ET si on veut encore ajoûter aux suppositions précédentes, que chacune des grandeurs soit un quarré parfait.*

Comme les deux z & y sont déja dans la derniére des résolutions deux quarrez parfaits $rr + 2r + 1$ & rr; il suffira pour achever pleinement la résolution que la troisiéme x ou sa valeur $4rr + 4r + 4$ soit encore un quarré, ou que son quart $rr + 1r + 1$ soit au juste un quarré. C'est pourquoi si on prend $pr - 1$ pour côté de ce même quarré; l'égalité sera $rr + 1r + 1 \propto pprr - 2pr + 1$. Ou $2pr + 1r \propto pprr - rr$. Et $r \propto \frac{2p + 1}{pp - 1}$. Et l'arbitraire p surpassera l'unité. Les inconnuës z, y, x, ne seront prises ici que pour les côtez des quarrez.

Suppositions.

$\{zzyy + zz + yy \propto vv.\ \{zzxx + zz + xx \propto tt.\ \{yyxx + yy + xx \propto ss.$

Résolution infinie.

$\{p.$ *arbitraire.* $r \propto \frac{2p + 1}{pp - 1}.\ \{z \propto \frac{pp + 2p}{pp - 1}.\ y \propto \frac{2p + 1}{pp - 1}.\ x \propto \frac{2pp + 2p + 2}{pp - 1}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} p. & zz. & yy. & xx. \\ 2. & \frac{64}{9}. & \frac{25}{9}. & \frac{196}{9}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ccc} zzyy + zz + yy. & zzxx + zz + xx. & yyxx + yy + xx. \\ \frac{2401}{81} & \frac{14884}{81}. & \frac{6889}{81} \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

34. ET *si de chacun des trois plans on ôte les côtez qui le forment, afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On suivra des voies semblables à celles qu'on a observées pour la résolution du premier cas.

1ere *supposition* $\{ zy - z - y \propto vv.$ 2e $\{ zx - z - x \propto tt.$ 3e $yx - y - x \propto ss.$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} n.\ p.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ v \propto \frac{rr - 1}{2r}.\ t \propto \frac{nn - 1}{2n}.\ s \propto \frac{pp - 1}{2p}. \\ y \propto 1 + \frac{nprr + npp + nrr + n}{2nnpr + 2pr}.\ z \propto \frac{vv + 1y}{y - 1}.\ x \propto \frac{ss + 1y}{y - 1}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} n \propto \frac{7}{2}.\ r \propto 3.\ p \propto 2.\ \{ v \propto \frac{4}{3}.\ t \propto \frac{45}{28}.\ s \propto \frac{3}{4}.\ \{ y \propto \frac{334}{159}.\ z \propto \frac{222}{63}.\ x \propto \frac{271}{112}. \\ \textit{Quarrez.}\ \{ zy - z - y \propto \frac{16}{9}.\ zx - z - x \propto \frac{2025}{784}.\ yx - y - x \propto \frac{9}{16}. \end{array}\right.$$

Autre résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} l.\ m.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ v \propto \frac{rr - 1}{2r}.\ t \propto \frac{ll - mm + 1}{2lm}.\ s \propto l - tm. \\ y \propto 1 + \sqrt{\frac{vvss + vv + ss + 1}{tt + 1}}.\ z \propto \frac{vv + 1y}{y - 1}.\ x \propto \frac{ss + 1y}{y - 1}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} r \propto 2.\ l \propto 3.\ m \propto 2.\ \{ t \propto \frac{1}{2}.\ s \propto 2.\ v \propto \frac{3}{4}.\ \{ y \propto \frac{7}{2}.\ z \propto \frac{13}{8}.\ x \propto 3. \\ \textit{Quarrez.}\ \{ zy - z - y \propto \frac{9}{16}.\ zx - z - x \propto \frac{1}{4}.\ \{ yx - y - x \propto 4. \end{array}\right.$$

Troisiéme résolution infinie.

$\{ r.$ *arbitraire.* $\{ z \propto rr + 2r + 3.\ y \propto rr + 2.\ x \propto 4rr + 4r + 6.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{llll} r. & z. & y. & x. \\ 1. & 6. & 3. & 14. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ccc} zy - z - y. & zx - z - x. & yx - y - x. \\ 9. & 64. & 25. \end{array}\right.$$

XX QUESTION.

35. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacun de leurs plans alternatifs ayant receu un quarré déterminé, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x; & pris $a + vy$ pour côté du premier quarré $zy + aa$, & $a + tz$ pour côté du second $zv + aa$; La premiére égalité sera $zy + aa \propto aa + 2avy + vvyy$. Ou $z \propto 2av + vvy$. Et la seconde sera $zx + aa \propto aa + 2atz + ttzz$. Et $z \propto \frac{x - 2at}{tt} \propto vvy + 2av$. Et $x - 2at \propto vvytt + 2avtt$. Ou $x \propto vvytt + 2avtt + 2at$. Et mettant pour x sa valeur dans la grandeur $yv + aa$, qui doit encore être un quarré parfait; ce même quarré sera $vvyytt + 2avytt + 2ayt + aa \propto vvyytt - 2svyt + ss$. Ou $2avytt + 2ayt + 2svyt \propto ss - aa$. Et $y \propto \frac{ss - aa}{2avtt + 2at + 2svt}$. Et l'arbitraire s surpasse le côté a. Cette même question est encore résoluë d'une autre maniére dans la question cinquiéme.

Suppositions.

$\{zy + aa \propto aa + 2avy + vvyy.$ $\{zx + aa \propto aa + 2atz + ttzz.$ $\{yx + aa \propto rr.$

Résolution infinie.

$s.\ t.\ v.$ *arbitraires.*

$y \propto \frac{ss - aa}{2avtt + 2at + 2svt}.$ $z \propto vvy + 2av.$ $x \propto vvtty + 2avtt + 2at.$

Exemple.

$a.$ $s.$ $t.$	$y.$ $z.$ $x.$	*Quarrez.*	*Côtez.*
$1.$ $8.$ $\frac{3}{2}.$	$2.$ $4.$ $12.$	$zy + 1 \propto 9.$ $zx + 1 \propto 49.$ $yx + 1 \propto 25.$	$3.$ $7.$ $5.$

XXI QUESTION.

36. *Pour coupper en trois parties une grandeur connuë, en telle sorte qu'ayant ajoûté la troisiéme partie au plan des deux premiéres, ou ayant retranché du même plan cette même partie, la somme & le reste soient des quarrez parfaits.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë, & nommé z sa premiére partie, & y la seconde; la troisiéme sera $a - z - y$. Et la somme $zy + a - z - y$ doit être un quarré, & la différence ou le reste $zy - a + z + y$ en doit former un autre. Nommant donc $2x$ la somme des côtez de ces deux quarrez, & leur différence $2v$; le côté du plus grand sera $x + v$, & le côté du moindre sera $x - v$. Et la premiére égalité sera $zy + a - z - y \propto xx + 2vx + vv$. Ou $zy - z \propto xx + 2vx + vv - a$

$+y$. Et $z \propto \frac{xx + 2vx + vv - a + y}{y - 1}$. Et la seconde égalité sera $zy - a + z + y \propto xx - 2vx + vv$. Ou $zy + z \propto xx - 2vx + vv + a - y$. Et $z \propto \frac{xx - 2vx + vv + a - y}{y + 1} \propto \frac{xx + 2vx + vv - a + y}{y - 1}$. Et multipliant les deux membres par $yy - 1$, ou le premier numérateur par $y - 1$, & le second par $y + 1$, pour ôter les fractions ; on formera l'égalité $yxx - 2vyx + vvy + ay - yy - xx + 2vx - vv - a + y \propto yxx + 2vyx + vvy - ay + yy + xx + 2vx + vv - a + y$. Ou $2yy - 2ay + 4vxy + 2xx + 2vv \propto 0$. Ou $yy \propto ay - 2vxy - xx - vv$. D'où l'on tirera [b] une valeur $y \propto \frac{a - 2vx}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{aa - 4avx + 4vvxx - 4xx - 4vv}$. Et afin que la grandeur renfermée sous le signe $\sqrt{}$ soit un quarré parfait, on pourra supposer $xx - 1$ égal à un quarré tt. Et prenant $x - r$ ou $r - x$ pour t, le quarré sera $xx - 1 \propto xx - 2rx + rr$. Ou $2rx \propto rr + 1$. Et $x \propto \frac{rr + 1}{2r}$. Et $t \propto x - 1 \propto \frac{rr - 1}{2r}$. Et le quarré $aa - 4avx + 4vvxx - 4xx - 4vv$ sera $4ttvv - 4avx - 4xx + aa$. C'est pourquoi nommant $s - 2tv$ ou $2tv - s$ son côté, on aura une égalité $4ttvv - 4stv + ss \propto 4ttvv - 4avx - 4xx + aa$. Ou $4avx - 4stv \propto aa - ss - 4xx$. Et $v \propto \frac{aa - ss - 4xx}{4av - 4st}$. b. 17. 1.

Suppositions.

$\{ yz + a - y - z \propto xx + 2vx + vv$. $\{ yz - a + y + z \propto xx - 2vx + vv$.

Résolution infinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} r.\ s.\ \textit{arbitraires.}\ x \propto \frac{rr + 1}{2r}.\ t \propto \frac{rr - 1}{2r}.\ v \propto \frac{aa - ss - 4xx}{4ax - 4st}. \\ 2^{e}\ \textit{partie.}\ y \propto \frac{a - 2vx + s - 2vt}{2}.\ 1^{ere}\ z \propto \frac{xx - 2vx + vv + a - y}{y + 1}. \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \propto 6.\ r \propto 2.\ s \propto 5.\ x \propto \frac{5}{4}.\ t \propto \frac{3}{4}.\ v \propto \frac{19}{60}.\ \{ y \propto \frac{73}{15}.\ z \propto \frac{41}{120}.\ a - z - y \propto \frac{19}{24}. \\ \textit{Quarrez.}\ \{ zy + a - z - y \propto \frac{2209}{900}.\ \{ zy - a + z + y \propto \frac{196}{225}. \end{array} \right.$$

XXII QUESTION.

PREMIER CAS.

37. *Pour trouver trois grandeurs dont la somme soit un quarré parfait, & telles que le quarré de la première recevant la seconde, & le quarré de la seconde recevant la troisiéme, & le quarré de la troisiéme recevant la première, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé $zy - 1$ la premiére grandeur, & la seconde $4zy$, afin que le quarré $zzyy - 2zy + 1$ de la premiére ayant receu la seconde, la somme puisse former un quarré $zzyy + 2zy + 1$. On aura déja rem-

ſurpaſſe la moyenne, & celle dont la moyenne ſurpaſſe la moindre, ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.

Ayant nommé $4zz$ la ſomme des deux moindres de ces trois grandeurs, & leur différence $2y$; la moyenne ſera $2zz + y$, & la moindre $2zz - y$. Et leur ſomme étant déja un quarré parfait, on aura rempli l'une des conditions. Et prenant un autre quarré $4zz + 8zx + 4xx$ pour la ſomme de la plus grande & de la moindre des grandeurs; ſi on ôte de cette même ſomme la moindre $2zz - y$, le reſte $2zz + 8zx + 4xx + y$ ſera la plus grande. Et il ſera néceſſaire que la ſomme $4zz + 8zx + 4xx + 2y$ de la plus grande & de la moyenne ſoit au juſte un quarré. Ainſi nommant $2v - 2z$ ſon côté, on formera l'égalité $4zz + 8zx + 4xx + 2y \propto 4zz - 8vz + 4vv$. Ou $y \propto 2vv - 4vz - 4xz - 2xx$. Mais la différence, dont la plus grande ſurpaſſe la moyenne, eſt $8zx + 4xx$; & celle, dont la moyenne ſurpaſſe la moindre, eſt $2y$. Et ces deux différences doivent avoir entr'elles un même rapport que deux connuës a & b. C'eſt pourquoy multipliant d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens de cette proportion $8zx + 4xx.\ 2y :: a.\ b.$ on formera l'égalité $8bzx + 4bxx \propto 2ay$. Ou $y \propto \frac{4bzx + 2bxx}{a} \propto 2vv - 4vz - 4xz - 2xx$. Et $4bzx + 2bxx \propto 2avv - 4avz - 4axz - 2axx$. Ou $2axz + 2avz + 2bxz \propto avv - axx - bxx$. Et $z \propto \frac{avv - axx - bxx}{2ax + 2av + 2bx}$. Et les deux grandeurs v & x ſont arbitraires. Mais il eſt à propos que l'arbitraire v ſurpaſſe $x\sqrt{\frac{a + b}{a}}$. Et parceque $2zz$ ſurpaſſe y ou ſa valeur $\frac{4bzx + 2bxx}{a}$;
b. 21. 1. la [b] grandeur z ſurpaſſe $\frac{bx}{a} + \frac{1x}{a}\sqrt{ab + bb}$. Et multipliant z ou ſa valeur $\frac{avv - axx - bxx}{a2x + 2av + 2bx}$ & $\frac{bx}{a} + \frac{1x}{a}\sqrt{ab + bb}$ par les deux dénominateurs; le premier produit $aavv - aaxx - abxx$ ſurpaſſera le ſecond $2abxx + 2abvx + 2bbxx + 2axx + 2avx + 2bxx\sqrt{ab + bb}$. Et par conſéquent [b] l'arbitraire v ſurpaſſera $\frac{bx + 1x\sqrt{ab + bb}}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{4bb + 4ab + aa + 4b\sqrt{ab + bb} + 2a\sqrt{ab + bb}}$.

Suppoſitions.

$\{4zz.\ \{4zz + 8zx + 4xx.\ \{4zz + 8zx + 4xx + 2y \propto 4zz - 8vz + 4vv.$
Proportion géométrique. $\{8zx + 4xx.\ 2y :: a.\ b.$

Réſolution infinie.

$\{v.\ x.$ *arbitraires.* $z \propto \frac{avv - axx - bxx}{2ax + 2bx + 2av}.\ y \propto 2vv - 4vz - 4xz - 2xx.$

Exemples.

$a \propto 3.\ b \propto 1.\ x \propto 1.\ v \propto 4.\ z \propto \frac{11}{8}.\ \{y \propto \frac{5}{2}.\ 2zz - y \propto \frac{41}{32}.\ 2zz + y \propto \frac{201}{32}.$ &c.
$a \propto 3.\ b \propto 1.\ x \propto \frac{21}{22}.\ v \propto \frac{35}{11}.\ z \propto 1.\ \{y \propto \frac{455}{242}.\ 2zz - y \propto \frac{87}{726}.\ 2zz + y \propto \frac{2817}{726}.$

XXV QUESTION.

41. *Pour trouver trois grandeurs, dont les sommes alternatives soient des quarrez parfaits; & telles que la différence, dont le quarré de la plus grande surpasse le quarré de la moyenne, & celle, dont la moyenne surpasse la moindre, soient entr'elles comme deux grandeurs connuës.*

Ayant nommé $4zzyy$ le quarré qui égale la somme des deux premiéres de ces trois grandeurs, & leur différence $2x$; la plus grande est $2zz + x$, & la moyenne $2zz - x$. Et la différence des deux quarrez de la plus grande $2zzyy + x$ & $2zzyy - x$ est $8zzyyx$. Et nommant $zzvv - x$ la moindre grandeur, afin que l'inconnuë x se puisse effacer dans la différence $2zzyy - zzvv$ de la moyenne & de la moindre, & qu'on la puisse aussi diviser par zz: Si le rapport des différences est celuy des grandeurs connuës a & b; la proportion sera $8zzyyx.\ 2zzyy - zzvv :: a.\ b.$ Ou $8yyx.\ 2yy - vv :: a.\ b.$ Et les produits l'un des extrêmes, & l'autre des moyens, formeront l'égalité $8byyx \propto 2ayy - avv$. Et on en tirera une valeur $x \propto \frac{2ayy - avv}{8byy}$. Mais la somme de la premiére & de la troisiéme grandeur est $2zzyy + zzvv$, qui doit être un quarré. Et si on la divise par zz; l'exposant $2yy + vv$ est encore un quarré. Nommant donc son côté $v + t$; l'égalité nouvelle sera $2yy + vv \propto vv + 2vt + tt$. Ou $2vt \propto 2yy - tt$. Et $v \propto \frac{2yy - tt}{2t}$. Et prenant s pour $v + t$, ou ss pour le quarré parfait $2yy + vv$, afin d'abbréger; on prendra enfin la somme de la seconde & de de la troisiéme des grandeurs, qui est $2zzyy + zzvv - 2x$, où mettant ss pour $2yy + vv$, la même somme sera $sszz - 2x$. Et afin qu'elle soit un quarré, & qu'il n'y ait rien à changer pour s & pour x déja determinées, on prendra pour côté $sz - r$ ou $r - sz$. Et l'égalité sera $sszz - 2x \propto sszz - 2rsz + rr$. Ou $2rsz \propto rr + 2x$. Et $z \propto \frac{rr + 2x}{2rs}$. Et $2yy$ surpasse tt. Et afin que la grandeur x ou sa valeur $\frac{2ayy - avv}{8byy}$ soit positive, la grandeur v ou sa valeur $\frac{2yy - tt}{2t}$ vaut moins que $\sqrt{2yy}$. Et par conséquent $2yy - tt$ vaut moins que $2ty\sqrt{2}$. Et l'arbitraire t surpasse $-y\sqrt{2} + 2y$. Et afin que la moindre grandeur $zzvv - x$ soit encore positive, la grandeur z ou sa valeur $\frac{rr + 2x}{2rs}$ surpasse $\frac{1}{v}\sqrt{x}$. Et le numérateur $rr + 2x$ surpasse $\frac{2rs}{v}\sqrt{x}$. Et l'arbitraire r est plus grande que $\frac{s}{v}\sqrt{x} + \frac{1}{v}\sqrt{ssx - 2vvx}$. On nommera pour abbréger les expressions de la résolution, la premiére grandeur p, & la seconde n, & la troisiéme m.

Suppositions.

Grandeurs. $\{\ p \propto 2zzyy + x.\ \{\ n \propto 2zzyy - x.\ \{\ m \propto zzvv - x.$
$p + n \propto 4zzyy.\ \{\ p + m \propto vvzz + 2vtz + tt.\ \{\ m + n \propto sszz - 2rsz + rr.$
Proportion géométrique. $\{\ pp - nn.\ n - m :: a.\ b.$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} y.\ t.\ r.\ \text{arbitraires.}\ \{ v \propto \frac{2yy - tt}{2t}.\ s \propto t + v.\ x \propto \frac{2ayy - avv}{8byy}.\ z \propto \frac{rr + 2x}{2rs}. \\ 1^{\text{ere}}\ \text{grandeur}\ p \propto 2zzyy + x.\ 2^{\text{e}}\ n \propto 2zzyy - x.\ 3^{\text{e}}\ m \propto zzvv - x. \end{array}\right.$$

Premier éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 3.\ b \propto 1.\ y \propto 1.\ t \propto 1.\ v \propto \frac{1}{2}.\ s \propto \frac{3}{2}.\ x \propto \frac{21}{32}.\ r \propto 7.\ z \propto \frac{115}{48}. \\ p \propto \frac{111848}{9216} \propto \frac{13981}{1152}.\ n \propto \frac{99752}{9216} \propto \frac{12469}{1152}.\ m \propto \frac{7177}{9216}.\ pp \propto \frac{195468361}{1327104}. \\ nn \propto \frac{155475961}{1327104}.\ pp - nn \propto \frac{195468361 - 155475961}{1327104} \propto \frac{277725}{9216}. \\ p + n \propto \frac{211600}{9216}.\ p + m \propto \frac{119025}{9216}.\ n + m \propto \frac{106929}{9216}.\ \text{Côtez.}\ \frac{460}{96}.\ \frac{345}{96}.\ \frac{327}{96}. \\ pp - nn.\ n - m :: a.\ b. \propto \frac{277725}{9216}.\ \frac{92575}{9216} :: 3.\ 1. \end{array}\right.$$

Second éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 3.\ b \propto 1.\ y \propto 2.\ t \propto 2.\ v \propto 1.\ x \propto \frac{21}{32}.\ s \propto 3.\ r \propto 6.\ z \propto \frac{597}{576} \propto \frac{199}{192}. \\ p \propto \frac{341000}{36864} \propto \frac{42625}{4608}.\ n \propto \frac{292616}{36864} \propto \frac{36577}{4608}.\ m \propto \frac{15409}{36864}.\ pp \propto \frac{1816890625}{21233664}. \\ nn \propto \frac{1337876929}{21233664}.\ pp - nn \propto \frac{1816890625 - 1337876929}{21233664} \propto \frac{831621}{36864}. \\ p + n \propto \frac{633616}{36864}.\ p + m \propto \frac{356409}{36864}.\ n + m \propto \frac{308025}{36864}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{796}{192}.\ \frac{597}{192}.\ \frac{555}{192}. \\ pp - nn.\ n - m :: a.\ b. \propto \frac{831621}{36864}.\ \frac{277207}{36864} :: 3.\ 1. \end{array}\right.$$

XXVI QUESTION.

PREMIER CAS.

42. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacune & chacun de leurs plans alternatifs recevant une certaine grandeur, les sommes soient chacune un quarré parfait.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde y, & la troisiéme x; & v le côté du premier quarré, & t le côté du second, & a la grandeur connuë qui doit être ajoûtée; La premiére égalité sera $z + a \propto vv$. Ou $z \propto vv - a$. Et la seconde $y + a \propto tt$. Ou $y \propto tt - a$. Mais $zy + a$ ou sa valeur $vvtt - avv - att + aa + 1a$ doit former un quarré. Nommant donc, afin d'abbréger, son côté $vt - a$, on aura l'égalité $vvtt - avv - att + aa + 1a \propto vvtt - 2avt + aa$. Ou $1a \propto avv - 2avt + att$. Et $1 \propto vv - 2vt + tt$. Et les racines quarrées donneront l'égalité $1 \propto t - v$. Ou $t \propto v + 1$. De sorte que les deux grandeurs z & y seront $vv - 1a$ & $vv + 2v + 1 - 1a$. Et nommant rv le côté du quarré $x + a$, on aura $x + a \propto rrvv$. Ou $x \propto rrvv - 1a$. Et parceque $zx + a$,

SECOND CAS.

43. *ET si on ôte la grandeur connuë de chacune des trois grandeurs, & de chacun de leurs plans alternatifs ; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On découvrira la résolution par les mêmes voyes que la précédente. Et tous les divers cas pourront se résoudre par les mêmes raisonnemens en changeant les signes selon qu'il sera à propos.

Suppositions.

$$\left\{ z - a \propto vv.\ y - a \propto tt.\ x - a \propto rrvv.\ zy - a \propto qq.\ zx - a \propto ll.\ yx - a \propto mm. \right.$$

Résolution infinie.

$$\left\{ n \text{ arbitraire}.\ v \propto \frac{nn - 3a - 1}{4n + 4}.\ \left\{ z \propto vv + a.\ y \propto vv + 2v + 1 + a.\ x \propto 4vv + 4v + 1 + 4a. \right. \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a.\ n.\ v.\ \left\{ z.\ \ y.\ \ x.\ \ \left\{ z - a.\ y - 6.\ x - 6.\ \ \text{Côtez}. \right.\right. \\ 6.\ 5.\ \frac{1}{4}.\ \left\{ \frac{97}{16}.\ \frac{121}{16}.\ \frac{420}{16}.\ \left\{ \frac{1}{16}.\ \frac{25}{16}.\ \frac{324}{16}.\ \left\{ \frac{1}{4}.\ \frac{5}{4}.\ \frac{18}{4}. \right.\right.\right. \\ zy - 6 \propto \frac{10201}{256}.\ zx - 6 \propto \frac{39204}{256}.\ yx - 6 \propto \frac{49284}{256}.\ \left\{ \text{Côtez}.\ \frac{101}{16}.\ \frac{198}{16}.\ \frac{222}{16}. \right. \end{array} \right.$$

XXVII QUESTION.

PREMIER CAS.

44. *POur trouver trois quarrez, tels que chacune des sommes alternatives ayant receu une grandeur connuë, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé zz le premier quarré, & yy le second, & le troisiéme xx, & a la grandeur connuë que chacune des sommes alternatives de de ces quarrez doit recevoir ; il faudra que les sommes $zz + yy + a$, $zz + xx + a$, $yy + xx + a$, soient des quarrez parfaits. Prenant donc $v - y$ pour côté du premier, & $t - x$ pour côté du second ; La premiére égalité sera $zz + yy + a \propto yy - 2vy + vv$. Ou $2vy \propto vv - zz - a$. Et $y \propto \frac{vv - zz - a}{2v}$. Et la seconde sera $zz + xx + a \propto xx - 2tx + tt$. Ou $2tx \propto tt - zz - a$. Et $x \propto \frac{tt - zz - a}{2t}$. Et mettant pour y & pour x leurs valeurs $\frac{vv - zz - a}{2v}$ & $\frac{tt - zz - a}{2t}$ dans la somme $yy + xx + a$, qu'on doit encore égaler à un quarré parfait ; cette même somme sera

$$\frac{z^4tt + z^4vv + 2azztt + 2azzvv + aatt + aavv - 4vvttzz + v^4tt + vvt^4}{4vvtt}.$$

Et parceque le dénominateur est au juste un quarré parfait de $2vt$; il suffira de faire en forte que le numérateur en foit encore un. C'eft pourquoi confidérant attentivement ce numérateur, & nommant rr la grandeur $tt + vv$ qui en divife au jufte la plus grande partie; on abbrégera l'expreffion du numérateur, en y mettant rr pour $tt + vv$. Et il fera alors $z^4rr + 2azzrr + aarr - 4vvttzz + vvttrr$. Et fuppofant $vvttrr - 4vvttzz \propto 0$; ou $4vvttzz \propto vvttrr$, & $4zz \propto rr$, ou $2z \propto r$: le numérateur fera au jufte le quarré $z^4rr + 2azzrr + aarr$ de $zzr + ar$. Et il ne faudra plus pour achever pleinement la réfolution, que prendre un quarré rr égal à la fomme $tt + vv$ des deux tt & vv; ce qui eft facile, comme on l'a déja remarqué en diverfes rencontres.

Suppofitions.

$$\{zz + yy + a \propto yy - 2vy + vv. \ \{zz + xx + a \propto xx - 2tx + tt. \ \{yy + xx + a \propto ff.$$

Réfolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} p.\ n.\ \text{arbitraires.}\ r \propto pp + nn.\ t \propto pp - nn.\ v \propto 2pn. \\ z \propto \frac{1}{2}r \propto \frac{pp + nn}{2}.\ y \propto \frac{vv - zz - a}{2v}.\ x \propto \frac{tt - zz - a}{2t}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 15.\ p \propto 3.\ n \propto 1.\ r \propto 10.\ t \propto 8.\ v \propto 6.\ \{z \propto 5.\ y \propto \frac{1}{3}.\ x \propto \frac{3}{2}. \\ zz + yy + 15 \propto \frac{361}{9}.\ zz + xx + 15 \propto \frac{169}{4}.\ yy + xx + 15 \propto \frac{625}{36}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

45. *ET fi on ôte la grandeur connuë de chacune des fommes alternatives des quarrez; afin que les reftes foient des quarrez parfaits.*

On formera la réfolution par des voyes femblables à celles du premier cas. Et on n'aura qu'à changer les fignes des parties, où la grandeur a connuë fe rencontrera.

Suppofitions.

$$\{zz + yy - a \propto yy - 2vy + vv. \ \{zz + xx - a \propto xx - 2tx + tt. \ \{yy + xx - a \propto ff.$$

Réfolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} p.\ n.\ \text{arbitraires.}\ r \propto pp + nn.\ t \propto pp - nn.\ v \propto 2pn. \\ z \propto \frac{1}{2}r \propto \frac{pp + nn}{2}.\ y \propto \frac{vv - zz + a}{2v}.\ x \propto \frac{tt - zz + a}{2t}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 13.\ p \propto 3.\ n \propto 1.\ r \propto 10.\ t \propto 8.\ v \propto 6.\ \{z \propto 5.\ y \propto \frac{13}{4}.\ x \propto 2. \\ zz + yy - 13 \propto \frac{361}{16}.\ zz + xx - 13 \propto 16.\ yy + xx - 13 \propto \frac{25}{16}. \end{array}\right.$$

la somme $a \propto z + y + x \propto 2vv + 2tt + 2ss$. Et $2a \propto 4vv + 4tt + 4ss$. D'où il est déja clair que le double $2a$ de la somme connuë doit être ou un quarré parfait, ou la somme de deux ff & gg, ou la somme de trois. Et de plus chacun des quarrez $4vv$, $4tt$, $4ss$, doit être plus petit que les deux autres ensemble, & par conséquent plus petit que la moitié a des trois, afin que les parties z, y, x, soient toutes positives. Déterminant donc, comme il est facile, l'un des trois quarrez, le quarré $4tt$ par éxemple; la somme $2a - 4tt$ en comprendra deux autres $4vv$ & $4ss$ moindres chacun que la grandeur a, & ôtant a de $2a - 4tt$, le reste $a - 4tt$ sera moindre que chacun des quarrez $4vv$ & $4ss$, puisqu'en luy ajoûtant un excez g, dont a surpasse l'un des deux quarrez $4vv$ & $4ss$, la somme $a - 4tt + l$ est égale à l'autre de ces mêmes quarrez. De sorte que chacun des quarrez $4vv$ & $4ss$ doit avoir ses bornes resserrées entre a & $a - 4tt$. On supposera dans la forme suivante que le double $2a$ de la grandeur connuë comprend au juste deux quarrez connus ff & gg, & que le premier ff surpasse le second gg, ou qu'au moins il n'est pas plus petit.

Suppositions.

$$\{ z + y \propto 4vv. \quad \{ z + x \propto 4tt. \quad \{ y + x \propto 4ss. \quad \{ z + y + x \propto a. \quad \{ 2a \propto ff + gg.$$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} r \text{ arbitraire surpasse } \dfrac{g + \sqrt{a}}{f}. \quad 2t \propto \dfrac{frr - f - 2gr}{rr + 1}. \quad hh \propto 2a - 4tt. \quad e \propto a - 4tt. \\ p \text{ arbitraire entre } \dfrac{h + \sqrt{a}}{\sqrt{e}} \text{ \& } \dfrac{h + \sqrt{e}}{\sqrt{a}}. \quad 2v \propto \dfrac{2hp}{pp + 1}. \quad 4ss \propto hh - 4vv. \\ z \propto 2vv + 2tt - 2ss. \quad y \propto 2vv - 2tt + 2ss. \quad x \propto 2tt - 2vv + 2ss. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 10. \quad 2a \propto ff + gg \propto 16 + 4. \quad r \text{ surpasse } \dfrac{2 + \sqrt{10}}{4}. \quad \{ r \propto 3. \quad 2t \propto 2. \quad h \propto 4. \quad e \propto 6. \\ p \text{ entre } \dfrac{4 + \sqrt{10}}{\sqrt{6}} \text{ \& } \dfrac{4 + \sqrt{6}}{\sqrt{10}}. \quad p \text{ presque entre } \dfrac{716}{244} \text{ \& } \dfrac{644}{316}. \quad p \propto \dfrac{5}{2} \text{ entre } 2\dfrac{57}{61} \text{ \& } 2\dfrac{3}{79}. \\ 2v \propto \dfrac{80}{29}. \quad 4vv \propto \dfrac{6400}{841}. \quad 4ss \propto \dfrac{7056}{841}. \quad 2s \propto \dfrac{84}{29}. \quad \{ z \propto \dfrac{1354}{841}. \quad y \propto \dfrac{5046}{841}. \quad x \propto \dfrac{2010}{841}. \end{array}\right.$$

XXX QUESTION.

48. *Pour coupper une grandeur connuë en quatre parties, telles qu'étant prises alternativement trois à trois, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé a la grandeur connuë, & z sa premiére partie, & y la seconde, & x la troisiéme, & v la quatriéme; & $3t$ le côté du premier quarré, & $3r$ le côté du second, & $3s$ le côté du troisiéme, & $3q$ le côté du quatriéme; les comparaisons des quatre égalitez fourniront une valeur $z \propto 3tt + 3rr + 3ss - 6qq$, & une valeur $y \propto 3tt + 3rr - 6ss + 3qq$, & une valeur $x \propto 3tt - 6rr + 3ss + 3qq$, & une valeur $v \propto 3rr$

$- 6tt + 3ss + 3qq$. Et la ſomme entiére $a \propto z + y + x + v \propto 3tt + 3rr + 3ss + 3qq$. Et prenant le triple de cette égalité, on aura $3a \propto 9tt + 9rr + 9ss + 9qq$. De ſorte que la grandeur $3a$ doit être couppée en quatre quarrez parfaits. Et afin que les grandeurs z, y, x, v, ſoient toutes poſitives; il faut que le double de chacun des quarrez $9tt$, $9rr$, $9ss$, $9qq$, ſoit moindre que les trois autres enſemble, & qu'ainſi le même double ſoit moindre que les deux tiers de $3a$; ou ce qui revient au même, que chacun de ces quatre quarrez ſoit moindre que la grandeur a connuë. Et ſi on ôte de la ſomme $3a$ deux quarrez $9tt$ & $9rr$ moindres chacun que la grandeur a, le reſte $3a - 9tt - 9rr$ doit être diviſé en deux quarrez moindres chacun que la même grandeur a. Et ôtant a de $3a - 9tt - 9rr$, on ôteroit plus qu'il n'en faut pour l'un des quarrez $9ss$ & $9vv$. De ſorte que chacun de ces deux quarrez ſurpaſſera néceſſairement le reſte $2a - 9tt - 9rr$. Et on pourroit former une ſuitte infinie de réſolutions infinies, en ſuivant à peu prés le même ordre.

Suppoſitions.

$$z + y + x \propto 9tt.\ z + y + v \propto 9rr.\ z + x + v \propto 9ss.\ y + x + v \propto 9qq.$$
$$z + y + x + q \propto a.\ 3a \propto ff + gg + hh + kk.$$

Réſolution infinie.

$hh.\ kk.$ *moindres chacun que* $1a.$ $3t \propto h.\ 3r \propto k.\ e \propto 2a - 9tt - 9rr.$

p *arbitraire entre* $\dfrac{g + \sqrt{ff + gg - e}}{f - \sqrt{e}}$ & $\dfrac{g + \sqrt{ff + gg - a}}{f - \sqrt{a}}$. $3s \propto \dfrac{fpp - f - 2gp}{pp + 1}$.

$9qq \propto ff + gg - 9ss.$ 1^{ere} *partie.* $z \propto 3tt + 3rr + 3ss - 6qq.$

2^{e} $y \propto 3tt + 3rr - 6ss + 3qq.$ 3^{e} $x \propto 3tt - 6rr + 3ss + 3qq.$

4^{e} $v \propto 3rr - 6tt + 3ss + 3qq.$

Exemple.

$a \propto 10.\ 3a \propto ff + gg + hh + kk \propto 16 + 1 + 4 + 9.\ 3t \propto 2.\ 3r \propto 3.\ e \propto 7.$

p *entre* $\dfrac{364}{84}$ & $\dfrac{416}{136}$ *ou entre* $4\frac{1}{3}$ & $3\frac{1}{17}$. $p \propto 4.\ 3s \propto \dfrac{52}{17}.\ 9ss \propto \dfrac{2704}{289}.$

$9qq \propto \dfrac{2209}{289}.\ 3q \propto \dfrac{47}{17}.$ *parties.* $z \propto \dfrac{681}{289}.\ y \propto \dfrac{186}{289}.\ x \propto \dfrac{289}{289}.\ v \propto \dfrac{1744}{289}.$

XXXI QUESTION.

PREMIER CAS.

49. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que leur ſomme étant ajoûtée à celle des quarrez, la ſomme entiére ſoit égale à une grandeur connuë.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la ſeconde, & x la troiſiéme, & v la quatriéme, & a la ſomme entiére de ces quatre grandeurs & de leurs quarrez; l'égalité ſera $zz + 1z + yy + 1y + xx + 1x + vv$

$+1v \propto 1a$. Et ajoûtant 1 ou $\frac{4}{4}$ de part & d'autre, afin d'avoir au premier membre quatre quarrez parfaits ; l'égalité sera $zz+1z+\frac{1}{4}+yy+1y+\frac{1}{4}+xx+1x+\frac{1}{4}+vv+1v+\frac{1}{4} \propto a+1$. De sorte que la grandeur $a+1$ doit être couppée en quatre quarrez, $zz+1z+\frac{1}{4}$, $yy+1y+\frac{1}{4}$, $xx+1x+\frac{1}{4}$, $vv+1v+\frac{1}{4}$, dont les côtez sont chacun plus grands que la fraction $\frac{1}{2}$. Et ôtant ensuitte $\frac{1}{2}$ de chacun des côtez de ces mêmes quarrez ; les restes z, y, x, v, résoudront la question.

Supposition.

Somme entière. $\{ zz+yy+xx+vv+z+y+x+v \propto a$.

Résolution infinie.

$\{ a+1 \propto bb+cc+dd+ee. \{ z \propto b-\frac{1}{2}.\ y \propto c-\frac{1}{2}.\ x \propto d-\frac{1}{2}.\ v \propto e-\frac{1}{2}.$

Exemple.

a.	$a+1 \propto bb+cc+dd+ee$.	$b.\ c.\ d.\ e.$	$z.\ y.\ x.\ v.$	*Somme* a.
12.	$13 \propto 1+4+4+4$.	1. 2. 2. 2.	$\frac{1}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{2}.$	*Somme* 12.
12.	$13 \propto \frac{144}{25}+\frac{81}{25}+\frac{64}{25}+\frac{36}{25}$.	$\frac{12}{5}.\ \frac{9}{5}.\ \frac{8}{5}.\ \frac{6}{5}.$	$\frac{19}{10}.\ \frac{13}{10}.\ \frac{11}{10}.\ \frac{7}{10}.$	*Somme* 12.

SECOND CAS.

50. *Et si la somme des côtez est retranchée de celle des quarrez, & que le reste soit égal à une grandeur connuë.*

La résolution sera semblable à la précédente. Et aprés avoir ajoûté $\frac{1}{2}$ à chacun des côtez connus b, c, d, e, les sommes z, y, x, v, résoudront la question.

Supposition.

Reste $\{ zz+yy+xx+vv-z-y-x-v \propto a$.

$\{ a+1 \propto bb+cc+dd+ee. \{ z \propto b+\frac{1}{2}.\ y \propto c+\frac{1}{2}.\ x \propto d+\frac{1}{2}.\ v \propto e+\frac{1}{2}.$

Exemple.

a.	$a+1 \propto bb+cc+dd+ee$.	$b.\ c.\ d.\ e.$	$z.\ y.\ x.\ v.$
4.	$5 \propto \frac{16}{25}+\frac{9}{25}+\frac{64}{25}+\frac{36}{25}$.	$\frac{4}{5}.\ \frac{3}{5}.\ \frac{8}{5}.\ \frac{6}{5}.$	$\frac{13}{10}.\ \frac{11}{10}.\ \frac{21}{10}.\ \frac{17}{10}.$

$$zz+yy+xx+vv-z-y-x-v \propto \frac{169+121+441+289-130-110-210-170}{100} \propto 4.$$

XXXII QUESTION.

51. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que chacun de leurs six plans alternatifs ayant receu un quarré déterminé, chacune de six sommes soit un quarré parfait.*

Ayant nommé la premiére z, & a le côté du quarré connu, & la seconde $z + 2a$, & la troisiéme $4z + 4a$; il y aura déja trois conditions remplies. Car le plan de la premiére par la seconde recevant le quarré aa, donne déja le quarré $zz + 2az + aa$ de $z + a$. Et le plan de la premiére par la troisiéme recevant le quarré aa, donne aussi le quarré $4zz + 4az + aa$ de $2z + a$. Et le plan de la seconde par la troisiéme recevant encore le quarré aa donne le quarré $4zz + 12az + 9aa$ de $2z + 3a$. Nommant donc x la quatriéme grandeur, le plan de la premiére z par la quatriéme x recevant le quarré aa, il faut que la somme $zx + aa$ soit un quarré parfait. Et si on nomme son côté $vz + a$; on aura l'égalité $zx + aa \propto vvzz + 2avz + aa$. Ou $x \propto vvz + 2av$. Et le plan de la troisiéme $4z + 4a$ par la quatriéme x ou par sa valeur $vvz + 2av$, recevant le quarré aa, il faut que la somme $4vvzz + 4avvz + 8avz + 8aav + aa$ soit au juste un quarré. C'est pourquoi si on nomme son côté $2zv + av + 2a$, afin que les parties $4vvzz$, $4avvz$, $8avz$ se puissent effacer; on aura l'égalité $4vvzz + 4avvz + 8avz + 8aav + aa \propto 4vvzz + 4avvz + 8avz + aavv + 4aav + 4aa$. Ou $4aav - 3aa \propto aavv$. Et $4v - 3$
$\propto vv$. D'où l'on tire une[b] valeur $v \propto 3$. Reprenant donc la quatriéme b. 16. 1.
grandeur x ou sa valeur $9z + 6a \propto vvz + 2av$; il faudra que le plan de la seconde grandeur $z + 2a$ par la quatriéme x ou $9z + 6a$, ayant receu le quarré connu aa, la somme $9zz + 24az + 13aa$ fournisse encore un quarré au juste. Nommant donc enfin son côté $t - 3z$, on aura l'égalité $9zz + 24az + 13aa \propto tt - 6tz + 9zz$. Ou $24az + 6tz \propto tt - 13aa$. Et l'arbitraire unique t surpasse $a\sqrt{13}$. Si on veut nommer les grandeurs, z, r, q, x, pour abbréger les expressions des suppositions, on formera la résolution suivante.

Suppositions.

$$\left\{\begin{array}{l} zr + aa \propto zz + 2az + aa. \left(zq + aa \propto 4zz + 4az + aa. \left(rq + aa \propto 4zz + 12az + 9aa. \right.\right. \\ zx + aa \propto 9zz + 6az + aa. \left(qx + aa \propto 36zz + 60az + 25aa. \left(rx + aa \propto tt - 6tz + 9zz. \right.\right. \end{array}\right.$$

Résolution infinie.

$$\left\{ t \text{ arbitraire.} \left\{ z \propto \frac{tt - 13aa}{24a + 6t}. \; r \propto z + 2a. \; q \propto 4z + 4a. \; x \propto 9z + 6a. \right.\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 1.\; t \propto 4. \left\{ z \propto \frac{1}{16}. \; r \propto \frac{33}{16}. \; q \propto \frac{68}{16}. \; x \propto \frac{105}{16}. \right. \left\{ \text{Côtez.}\; \frac{17}{16}. \frac{9}{8}. \frac{25}{8}. \frac{19}{16}. \frac{61}{16}. \frac{86}{16}. \right. \\ zr + 1 \propto \frac{289}{256}. \; \text{Côté } \frac{17}{16}. \left\{ zq + 1 \propto \frac{324}{256}. \; \text{Côté } \frac{18}{16}. \right. \left\{ zx + 1 \propto \frac{361}{256}. \; \text{Côté } \frac{19}{16}. \right. \\ rq + 1 \propto \frac{2500}{256}. \; \text{Côté } \frac{50}{16}. \left\{ rx + 1 \propto \frac{3721}{256}. \; \text{Côté } \frac{61}{16}. \right. \left\{ qx + 1 \propto \frac{7396}{256}. \; \text{Côté } \frac{86}{16}. \right. \end{array}\right.$$

XXXIII. QUESTION.

52. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que chacune étant ajoûtée au quarré de la somme des quatre, ou retranchée du même quarré, les nouvelles sommes & les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé zy la somme des quatre, & zx la premiére, & zv la seconde, & zs la troisiéme, & zr la quatriéme; & $2pz$ la somme des côtez des deux premiers quarrez, & $2nz$ la différence de ces mêmes côtez. La premiére égalité sera $zzyy + zx \propto ppzz + 2pnzz + nnzz$. Ou $x \propto ppz + 2pnz + nnz - zyy$. Et la seconde égalité sera $zzyy - zx \propto ppzz - 2pnzz + nnzz$. Et $x \propto zyy - ppz + 2pnz - nnz \propto ppz + 2pnz + nnz - zyy$. Et $yy \propto pp + nn$. Et si on ajoûte ensemble les deux valeurs de la même inconnuë x, qui ont été comparées par transposition; on aura $2x \propto 4pnz$. Ou $x \propto 2pnz$. Et si on nomme ensuitte de la même sorte $2mz$ la somme des côtez du second & du troisiéme des quarrez, & $2lz$ la différence de ces mêmes côtez; on aura une troisiéme égalité $zzyy + zv \propto mmzz + 2lmzz + llzz$. Et ensuitte une quatriéme $zzyy - zv \propto mmzz - 2lmzz + llzz$. Et ajoûtant ensemble les deux premiers membres d'une part, & de l'autre les deux autres membres; on trouvera $2zzyy \propto 2mmzz + 2llzz$. Ou $yy \propto mm + ll$. Et si on ôte au contraire le premier membre de la seconde des deux égalitez du premier membre de la premiére, & le second membre de la seconde du second de la premiére; on formera l'égalité $2zv \propto 4lmzz$. Ou $v \propto 2lmz$. Et nommant encore de la même sorte $2kz$ la somme des côtez du cinquiéme quarré $zzyy + zs$ & du sixiéme $zzyy - zs$, & $2gz$ la différence de ces mêmes côtez; on trouvera, par des comparaisons semblables aux précédentes, une égalité $yy \propto kk + gg$, & ensuitte une autre $s \propto 2kgz$. Et enfin nommant $2fz$ la somme des côtez du septiéme quarré $zzyy + zr$ & du huitiéme $zzyy - zr$, & $2hz$ la différence de ces mêmes côtez; on trouvera encore les deux égalitez $yy \propto ff + hh$. Et $r \propto 2fhz$. De sorte que pour résoudre pleinement la question, il faut que le quarré yy puisse être couppé jusques à quatre diverses fois en deux quarrez différens: premiérement en deux dont les côtez seront nommez p & n; & ensuitte en deux autres, dont les côtez seront nommez m & l; & aprés cela en deux autres nouveaux, dont les côtez seront nommez f & h; & enfin en deux, dont les côtez seront nommez k & g. Et de plus il faut que zy soit la somme des quatre grandeurs zx, zv, zs, zr, ou de leurs valeurs $2pnzz$, $2lmzz$, $2kgzz$, $2fhzz$. Ce qui fournit une égalité $y \propto 2pnz + 2lmz + 2kgz + 2fhz$. Ou $z \propto \frac{y}{2pn + 2lm + 2kg + 2fh}$. Et on pourroit former par une voie semblable à celle qu'on a suivie, un progrés infini de résolutions infinies.

Suppositions.

$$\begin{cases} zzyy + zx \propto ppzz + 2nzz + nnzz. \\ zzyy - zx \propto ppzz - 2nzz + nnzz. \end{cases} \quad \begin{cases} zzyy + zv \propto mmzz + 2lmzz + llzz. \\ zzyy - zv \propto mmzz - 2lmzz + llzz. \end{cases}$$

$$\begin{cases} zzyy + z\text{ſ} \propto kkzz + 2kgzz + ggzz. \\ zzyy - z\text{ſ} \propto kkzz - 2kgzz + ggzz. \end{cases} \quad \begin{cases} zzyy + zr \propto ffzz + 2fhzz + hhzz. \\ zzyy - zr \propto ffzz - 2fhzz + hhzz. \end{cases}$$

Résolution infinie.

$$\begin{cases} y.\ a.\ b.\ c.\ d.\ \text{arbitraires.}\ \{p \propto \frac{aay - 1y}{aa + 1}.\ n \propto \frac{2ay}{aa + 1}.\ \{m \propto \frac{bby - 1y}{bb + 1}. \\ l \propto \frac{2by}{bb + 1}.\ \{k \propto \frac{ccy - 1y}{cc + 1}.\ g \propto \frac{2cy}{cc + 1}.\ \{f \propto \frac{ddy - 1y}{dd + 1}.\ h \propto \frac{2dy}{dd + 1}. \\ z \propto \frac{y}{2pn + 2lm + 2kg + 2fh}.\ \{x \propto 2pnz.\ v \propto 2lmz.\ \text{ſ} \propto 2kgz.\ r \propto 2fhz. \end{cases}$$

Exemple.

$$\begin{cases} y \propto 65.\ a \propto 3.\ b \propto 5.\ c \propto 8.\ d \propto 3\frac{2}{3}.\ \{p \propto 52.\ n \propto 39.\ m \propto 60.\ l \propto 25. \\ k \propto 63.\ g \propto 16.\ f \propto 56.\ h \propto 33.\ \{z \propto \frac{65}{12768}.\ zy \propto \frac{4225}{12768}.\ zzyy \propto \frac{17850625}{163033824}. \\ zx \propto \frac{17136600}{163033824}.\ zv \propto \frac{12675000}{163033824}.\ z\text{ſ} \propto \frac{8517600}{163033824}.\ zr \propto \frac{15615600}{163033824}. \\ zzyy + zx \propto \frac{34987225}{163033824}.\ zzyy - zx \propto \frac{714025}{163033824}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{5915}{12768}.\ \frac{845}{12768}. \\ zzyy + zv \propto \frac{30525625}{163033824}.\ zzyy - zv \propto \frac{5175625}{163033824}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{5525}{12768}.\ \frac{2275}{12768}. \\ zzyy + z\text{ſ} \propto \frac{26368225}{163033824}.\ zzyy - z\text{ſ} \propto \frac{9333025}{163033824}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{5135}{12768}.\ \frac{3055}{12768}. \\ zzyy + zr \propto \frac{33466225}{163033824}.\ zzyy - zr \propto \frac{2235025}{163033824}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{5785}{12768}.\ \frac{1495}{12768}. \end{cases}$$

XXXIV QUESTION.

PREMIER CAS.

53. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que chacun de leurs plans alternatifs ayant receu une grandeur connuë, les sommes soient des quarrez parfaits.*

On en cherchera d'abord trois par la résolution de la question seiziéme de ce Livre, telles que chacune & chacun de leurs plans alternatifs ayant receu la grandeur connuë a, les sommes soient des quarrez parfaits. Et ces trois grandeurs z, y, x, étant découvertes; on nommera la quatriéme $v + 1$. Et alors il faudra que chacune des trois sommes $vz + 1z + a$, $vy + 1y + a$, $vx + 1x + a$, soit un quarré parfait. Et parceque les parties $1z + a$, $1y + a$, $1x + a$ sont déja des quarrez parfaits; on multipliera la premiére somme $vz + 1z + a$ par $1y + a$, & le produit par $1x + a$; & la somme $vy + 1y + a$ par $1z + a$, & le produit par $1x + a$;

& la somme $vx + 1x + a$ par $1z + a$, & le produit par $1y + a$. Et les nouveaux produits formeront une triple égalité, qu'on pourra rapporter au premier cas de la question quatorziéme du huitiéme Livre, & ensuitte à la question vintiéme de ce même Livre. J'en laisse à former le calcul entier à ceux qui s'en voudront donner la peine. On peut encore résoudre autrement la même question.

SECOND CAS.

54. *ET si on ôte la grandeur connuë de chacun des plans alternatifs; afin que les six restes soient des quarrez parfaits.*

On formera ses raisonnemens & la résolution entiére comme au cas précédent. Et les signes de la grandeur connuë a changeront par tout, où elle se rencontrera. Et il y auroit encore d'autres cas qu'on pourroit résoudre de la même sorte.

XXXV QUESTION.

PREMIER CAS.

55. *POur trouver quatre grandeurs, telles que leurs sommes alternatives ayant receu chacune une grandeur connuë, les sommes soient des quarrez parfaits.*

On cherchera premiérement par la résolution de la question dix-septiéme de ce Livre, trois quarrez $4zz$, $4yy$, $4xx$, tels que chacune de leurs sommes alternatives ayant receu la grandeur connuë a, les sommes soient des quarrez parfaits. Et alors on nommera $vv - a$ la premiére des grandeurs qu'on cherche, & $4zv + 4zz$, la seconde, & $4yv + 4yy$ la troisiéme, & $4xv + 4xx$ la quatriéme. Et la premiére avec la seconde recevant la grandeur a, donnera le quarré $vv + 4zv + 4zz$ de $2z + v$. Et la premiére avec la troisiéme recevant la grandeur a, donnera le quarré $vv + 4yv + 4yy$ de $2y + v$. Et la premiére avec la quatriéme recevant la grandeur a, donnera le quarré $vv + 4xv + 4xx$ de $2x + v$. Et la seconde avec la troisiéme recevant la grandeur a, donnera $4zv + 4yv + 4zz + 4yy + a$. Et la seconde avec la quatriéme recevant la grandeur a, donnera $4zv + 4xv + 4zz + 4xx + a$. Et la troisiéme avec la quatriéme recevant la grandeur a, donnera $4yv + 4xv + 4yy + 4xx + a$. Et parcequ'une partie de chacune des sommes est un produit de l'inconnuë v par une autre grandeur, & le reste un quarré parfait; il faudra résoudre une triple égalité avec les observations de la question précédente, ou selon la question vingsixiéme du quatriéme Livre. J'en laisse encore à chercher le calcul.

SECOND CAS.

56. *ET si on ôte la grandeur connuë de chacune des sommes alternatives; afin que les six restes soient des quarrez parfaits.*

On n'aura qu'à changer par tout le signe + en —, & le signe — en + dans le cours de la résolution précédente. Et il y auroit encore d'autres cas, qu'on pourroit résoudre de la même sorte.

XXXVI

XXXVI QUESTION.

57. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que chacun de leurs plans alternatifs ayant receu la somme des côtez qui le forment, les sommes soient des quarrez parfaits.*

On cherchera en premier lieu trois [b] quarrez zz, yy, xx, tels que chacun de leurs plans alternatifs recevant la somme des quarrez qui le forment, les sommes soient déja des quarrez. Et nommant v la quatriéme grandeur, il faudra que les sommes $zzv + 1v + zz$, $yyv + 1v + yy$, $xxv + 1v + xx$, soient des quarrez parfaits. Ce qui forme une triple égalité, dont la resolution sera rapportée à la question vint-sixiéme du quatriéme Livre, & ensuitte à la vintiéme de ce même Livre. La résolution que Monsieur De Fermat propose ne peut être positive la premiere fois, comme il est aisé de le voir en achevant ce qu'il a commencé. b. 33.

AVERTISSEMENT.

Il y a une infinité de questions, qu'on pourroit rapporter en diverses maniéres aux résolutions qu'on a déja formées, & en particulier à celles des doubles & des triples égalitez. Mais il n'est pas juste de multiplier sans fin mes recherches. Il suffit, pour remplir mon dessein, d'établir des principes simples & féconds, & d'en tirer par ordre les questions de Diophante, & les plus ingénieuses des principaux Auteurs, ou celles qui ont une étenduë plus vaste, & dont on peut faire un plus grand usage. Il est vrai que pour accoûtumer insensiblement l'esprit à lier & reünir les choses, où des vûës confuses & resserrées luy réprésentent en mille rencontres des différences essentielles, qui n'y furent jamais; j'ay pris soin de rappeller souvent à un même ordre de résolution divers cas des problêmes que Diophante & ses Commentateurs distinguent un peu trop, ou qu'ils passent tout-à-fait sous silence. Cependant je n'ai point voulu m'engager à une discussion trop longue & scrupuleuse de tous les cas possibles des questions qui sont proposées ou de leurs approchantes; parceque cela m'auroit obligé d'excéder les bornes d'un juste volume, ou parceque les cas n'étoient pas difficiles, & quelquesfois parcequ'il auroit fallu changer les dénominations & l'ordre des raisonnemens.

J'ajoûterai seulement ici, pour faire encore mieux voir en particulier l'usage & l'application des triples égalitez, la résolution d'un problême qui a été proposé à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, & sur lequel ils ont bien voulu travailler. Mr Ozanam en a déja fourni trois ou quatre résolutions différentes dans un Traitté des lignes qui commence à paroître, & on pourroit en fournir beaucoup d'autres. Celle que je donne ici sera tirée d'une triple égalité, où l'on arrive d'abord avec une extrême facilité, & sans rien supposer. J'en tirerai ensuitte quelques résolutions, qui s'y rapportent naturellement. Le problême peut-être proposé en ces termes.

XXXVII QUESTION.

58. *Pour coupper une grandeur connuë en quatre parties, dont les six différences alternatives soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé $4a$ la grandeur connuë, & z la premiére ou la plus grande de ses quatre parties, & y la seconde ou la plus grande ensuitte, & x la troisiéme, & v la quatriéme ou la moindre; & $2t$ le côté de la différence $z - y$, & $2s$ le côté de la différence $z - x$, & $2r$ le côté de la différence $z - v$: on aura une premiére égalité $z - y \propto 4tt$, ou $z \propto 4tt + y$; & une seconde $z - x \propto 4ss$, ou $z \propto 4ss + x \propto 4tt + y$, & $y \propto 4ss + x - 4tt$; & une troisiéme $z - v \propto 4rr$, ou $z \propto 4rr + v \propto 4tt + y$, & $y \propto 4rr + v - 4tt \propto 4ss + x - 4tt$, & $x \propto 4rr + v - 4ss$. Et la somme des quatre parties z, y, x, v, ou de leurs valeurs $4rr + v$, $4rr + v - 4tt$, $4rr + v - 4ss$, sera $4v + 12rr - 4tt - 4ss \propto 4a$. D'où l'on tirera une valeur $v \propto 1a - 3rr + tt + ss$, & ensuitte une valeur $z \propto 1a + 1rr + tt + ss$, & une $y \propto 1a + rr - 3tt + ss$, & une autre $x \propto 1a + rr + tt - 3ss$. Et pour achever la résolution, il faut encore que les trois différences $y - x$, $y - v$, $x - v$, ou que leurs valeurs $4ss - 4tt$, $4rr - 4tt$, $4rr - 4ss$, soient des quarrez parfaits. De sorte que la question se réduit à trouver trois quarrez rr, ss, tt, dont les différences alternatives soient au juste des quarrez.

C'est pourquoi on prendra $q + t$ pour r, & $p + t$ pour s. Et les trois différences $rr - tt$, $ss - tt$, $rr - ss$, seront changées en celle-ci $qq + 2qt$, $pp + 2pt$, $qq + 2qt - pp - 2pt$, qui formeroient une triple égalité
b. 1. 7. si $qq - pp$ étoit un quarré, ce qu'il est aisé d'obtenir, en [b] prenant $nnl + mml$ pour q, & $nnl - mml$ pour p. De sorte que si pour abbréger, on prend encore f pour $nn + mm$, & g pour $nn - mm$; la triple égalité $qq + 2qt$, $pp + 2pt$, $qq + 2qt - pp - 2pt$, sera changée en celle-ci $ffll + 2flt$, $ggll + 2glt$, $4nnmmll + 4mmlt$. Et lorsqu'on aura multiplié la premiére de ces trois grandeurs par le quarré $ggnn$, & la seconde par le quarré $ffnn$, & la troisiéme par le quarré $\frac{ffgg}{4mm}$; les trois produits $ffggnnll + 2fggnnlt$, $ffggnnll + 2ffgnnlt$, $ffggnnll + ffgglt$, auront un quarré commun $ffggnnll$; & il sera par conséquent facile de déterminer t, en rapportant la triple égalité au premier cas de la question quatorziéme; ou de déterminer l, en rapportant la triple égalité au premier cas de la question quinziéme: ce qui donneroit de part & d'autre une même résolution. La grandeur a connuë doit surpasser $3rr - tt - ss$. On peut ôter les dénominateurs communs des quarrez rr, ss, tt, & leur donner tel quarré qu'on voudra pour dénominateur, pourvû que la partie a reste toûjours plus grande que $3rr - tt - ss$. S'il falloit simplement trouver trois quarrez, dont les différences alternatives fussent des quarrez parfaits, on auroit une résolution en entiers, aprés avoir ôté le dénominateur commun des quarrez découverts rr, ss, tt.

Suppositions.

$\left\{ \begin{array}{l} 1^{er}\ \textit{quarré}\ z - y \propto 4tt.\ 2^{d}\ z - x \propto 4ss.\ 3^{e}\ z - v \propto 4rr.\ 4^{e}\ y - x \propto 4ss - 4tt. \\ 5^{e}\ y - v \propto 4rr - 4tt.\ 6^{e}\ x - v \propto 4rr - 4ss. \end{array} \right.$ $\{ z + y + x + v \propto 4a.$

Résolution infinie.

$n. m. l.$ *arbitraires.* $\{ f \propto nn + mm.\ g \propto nn - mm.\ k \propto \frac{12n^5 + 4nm^4}{22n^4m^4 + m^8 - 7n^8}.$

$1t \propto \frac{8nnm^{16}l - 128n^6m^{12}l - 304n^{10}m^8l + 448n^{14}m^4l - 24n^{18}l}{49n^{16} - 308n^{12}m^4 + 470n^8m^8 + 44n^4m^{12} + 1m^{16}}$

$\propto 2kfgnl + kkffgl.\ 1s \propto nnl - mml + t.\ 1r \propto nnl + mml + t.$

1^{ere} *partie* $z \propto 1a + tt + rr + 1ss.$ 2^e *partie* $y \propto 1a - 3tt + rr + ss.$

3^e *partie* $x \propto 1a + tt + rr - 3ss.$ 4^e *partie* $v \propto 1a + tt - 3rr + ss.$

Exemple.

$4a \propto 5.\ n \propto 2.\ m \propto 1.\ f \propto 5.\ g \propto 3.\ \{ k \propto -\frac{392}{1439}.\ 1t \propto \frac{729120ll}{2070721}.$

$1l \propto \frac{1}{10}.\ \{ 1t \propto \frac{729120}{20707210}.\ 1s \propto \frac{6941283}{20707210}.\ 1r \propto \frac{11082725}{20707210}.$

1^{ere} *partie* $z \propto \frac{707525501566239}{428788545984100}.$ $2^e\ y \propto \frac{705399037668639}{428788545984100}.$

3^e *partie* $x \propto \frac{514799862821883}{428788545984100}.$ $4^e\ v \propto \frac{216218327863739}{428788545984100}.$

Quarrez

$1^{er}\ z - y \propto \frac{2126463897600}{428788545984100}.$ $2^d\ z - x \propto \frac{192725638744356}{428788545984100}.$

$3^e\ z - v \propto \frac{491307173702500}{428788545984100}.$ $4^e\ y - x \propto \frac{190599174846756}{428788545984100}.$

$4^e\ y - v \propto \frac{489180709804900}{428788545984100}.$ $5^e\ x - v \propto \frac{298581534958144}{428788545984100}.$

Côtez. $\frac{1458240}{20707210}.\ \frac{13882566}{20707210}.\ \frac{22165450}{20707210}.\ \frac{13805766}{20707210}.\ \frac{22117430}{20707210}.\ \frac{17279512}{20707210}.$

AUTRE MANIERE.

Comme la question qu'on a proposée rentre dans celle-ci, de trouver trois quarrez rr, ss, tt, dont les différences alternatives $rr - ss$, $rr - tt$, $ss - tt$, soient des quarrez; on pourra encore tenter la résolution en cette maniére. On prendra une grandeur $qq + pp$ pour r, & une autre $nn + mm$ pour s; & $qq - pp$ pour côté du quarré $rr - tt$, & $nn - mm$ pour côté du quarré $ss - tt$. Ce qui donnera d'une part $4qqpp$ pour tt, ou $2qp$ pour t, & de l'autre $4nnmm$ pour tt, ou $2nm$ pour t. Et ainsi il y aura égalité entre qp & nm. Si donc on prend lk pour q, & hg pour p, & lh pour n; il faudra nécessairement qu'on prenne kg pour m. Et ainsi la grandeur r ou $qq + pp$ sera $llkk + hhgg$, & l'autre s ou $nn + mm$ sera $llhh + kkgg$. Et la grandeur $rr - ss$ qui reste à quarrer, sera $l^4k^4 + h^4g^4 - l^4h^4 - k^4g^4$. Ce qui seroit au juste un quarré, s'il y avoit égalité entre lh & kg, & le côté seroit $llkk - hhgg$. Mais comme on ne peut faire cette supposition, puisque le côté $llhh - kkgg$ deviendroit nul; lh surpasse gk, & k par conséquent vaut moins que $\frac{lh}{g}$. Si donc f est la différence, on aura $k \propto \frac{gf + lh}{g}$. Et substituant pour k sa valeur dans la grandeur $l^4k^4 + h^4g^4 - l^4h^4 - k^4g^4$, elle sera changée en celle-ci $\frac{l^8h^4 - 2l^4g^4h^4 + g^8h^4}{g^4} + \frac{4l^7gfh^3 - 4l^3g^5fh^3}{g^4} + \frac{6l^6ggffhh - 6llg^6ffhh}{g^4}$ $+ \frac{4l^5g^3f^3h - 4lg^7f^3h}{g^4} + \frac{l^4g^4f^4 - g^8f^4}{g^4}$. Et afin que ſon numérateur ſoit au juſte un quarré, on nommera ſon côté $l^4hh - g^4hh + 2l^3gfh + \frac{l^6ggff - 3llg^6ff}{l^4 - g^4}$. Et comparant tout par ordre ſelon les régles ordinaires, la tranſpoſition fournira cette égalité $6l^4g^{12}f^4 + b^{16}f^4 - 3l^8g^8f^4 \infty 4l^9g^7f^3h - 4lg^{15}f^3h$; d'où l'on tire une valeur $y \infty \frac{6l^4g^5f + g^9f - 3l^8gf}{4l^9 - 4lg^8}$. Et f eſt arbitraire. Mais ſi on veut diviſer tout par f, & donner un commun dénominateur, pour l'ôter enſuitte, on trouvera comme Mr Ozanam une valeur $y \infty 6l^4g^5 + g^9 - 3l^8g$, & une $z \infty 4l^9 - 4lg^8$, & une autre $x \infty 6l^5g^4 + l^9 - 3lg^8$; & les deux l & g ſeront arbitraires. Le reſte ſera facile enſuitte, je ne m'y arreſte pas, parceque j'en veux tirer une réſolution plus ſimple que la premiére de Mr Ozanam, qui n'a pas ſçû ménager avec aſſez d'adreſſe cette même découverte. On changera les ſignes de la valeur de t, afin qu'elle ſoit poſitive, parcequ'il n'importe pas pour ôter ſon quarré, qu'elle en ſoit un côté poſitif ou un côté négatif.

Suppoſitions.

{1er *quarré* $rr - tt \infty q^4 - 2ppqq + p^4$. 2e $ſſ - tt \infty n^4 - 2nnmm + m^4$. 3e $rr - ſſ \infty xx$.

Reſolution infinie.

$$\begin{cases} r \infty l^{20} + 21l^{16}g^4 - 6l^{12}g^8 - 6l^8g^{12} + 21l^4g^{16} + g^{20}. \\ ſ \infty 10l^{18}gg - 24l^{14}g^6 + 60l^{10}g^{10} - 24l^6g^{14} + 10llg^{18}. \\ t \infty 6l^{18}gg + 24l^{14}g^6 - 92l^{10}g^{10} + 24l^6g^{14} + 6llg^{18}. \end{cases}$$

Exemple.

{$l \infty 2$. $g \infty 1$. {$r \infty 2399058$. $ſ \infty 2288168$. $t \infty 1873432$. &c.

I COROLLAIRE.

59. CEtte réſolution a cela de particulier, que les trois côtez r, $ſ$, t, ont pour leurs ſommes alternatives, & pour leurs différences alternatives ſix quarrez parfaits, comme il eſt aiſé de le voir. Les côtez des ſommes alternatives ſont, le premier $l^{10} + 5l^8gg - 2l^6g^4 - 2l^4g^6 + 5llg^8 + g^{10}$, le ſecond $l^{10} + 3l^8gg + 6l^6g^4 - 6l^4g^6 - 3llg^8 - g^{10}$, & le troiſiéme $4l^9g - 4lg^9$. Et les côtez des différences alternatives ſont, le premier $l^{10} - 5l^8gg - 2l^6g^4 + 2l^4g^6 + 5llg^8 - l^{10}$, le ſecond $l^{10} - 3l^8gg + 6l^6g^4 + 6l^4g^6 - 3llg^8 + g^{10}$, & le troiſiéme $2l^9g - 12l^5g^5 + 2lg^9$.

II COROLLAIRE.

60. ON peut toûjours rapporter à une même réſolution, la queſtion qui demande trois grandeurs dont les ſommes alternatives & les

différences alternatives soient six quarrez parfaits; & celle où l'on demande qu'une grandeur connuë soit couppée en quatre parties, dont les différences alternatives soient encore six quarrez au juste. Car si on veut que les sommes & les différences alternatives de trois grandeurs y, x, v, soient des quarrez parfaits. On pourra nommer $4rr$ la somme $y + x$, ou prendre $4rr - x$ pour y; & nommer ensuitte $4ss$ la somme $y + v$. D'où l'on tirera une valeur $y \propto 4ss - v \propto 4rr - x$, & une autre $x \propto 4rr - 4ss + v$, & nommant encore $4tt$ la somme $x + v$, on aura une autre valeur $x \propto 4tt - v \propto 4rr - 4ss + v$, qui fournira enfin une valeur $2v \propto 4tt + 4ss - 4rr$. Et ainsi les trois grandeurs seront $1v \propto 2tt + 2ss - 2rr$, & $1x$ ou $4tt - v \propto 2tt - 2ss + 2rr$, & $1y$ ou $4ss - v \propto -2tt + 2ss + 2rr$. Et il faudra pour achever la résolution, que les trois différences $y - x \propto 4ss - 4tt$, & $y - v \propto 4rr - 4tt$, & $x - v \propto 4rr - 4ss$, soient des quarrez au juste. De sorte que la question se réduit comme la précédente à trouver trois quarrez rr, ss, tt, dont les différences alternatives $rr - ss$, $rr - tt$, $ss - tt$, soient des quarrez parfaits. D'où il est aisé de conclurre qu'il suffiroit de prendre au premier corollaire, les trois côtez $l^{10} + 5l^8gg - 2l^6g^4 - 2l^4g^6 + 5llg^8 + g^{10}$, $l^{10} + 3l^8gg + 6l^6g^4 - 6l^4g^6 - 3llg^8 - g^{10}$, $4l^9g - 4lg^9$, pour les côtez r, s, t, sans être obligé de prendre les grandeurs précédentes, qui montent au vintiéme degré. Et c'est ce que Mr Ozanam n'a point apperceu. On formera donc, comme on le voit ici, la résolution infinie de la question 58e d'une maniére plus simple de la moitié que celle de l'Auteur. Je pourrois encore tirer de nouvelles conséquences de cette résolution, si j'avois dessein de m'y arrêter, ou de donner simplement une résolution détachée.

Suppositions.

1er quarré $z - y \propto 4tt$. 2d $z - x \propto 4ss$. 3e $z - v \propto 4rr$. 4e $y - x \propto 4ss - 4tt$.
5e $y - v \propto 4rr - 4tt$. 6e $x - v \propto 4rr - 4ss$. $z + y + x + v \propto 4a$.

Résolution infinie.

l. g. f. arbitraires. $r \propto l^{10}f + 5l^8ggf - 2l^6g^4f - 2l^4g^6f + 5llg^8f + g^{10}f$.
$s \propto l^{10}f + 3l^8ggf + 6l^6g^4f - 6l^4g^6f - 3llg^8f - g^{10}f$. $t \propto 4l^9gf - 4lg^9f$.
1ere partie $z \propto 1a + tt + ss + rr$. 2e partie $y \propto 1a - 3tt + ss + rr$.
3e partie $x \propto 1a + tt - 3ss + rr$. 4e partie $v \propto 1a + tt - 3rr + ss$.

Exemple.

$l \propto 2$. $g \propto 1$. $f \propto \frac{1}{4000}$. $r \propto \frac{2165}{4000}$. $s \propto \frac{2067}{4000}$. $t \propto \frac{2040}{4000}$. $z \propto \frac{33121314}{16000000}$.
$y \propto \frac{16474914}{16000000}$. $x \propto \frac{16031358}{16000000}$. $v \propto \frac{14372414}{16000000}$. $z + y + x + v \propto \frac{80000000}{16000000}$.
1er quarré $z - y \propto \frac{16646400}{16000000}$. 2d $z - x \propto \frac{17089956}{16000000}$. 3e $z - x \propto \frac{18748900}{16000000}$.
4e quarré $y - x \propto \frac{443556}{16000000}$. 5e $y - v \propto \frac{2102500}{16000000}$. 6e $x - v \propto \frac{1658944}{16000000}$.
Côtez. $\frac{4080}{4000}$. $\frac{4134}{4000}$. $\frac{4330}{4000}$. $\frac{666}{4000}$. $\frac{1450}{4000}$. $\frac{1288}{4000}$.

XXXVIII QUESTION.

61. *POur trouver quatre grandeurs, telles que les différences alternatives ſoient ſix quarrez parfaits; & de plus que trois d'entr'elles étant priſes alternativement deux à deux, les trois ſommes ſoient encore des quarrez parfaits.*

On prendra premiérement par la réſolution précédente trois quarrez rr, ss, tt, dont les différences alternatives ſoient déja des quarrez, & enſuitte trois grandeurs $y \propto 2rr + 2ss - 2tt$, $v \propto 2rr - 2ss + 2tt$, $v \propto -2rr + 2ss + 2tt$, dont les ſommes & les différences alternatives fourniront déja ſix quarrez parfaits. Et pour achever la réſolution, il faudra ſuppoſer une nouvelle grandeur z, & faire en ſorte que les trois différences $z - y$, $z - x$, $z - v$, ſoient au juſte des quarrez. Nommant donc $2q$ le côté du premier, & $2p$ le côté du ſecond, & $2n$ le côté du troiſiéme; on aura une valeur $z \propto 4qq + y \propto 4pp + x \propto 4nn + v$. Et mettant ici pour y, x, v, leurs valeurs; on aura $z \propto 4qq + 2rr + 2ss - 2tt \propto 4pp + 2rr - 2ss + 2tt \propto 4nn + 2ss - 2rr + 2tt$, où il eſt viſible qu'en prenant q pour t, & p pour s, & n pour r, on aura toûjours une même valeur $z \propto 2rr + 2ss + 2tt$. Et la réſolution eſt d'autant plus facile & plus courte, qu'il n'eſt pas néceſſaire pour découvrir z de recourir aux triples égalitez.

Ainſi lors qu'on inſéra au Journal des Sçavans en 1682, la réſolution de la même queſtion, l'Auteur apparemment n'avoit pas tout à fait ſuivi la même méthode, puis qu'en ſuppoſant déja la réſolution de M^r^ Ozanam, il employoit une triple égalité pour achever le reſte : ſi ce n'eſt peut-être qu'il ait voulu nommer triple égalité une comparaiſon ſemblable à celle que j'ai faite des trois valeurs d'une même inconnuë z. Ce qui ſeroit uſer improprement d'un terme, auquel on eſt convenu d'attacher toute une autre idée. Et s'il entend par triple égalité ce qu'entendent les autres; il eſt clair, en conſidérant les comparaiſons que l'on vient d'ordonner, qu'il a ſuivi des voyes moins naturelles. Peut-être même que le problême n'eſt pas ſi pleinement réſolu qu'il ſemble le promettre. Car Mr Ozanam peut avoir eü en veuë de trouver neuf quarrez tous différens entr'eux, ou tout au moins qui ne fuſſent pas ſeulement réduits à ſix.

On peut remarquer en paſſant qu'il n'eſt pas neceſſaire d'employer cette réſolution, comme a fait Mr Ozanam, pour trouver celle de la queſtion 58^e^, parce que la 60^e^ fournit la même choſe plus naturellement.

Pour faire au reſte que chacune des grandeurs ſoit réelle; il eſt néceſſaire que le quarré rr ſoit moindre que les deux autres enſemble ss & tt. S'il étoit plus grand, comme au ſecond exemple, la grandeur v ſeroit négative. Et ſi on la rendoit poſitive en changeant les ſignes; la queſtion ſeroit réſoluë poſitivement pour un autre cas, où les cinq différences

$z - y$, $z - x$, $y - x$, $y - v$, $x - v$, & les quatre ſommes $z + v$, $y + x$, $y + v$, $x + v$, ſeroient autant de quarrez parfaits.

Suppoſitions.

1^{er} *quarré* $z - y \propto 4qq$. 2^{d} $z - x \propto 4pp$. 3^{e} $z - v \propto 4nn$. 4^{e} $y + x \propto 4rr$.
5^{e} $y + v \propto 4ss$. 6^{e} $x + v \propto 4tt$. 7^{e} $y - x \propto 4rr - 4ss$.
8^{e} $y - v \propto 4rr - 4tt$. 9^{e} $x - v \propto 4ss - 4tt$.

Réſolution infinie.

$l.g.$ *arbitraires*. $2r \propto l^{10} + 5l^{8}g - 2l^{6}g^{4} - 2l^{4}g^{6} + 5llg^{8} + g^{10}$.
$2s \propto l^{10} + 3l^{8}gg + 6l^{6}g^{4} - 6l^{4}g^{6} - 3llg^{8} - g^{10}$. $2t \propto 4l^{9}g - 4lg^{9}$.
1^{ere} *grandeur* $z \propto 2rr + 2ss + 2tt$. 2^{e} *grandeur* $y \propto 2rr + 2ss - 2tt$.
3^{e} *grandeur* $x \propto 2rr - 2ss + 2tt$. 4^{e} *grandeur* $v \propto - 2rr + 2ss + 2tt$.

Exemple.

$l \propto 2$. $g \propto 1$. $\{ 2r \propto 2165$. $2s \propto 2067$. $2t \propto 2040$. $\{ z \propto 6560657$. $y \propto 2399057$.
$x \propto 2288168$. $v \propto 1873432$. $\{ 1^{er}$ & 6^{e} *quarré* $z - y \propto x + v \propto 4161600$.
2^{d} & 5^{e} *quarré* $z - x \propto y + v \propto 4272489$. 3^{e} & 4^{e} $z - v \propto y + x \propto 4687225$.
7^{e} $y - x \propto 110889$. 8^{e} $y - v \propto 525625$. 9^{e} $x - v \propto 414736$.
Côtez. 2040. 2067. 2165. 333. 725. 644.

Réſolution infinie d'une nouvelle eſpêce.

$n.m.l.$ *arbitraires*. $\{ f \propto nn + mm$. $g \propto nn - mm$. $k \propto \frac{12n^{5} + 4nm^{4}}{22n^{4}m^{4} + m^{8} - 7n^{8}}$.
$2t \propto 2kfgnl + kkffggl$. $2s \propto nnl - mml + 1t$. $2r \propto nnl + mml + 1t$.
$z \propto 2rr + 2ss + 2tt$. $y \propto 2rr + 2ss - 2tt$. $x \propto 2rr - 2ss + 2tt$. $v \propto - 2rr + 2ss + 2tt$.

Exemple négatif,

Ou réſolution poſitive pour un autre cas.

$n \propto 2$. $m \propto 1$. $f \propto 5$. $g \propto 3$. $\{ k \propto - \frac{392}{1439}$. $l \propto 1439$. $\{ 2t \propto 72910$.
$2s \propto 6941283$. $2r \propto 11082725$. $\{ z \propto 8576990954305 7$. $y \propto 852382935686 57$.
$x \propto 37588499856968$. $v \propto - 37056883882568$. $\{ 1^{er}$ & 6^{e} *quarré* $z - y$
$\propto x + v \propto 531615974400$. 2^{d} & 5^{e} $z - x \propto y + v \propto 48181409686089$.
3^{e} & 4^{e} $z - v \propto y + x \propto 122826793425625$. 7^{e} $y - x \propto 47649793711689$.
8^{e} $y - v \propto 122295177451225$. 9^{e} $x - v \propto 74645383739536$.
Côtez. 72910. 6941283. 11082725. 6902883. 11058715. 8639756.

DE LA METHODE DE DIOPHANTE

POUR LA RESOLUTION DES DOUBLES EGALITEZ.

IL eſt néceſſaire de toucher ici quelque choſe de la méthode que Diophante & ſes Commentateurs ſuivent dans la réſolution des doubles égalitez, afin que ceux qui les veulent lire les puiſſent entendre plus facilement.

En premier lieu, ſi l'inconnu n'eſt que linéaire, comme s'il faut quarrer $2z + 12$ & $2z + 5$; on prend la différence 7, & deux nombres comme 1 & 7 dont elle eſt un produit. La ſomme de ces deux nombres eſt 8, & 6 en eſt la différence. Et ſi on égale le quarré 16 de la demie-ſomme 4 à $2z + 12$, ou le quarré 9 de la demie-différence 3 à $2z + 5$; on trouvera de part & d'autre une même valeur 2 de l'inconnuë z.

Et ſi l'inconnu avoit deux dimenſions, comme s'il falloit quarrer $4zz + 20z + 8$ & $4zz + 4z - 8$; on prendroit la différence $16z + 16$, & deux grandeurs 4 & $4z + 4$ dont elle eſt un produit. La ſomme de ces grandeurs eſt $4z + 8$, & leur différence eſt $4z$. Et le quarré de la demie-ſomme $2z + 4$ étant égalé à $4zz + 20z + 8$, ou le quarré de la demie-différence $2z$ étant égalé à $4zz + 4z - 8$, donne une même valeur 2 de z. Il faut faire en ſorte que la ſomme ait une partie telle que le quarré de ſa moitié ſoit celuy qui doit eſtre effacé, comme le quarré $4zz$ de la moitié $2z$.

Et s'il falloit quarrer $3zz + 64 - 48z$ & $4zz + 64 - 32z$; on prendroit la différence $1zz + 16z$, & ſes côtez $1z$ & $1z + 16$, parce que le quarré 64 de la moitié 8 de 16 ſe trouve de part & d'autre. Et aprés avoir égalé le quarré de la demie-ſomme $1z + 8$ des côtez à $4zz + 64 - 32z$, ou le quarré de la demie-différence 8 à $3zz + 64 - 48z$; on trouveroit de part & d'autre une même valeur 16 de l'inconnuë z.

Monſieur de Meziriac a traitté cette matiére avec aſſez d'étenduë. Et on peut voir ce que le Pere de Billi a recueilli là-deſſus des inventions de Monſieur De Fermat. Je ne m'y arreterai pas, puiſque la méthode que nous avons ſuivie, & les régles que nous avons preſcrites au quatriémé Livre ont quelque choſe de plus ſimple & de mieux digéré.

NOUVEAUX

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SIXIEME.

DE L'ANALYSE INDETERMINE'E.

DES QUESTIONS,

Où l'on cherche ou propose au moins quelques cubes, ou d'autres puissances plus élevées.

I QUESTION.

PREMIER CAS.

1. *POur trouver un cube & un quarré, tels qu'ayant ajoûté à chacun un autre quarré, qu'il faut encore trouver; la premiére somme soit un cube, & la seconde un quarré.*

Ayant nommé z le côté du premier cube, & zy le côté du quarré qui doit être ajoûté, & zx le côté de la somme cubique; & zv le côté du premier quarré, & zt le côté de la somme quarrée. La premiére égalité sera $z^3 + zzyy \propto z^3x^3$. Ou $zx^3 - 1z \propto yy$. Et $z \propto \frac{yy}{x^3 - 1}$. Et la seconde égalité sera $zzvv + zzyy \propto zztt$. Ou $vv + yy \propto tt$. Et comme il est facile de trouver un quarré tt égal à deux vv & yy, en [b] prenant $ff + rr$ pour t, & $ff - rr$ pour v, & $2fr$ pour y; la résolution sera infiniment résoluë. Et les trois grandeurs x, f, r, seront arbitraires. Mais x surpassera l'unité. b. 10. 3.

1^{ere} *supposition* $\{ z^3 + zzyy \propto z^3x^3.$ 2^e $\{zzvv + zzyy \propto zztt.$

Résolution infinie.

$\{x. s. r.$ *arbitraires.* $\{v \propto ss - rr.$ $y \propto 2sr.$ $t \propto ss + rr.$ $\{z \propto \frac{yy}{x^3 - 1}.$ $zy \propto \frac{y^3}{x^3 - 1}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} x \propto 2.\ s \propto 2.\ r \propto 1.\ v \propto 3.\ y \propto 4.\ t \propto 5.\ \{z \propto \frac{16}{7}.\ zv \propto \frac{48}{7}.\ zy \propto \frac{64}{7}. \\ z^3 + zzyy \propto \frac{32768}{343}.\ zx \propto \frac{32}{7}.\ \{zzvv + zzyy \propto \frac{6400}{49}.\ zt \propto \frac{80}{7}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

2. *ET si on ôte du cube & du quarré l'autre quarré inconnu; afin que le premier reste soit un autre cube, & le second un quarré.*
Ayant dénommé les grandeurs, & formé ses raisonnemens comme au premier cas, on découvrira la résolution de la même sorte. Et l'arbitraire x sera moindre que l'unité.

1^{ere} *supposition* $\{ z^3 - zzyy \propto z^3x^3.$ 2^e $\{zzvv - zzyy \propto zztt.$

Résolution infinie.

$\{x. s. r.$ *arbitraires.* $\{v \propto ss + rr.$ $y \propto 2sr.$ $t \propto ss - rr.$ $\{z \propto \frac{yy}{1 - x^3}.$ $zy \propto \frac{y^3}{1 - x^3}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} x \propto \frac{1}{2}.\ s \propto 2.\ r \propto 1.\ v \propto 5.\ y \propto 4.\ t \propto 3.\ \{z \propto \frac{128}{7}.\ zv \propto \frac{640}{7}.\ zy \propto \frac{512}{7}. \\ z^3 - zzyy \propto \frac{262144}{343}.\ zx \propto \frac{64}{7}.\ \{zzvv - zzyy \propto \frac{147456}{49}.\ zt \propto \frac{384}{7}. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

3. *ET si on ajoûte le nouveau quarré au cube, & qu'on l'ôte du premier quarré; afin que la somme soit un cube, & le reste un quarré.*
On suivra toûjours la méthode. Et l'arbitraire x surpassera l'unité.

1^{ere} *supposition* $\{ z^3 + zzyy \propto z^3x^3.$ 2^e $\{ zzvv - zzyy \propto zztt.$

Résolution infinie.

$\{x. s. r.$ *arbitraires.* $\{v \propto ss + rr.$ $y \propto 2sr.$ $t \propto ss - rr.$ $\{z \propto \frac{yy}{x^3 - 1}.$ $zy \propto \frac{y^3}{x^3 - 1}.$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} x \propto 2.\ s \propto 2.\ r \propto 1.\ v \propto 5.\ y \propto 4.\ t \propto 3.\ \{z \propto \frac{16}{7}.\ zv \propto \frac{80}{7}.\ zy \propto \frac{64}{7}. \\ z^3 + zzyy \propto \frac{32768}{343}.\ zx \propto \frac{32}{7}.\ \{zzvv - zzyy \propto \frac{2304}{49}.\ zt \propto \frac{48}{7}. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

4. *ET si on ôte le nouveau quarré du cube, & qu'on l'ajoûte au premier quarré; afin que le reste soit un cube, & la somme un quarré.*

La résolution sera positive, lorsque l'arbitraire x vaudra moins que l'unité.

1^{ere} *supposition* $\{ z^3 - zzyy \infty z^3x^3$. 2^e $\{ zzvv + zzyy \infty zztt$.

Résolution infinie.

$\{ x.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $\{ v \infty ss - rr.\ y \infty 2sr.\ t \infty ss + rr.\ \{ z \infty \frac{yy}{1 - x^3}.\ zy \infty \frac{y^3}{1 - x^3}.$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \infty \frac{1}{2}.\ s \infty 2.\ r \infty 1.\ v \infty 3.\ y \infty 4.\ t \infty 5.\ \{ z \infty \frac{128}{7}.\ zv \infty \frac{384}{7}.\ zy \infty \frac{512}{7}. \\ z^3 - zzyy \infty \frac{262144}{343}.\ zx \infty \frac{64}{7}.\ \{ zzvv + zzyy \infty \frac{409600}{49}.\ zt \infty \frac{640}{7}. \end{array} \right.$$

CINQUIEME CAS.

5. *ET si on ôte le cube même & le premier quarré du nouveau quarré; afin que le premier reste soit un cube, & le second un quarré.*

L'arbitraire x n'aura point de limites. Et la résolution sera toûjours réelle.

1^{ere} *supposition* $\{ zzyy - z^3 \infty z^3x^3$. 2^e $\{ zzyy - zzvv \infty zztt$.

Résolution infinie.

$\{ x.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $\{ v \infty ss - rr.\ y \infty ss + rr.\ t \infty 2sr.\ \{ z \infty \frac{y^3}{x^3 + 1}.\ zy \infty \frac{y^3}{x^3 + 1}.$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \infty 1.\ s \infty 2.\ r \infty 1.\ v \infty 3.\ y \infty 5.\ t \infty 4.\ \{ z \infty \frac{25}{2}.\ zv \infty \frac{75}{2}.\ zy \infty \frac{125}{2}. \\ zzyy - z^3 \infty \frac{15625}{8}.\ zx \infty \frac{25}{2}.\ \{ zzyy - zzvv \infty 2500.\ zt \infty 50. \end{array} \right.$$

SIXIEME CAS.

6. *ET si on ôte le cube du nouveau quarré, & que les deux quarrez soient ajoûtez ensemble; afin que le reste soit un cube, & la somme un quarré.*

La résolution, comme la précédente sera toûjours réelle. Et l'arbitraire x n'aura point de limites.

1^{ere} *supposition* $\{ zzyy - z^3 \infty z^3x^3$. 2^e $\{ zzyy + zzvv \infty zztt$.

Résolution infinie.

$\{ x.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $\{ v \infty ss - rr.\ y \infty 2sr.\ t \infty ss + rr.\ \{ z \infty \frac{yy}{x^3 + 1}.\ zy \infty \frac{y^3}{x^3 + 1}.$

Exemple.

$\left\{ x \propto 1.\ s \propto 2.\ r \propto 1.\ v \propto 3.\ y \propto 4.\ t \propto 5.\ \left\{ z \propto 8.\ zv \propto 24.\ zy \propto 32. \right. \right.$
$zzyy - z^3 \propto 512.\ zx \propto 8.\ \left\{ zzyy + zzvv \propto 1600.\ zt. \propto 40. \right.$

SEPTIEME CAS.

7. *ET enfin ſi on ajoûte au cube le nouveau quarré , & qu'on le retranche du premier quarré ; afin que la ſomme ſoit un cube , & le reſte un quarré.* La réſolution ſera poſitive, lorſque l'arbitraire x ſurpaſſera l'unité.

1^ere^ *ſuppoſition* $\{ z^3 + zzyy \propto z^3x^3.$ 2^e^ $\{ zzyy - zzvv \propto tt.$

Réſolution infinie.

$\{ x.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $\{ v \propto ss - rr.\ y \propto ss + rr.\ t \propto 2sr.\ \left\{ z \propto \frac{yy}{x^3 - 1}.\ zy \propto \frac{y^3}{x^3 - 1}. \right.$

Exemple.

$\left\{ x \propto 2.\ s \propto 2.\ r \propto 1.\ v \propto 3.\ y \propto 5.\ t \propto 4.\ \left\{ z \propto \frac{25}{7}.\ zv \propto \frac{75}{7}.\ zy \propto \frac{125}{7}. \right. \right.$
$z^3 + zzyy \propto \frac{125000}{343}.\ zx \propto \frac{50}{7}.\ \left\{ zzyy - zzvv \propto \frac{10000}{49}\ zt \propto \frac{100}{7}. \right.$

II QUESTION.

PREMIER CAS.

8. *POur trouver un cube & un quarré, tels qu'ayant ajoûté à chacun un même quarré, qu'il faut encore trouver ; la premiére ſomme ſoit un quarré, & la ſeconde un cube.*

Ayant nommé z le côté du premier cube, & zy le côté du quarré qui doit être ajoûté, & zx le côté de la ſomme quarrée ; & zv le côté du premier quarré, & zt le côté de la ſomme cubique. La premiére égalité ſera $z^3 + zzyy \propto zzxx$. Ou $z \propto xx - yy$. Et la ſeconde $zzvv + zzyy \propto z^3t^3$. Ou $z \propto \frac{vv + yy}{t^3} \propto xx - yy$. Et multipliant de part & d'autre par t^3, on aura l'égalité nouvelle $vv + yy \propto xxt^3 - t^3yy$. Ou $vv \propto xxt^3 - yyt^3 - 1yy$. Et prenant ss pour t, afin que la partie xxt^3 ſoit un quarré parfait ; la même égalité ſera $vv \propto xxs^6 - yys^6 - 1yy$. Et prenant $xs^3 - r$ ou $r - xs^3$ pour v ; le quarré vv ſera $xxs^6 - yys^6 - 1yy \propto xxs^6 - 2rxs^3 + rr$. Ou $2rxs^3 \propto rr + yys^6 + 1yy$. Et $x \propto \frac{rr + yys^6 + 1yy}{2rs^3}$.

1^ere^ *ſuppoſition* $\{ z^3 + zzyy \propto zzxx.$ 2^e^ $\{ zzvv + zz \propto z^3t^3.$

Réſolution infinie.

$\{ r.\ y.\ s.$ *arbitraires.* $x \propto \frac{rr + yys^6 + 1yy}{2rs^3}.\ v \propto r - s^3x.\ z \propto xx - yy.$

Exemple.

r.	y.	ſ.	x.	v.	z.	*Quarré.*	*Côté.*	*Cube.*	*Côté.*
4.	2.	1.	3.	1.	5.	$z^3 + zzyy \propto 225.$	$zx \propto 15.$	$zzvv + zzyy \propto 125.$	$zss \propto 5.$

Exemples.

r.	*y.*	*ſ.*	*x.*	*v.*	*z.*	*Quarré.*	*Côté.*	*Cube.*	*Côté.*
6.	1.	1.	3.	3.	10.	$z^3 - zzyy \propto 900.$	$zx \propto 30.$	$zzvv + zzyy \propto 1000.$	$zſſ \propto 10.$
4.	1.	1.	2.	2.	5.	$z^3 - zzyy \propto 100.$	$zx \propto 10.$	$zzvv + zzyy \propto 125.$	$zſſ \propto 5.$

CINQUIEME CAS.

12. *ET si on ôte le cube & le premier quarré du nouveau quarré ; afin que le premier reste soit un quarré, & le second un cube.*

Comme x ou sa valeur $\frac{rr + ſ^6yy - 1yy}{2rſ^3}$ vaut moins que le côté y ; le numérateur $rr + ſ^6yy - yy$ vaut moins que le produit $2rſ^3y$. Et par conséquent l'arbitraire r vaut [b] moins que $ſ^3y + 1y$.

b. 23. 1.

1^{ere} *supposition* $\{zzyy - z^3 \propto zzxx.$ 2^e $\{zzyy - zzvv \propto z^3t^7.$

Résolution infinie.

$\{r.\ y.\ ſ.$ *arbitraires.* $\{x \propto \frac{rr + ſ^6yy - 1yy}{2rſ^3}.\ v \propto r - ſ^3y.\ z \propto yy - xx.$

Exemple.

r.	*y.*	*ſ.*	*x.*	*v.*	*z.*	*Quarré.*	*Côté.*	*Cube.*	*Côté.*
4.	3.	1.	1.	1.	8.	$zzyy - z^3 \propto 64.$	$zx \propto 8.$	$zzyy - zzvv \propto 512.$	$zſſ \propto 8.$

III QUESTION.

PREMIER CAS.

13. *POur ajoûter une grandeur à une autre grandeur, & encore au cube de cette autre, en sorte que la seconde somme soit un cube parfait, qui ait pour racine cubique la premiére somme.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & l'autre zy ; il faut que la somme $z^3y^3 + z$ soit un cube parfait, & que la somme $zy + z$ en soit au juste la racine cubique. Et par conséquent le cube de $zy + z$ doit égaler la somme $z^3y^3 + z$. Ce qui fournit une égalité $z^3y^3 + 3z^3yy + 3z^3y + z^3 \propto z^3y^3 + 1z$. Ou $3zzyy + 3zzy + 1zz \propto 1$. Et $3yy + 3y + 1 \propto \frac{1}{zz}$. Et prenant $xy - 1$ pour le côté $\frac{1}{z}$ du quarré $3yy + 3y + 1$; on aura l'égalité $3yy + 3y + 1 \propto xxyy - 2xy + 1$. Ou $xxy - 3y \propto 2x + 3$. Et $y \propto \frac{2x + 3}{xx - 3}$. Et l'arbitraire x surpasse $\sqrt{3}$.

Unique supposition. $\{z^3y^3 + 1z \propto z^3y^3 + 3z^3yy + 3z^3y + 1z^3.$

Résolution infinie.

$\{x$ *arbitraire.* $y \propto \frac{2x + 3}{xx - 3}.$ $\{1^{ere}$ *grandeur* $z \propto \frac{xx - 3}{xx + 3x + 3}.$ $2^e\ zy \propto \frac{2x + 3}{xx + 3x + 3}.$

Exemple.

$\{ x \propto 2.\ y \propto 7.\ \{ z \propto \frac{1}{13}.\ zy \propto \frac{7}{13}.\ \{ \textit{Cube}\ z^3y^3 + 1z \propto \frac{512}{2197}.\ \textit{Côté}\ zy + 1z \propto \frac{8}{13}.$

SECOND CAS.

14. *Et si on ôte la première grandeur de la seconde, & qu'on l'ôte encore du cube de la seconde; afin que le second reste soit un cube parfait; dont le premier reste soit le côté cubique.*

Ayant dénommé les grandeurs comme au premier cas; le reste $z^3y^3 - 1z$ doit fournir un cube parfait, & le reste $zy - 1z$ en doit être la racine cubique. De sorte que le cube de $zy - 1z$ doit égaler le cube z^3y^3. Ce qui fournit une égalité $z^3y^3 - 3z^3yy + 3z^3y - 1z^3 \propto z^3y^3 - 1z$. Ou $3yy - 3y + 1 \propto \frac{1}{zz}$. Et prenant $xy - 1$ pour le côté $\frac{1}{z}$ du quarré $3yy - 3y + 1$; on aura l'égalité $xxyy - 2xy + 1 \propto 3yy - 3y + 1$. Ou $xxy - 3y \propto 2x - 3$. Et $y \propto \frac{2x - 3}{xx - 3}$. Et l'arbitraire x surpassera $\sqrt{3}$. Et afin que zy surpasse z, la grandeur y ou sa valeur $\frac{2x - 3}{xx - 1}$ doit surpasser l'unité. Et par conséquent le numérateur $2x - 3$ surpasse le dénominateur $xx - 3$. Et 2 surpasse l'arbitraire x.

Unique supposition. $\{ z^3y^3 - 1z \propto z^3y^3 - 3z^3yy + 3z^3y - 1z^3.$

Résolution infinie.

$\{ x\ \textit{arbitraire}.\ y \propto \frac{2x - 3}{xx - 3}.\ \{ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto \frac{xx - 3}{xx - 3x + 3}.\ 2^{e}\ zy \propto \frac{2x - 3}{xx - 3x + 3}.$

Exemple.

$\{ x \propto \frac{9}{5}.\ y \propto \frac{5}{2}.\ \{ z \propto \frac{2}{7}.\ zy \propto \frac{5}{7}.\ \{ \textit{Cube}\ z^3y^3 - 1z \propto \frac{27}{343}.\ \textit{Côté}\ zy - 1z \propto \frac{3}{7}.$

TROISIEME CAS.

15. *Et si on ôte la seconde grandeur & son cube de la première; afin que le second reste soit un cube parfait, dont le premier soit le côté cubique.*

La résolution sera entiérement la même que la précédente. Mais comme zy est moindre que z, la grandeur y ou sa valeur $\frac{2x - 3}{xx - 3}$ sera necessairement plus petite que l'unité. Et le numérateur $2x - 3$ sera par conséquent plus petit que le dénominateur $xx - 3$. De sorte que l'arbitraire x surpassera 2.

Unique supposition. $\{ 1z - z^3y^3 \propto z^3 - 3z^3y + 3z^3yy - z^3y^3.$

Résolution infinie.

$\{ x\ \textit{arbitraire}.\ y \propto \frac{2x - 3}{xx - 3}.\ \{ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto \frac{xx - 3}{xx - 3x + 3}.\ 2^{e}\ zy \propto \frac{2x - 3}{xx - 3x + 3}.$

Exemples.

$$\left\{\begin{matrix} x \propto 3.\ y \propto \frac{1}{2}. \\ x \propto 6.\ y \propto \frac{3}{11}. \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} z \propto 2.\ zy \propto 1. \\ z \propto \frac{11}{7}.\ zy \propto \frac{3}{7}. \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} \textit{Cube}\ 1z - z^3y^3 \propto 1. & \textit{Côté}\ 1z - 1zy \propto 1. \\ \textit{Cube}\ 1z - z^3y^3 \propto \frac{512}{343}. & \textit{Côté}\ 1z - zy \propto \frac{8}{7}. \end{matrix}\right.$$

IV QUESTION.

PREMIER CAS.

16. ***P**our ajoûter une grandeur à une autre grandeur, & encore au cube de cette autre, en sorte que la première somme soit un cube parfait, dont la seconde soit le côté cubique.*

Ayant nommé z le côté du cube, & y la grandeur qui doit être ajoûtée; il faudra que la première somme $z + y$ soit un cube, & que la seconde $z^3 + y$ en soit la racine cubique. Et si on veut encore nommer zx le côté du cube $z + y$; on aura une premiére égalité $z + y \propto z^3x^3$. Ou une valeur $y \propto z^3x^3 - 1z$. Et parceque zx & $z^3 + y$ sont un même côté du cube $z + y$. On tirera de l'égalité $zx \propto z^3 + y$ une valeur $y \propto zx - 1z^3 \propto z^3x^3 - 1z$. Et par transposition $1x + 1 \propto zzx^3 + 1zz$. Et divisant de part & d'autre par $x + 1$, on trouvera $1 \propto zzxx - 1zzx + 1zz$. Ou $\frac{1}{zz} \propto xx - 1x + 1$. Et prenant $v - x$ ou $x - v$ pour le côté $\frac{1}{z}$ du quarré $xx - 1x + 1$, on aura une nouvelle égalité $xx - 1x + 1 \propto xx - 2vx + vv$. Ou $2vx - 1x \propto vv - 1$. Et $x \propto \frac{vv - 1}{2v - 1}$. Et l'arbitraire v surpasse l'unité. Et la même v ne peut égaler 2, mais on la prendra plus grande, afin que la grandeur y soit positive.

1ere *supposition* $\{ z + y \propto z^3x^3$. 2e *supposition* $\{ z^3 + y \propto zx$.

Résolution infinie.

$$\left\{ v \ \textit{arbitraire.}\ x \propto \frac{vv - 1}{2v - 1}. \right. \left\{ 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ z \propto \frac{2v - 1}{vv - 1v + 1}.\ 2^{e}\ y \propto zx - z^3. \right.$$

Exemple.

$$\left\{ v \propto 3.\ x \propto \frac{8}{5}. \right. \left\{ z \propto \frac{5}{7}.\ y \propto \frac{267}{343}. \right. \left\{ \textit{Cube}\ z + y \propto \frac{512}{243}.\ \textit{Côté}\ z^3 + y \propto \frac{392}{343} \propto \frac{8}{7}. \right.$$

SECOND CAS.

17. ***E**T si on ôte une grandeur d'une autre & du cube de cette autre; afin que le premier reste soit un cube parfait, dont le second reste soit le côté cubique.*

Ayant dénommé les grandeurs, & formé ses raisonnemens comme au premier cas; l'arbitraire v sera prise entre 1 & 2, afin que la grandeur y soit positive, & que les autres z & x soient encore réelles.

Première

Première supposition $\{ z - y \propto z^3x^3$. 2^e *supposition* $\{ z^3 - y \propto zx$.

Résolution infinie.

$\{ v$ *arbitraire.* $x \propto \frac{vv - 1}{2v - 1}$. $\{ 1^{ere}$ *grandeur* $z \propto \frac{2v - 1}{vv - 1v + 1}$. $2^e\ y \propto z^3 - zx$.

Exemple.

$\{ v \propto \frac{3}{2}$. $x \propto \frac{5}{8}$. $\{ z \propto \frac{8}{7}$. $y \propto \frac{267}{343}$. $\{$ *Cube* $z - y \propto \frac{125}{343}$. *Côté* $z^3 - y \propto \frac{245}{343} \propto \frac{5}{7}$.

TROISIEME CAS.

18. *ET si la première grandeur est retranchée de la seconde, & que le cube de la première soit encore ôté de la seconde; afin que le premier reste soit un cube parfait, dont le second reste soit le côté cubique.*

On dénommera les grandeurs, & on ordonnera les raisonnemens comme aux cas qui précédent. Et il suffira que l'arbitraire v surpasse l'unité, pour rendre x & chaque autre grandeur positive.

Première supposition $\{ y - z \propto z^3x^3$. 2^e *supposition* $\{ y - z^3 \propto zx$.

Résolution infinie.

$\{ v$ *arbitraire.* $x \propto \frac{vv - 1}{2v + 1}$. $\{ 1^{ere}$ *grandeur* $z \propto \frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}$. $2^e\ y \propto z^3 + zx$.

Exemple.

$\{ v \propto 2$. $x \propto \frac{3}{5}$. $\{ z \propto \frac{5}{7}$. $y \propto \frac{272}{343}$. *Cube* $y - z \propto \frac{27}{343}$. *Côté* $y - z^3 \propto \frac{147}{343} \propto \frac{3}{7}$.

V QUESTION.

PREMIER CAS.

19. *POur trouver deux grandeurs dont la somme soit égale à la somme des cubes.*

Ayant nommé la premiére z, & la seconde yz; l'égalité sera $z + yz \propto z^3 + y^3z^3$. Ou $1 + 1y \propto 1zz + y^3zz$. Et divisant de part & d'autre par $1zz + 1yzz$, on trouvera l'égalité $\frac{1}{zz} \propto 1 - 1y + yy$. Et prenant $v - y$ ou $y - v$ pour $\frac{1}{z}$, ou pour le côté du quarré $1 - 1y + 1yy$; l'égalité sera $1 - 1y + 1yy \propto vv - 2vy + yy$. Ou $2vy - 1y \propto vv - 1$. Et $y \propto \frac{vv - 1}{2v - 1}$. Et l'arbitraire v sera moindre ou plus grande que 2, & surpassera l'unité. L'extrême facilité & la pleine étenduë de cette résolution peuvent faire observer en passant, non seulement combien la méthode de Diophante & de ses Commentateurs est imparfaite & défectueuse,

mais encore combien celle de Monsieur De Fermat est éloignée de la simplicité, à laquelle une juste méthode doit toûjours se reduire : puisqu'il avouë que la question qu'on vient de proposer, peut être difficilement
» résoluë par une méthode générale. Je suis surpris, dit-il dans sa remarque
» sur la même question, non de ce que Bachet n'a point apperceu la mé-
» thode générale, qui est sans doute difficile ; mais de ce qu'il n'a point
» averti le Lecteur, que celle qu'il expose n'est point générale.

Supposition. *Résolution infinie.*

$$\{ z + yz \propto z^3 + y^3z^3.\ \{ v \text{ arbitraire. } y \propto \frac{vv - 1}{2v - 1}.\ \{ z \propto \frac{2v - 1}{vv - 1v + 1}.\ zy \propto \frac{vv - 1}{vv - 1v + 1}.$$

Exemples.

$$\{ v \propto 3.\ y \propto \frac{8}{5}.\ \{ z \propto \frac{5}{7}.\ zy \propto \frac{8}{7}.\ \{ \text{Somme } z + zy \propto \frac{13}{7} \propto z^3 + z^3y^3 \propto \frac{125 + 512}{343}.$$

$$\{ v \propto \frac{3}{2}.\ y \propto \frac{5}{8}.\ \{ z \propto \frac{8}{7}.\ zy \propto \frac{5}{7}.\ \{ \text{Somme } z + zy \propto \frac{13}{7} \propto z^3 + z^3y^3 \propto \frac{512 + 125}{343}.$$

SECOND CAS.

20. *ET si la différence des grandeurs doit égaler celle des deux cubes.*
On formera la résolution de la même sorte. Et afin que zy ou sa valeur $\frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}$ puisse surpasser z ou sa valeur $\frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}$, il
b. 16. 1. suffira que le numérateur $vv - 1$ surpasse le numérateur $2v + 1$, ou [b] que l'arbitraire v surpasse $1 + \sqrt{3}$.

Supposition. *Résolution infinie.*

$$\{ yz - z \propto y^3z^3 - z^3.\ \{ v \text{ arbitraire. } y \propto \frac{vv - 1}{2v + 1}.\ \{ z \propto \frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}.\ zy \propto \frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}.$$

Exemple.

$$\{ v \propto 3.\ y \propto \frac{8}{7}.\ \{ z \propto \frac{7}{13}.\ zy \propto \frac{8}{13}.\ \{ \text{Reste } zy - z \propto \frac{1}{13} \propto z^3y^3 - z^3 \propto \frac{512 - 343}{2197}.$$

TROISIEME CAS.

21. *ET si la première grandeur est ajoûtée au cube de la seconde, & la seconde au cube de la première ; afin que les sommes soient égales.*
Il suffira pour rendre la résolution positive, que l'arbitraire v surpasse l'unité.

Supposition. *Résolution infinie.*

$$\{ z^3 + yz \propto y^3z^3 + z.\ \{ v \text{ arbitraire. } y \propto \frac{vv - 1}{2v + 1}.\ \{ z \propto \frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}.\ zy \propto \frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}.$$

Exemple.

$\{ v \propto 2.\ y \propto \frac{3}{5}.\ \{ z \propto \frac{5}{7}.\ zy \propto \frac{3}{7}.\ \{ \textit{Somme } z^3 + yz \propto z^3y^3 + z \propto \frac{272}{343}.$

VI QUESTION.

22. *Pour trouver deux grandeurs, telles que la première étant ajoûtée au cube de la seconde, & la seconde au quarré de la première; les deux sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé simplement la premiére z, & la seconde y, & x le côté du premier quarré; l'égalité sera pour la premiére somme $z + y^3 \propto xx$. Ou $z \propto xx - y^3$. Et la seconde somme $y + zz$ étant encore un quarré parfait, si on y met pour z sa valeur $xx - y^3$; la même somme sera $y + x^4 - 2xxy^3 + y^6$. Et afin qu'elle soit un quarré parfait, on nommera son côté $xx + y^3$. Et on formera l'égalité $y + x^4 - 2xxy^3 + y^6 \propto x^4 + 2y^3xx + y^6$. Ou $1y \propto 4y^3xx$. Et $1 \propto 4yyxx$. Et $1 \propto 2yx$. Et l'arbitraire x doit surpasser $\sqrt{5^c}.\frac{1}{8}$.

Suppositions. | *Résolution infinie.*

$\{ z + y^3 \propto xx.\ \{ y + zz \propto vv.\ \{ x \textit{ arbitraire}.\ y \propto \frac{1}{2x}.\ z \propto \frac{8x^5 - 1}{8x^3} \propto xx - y^3.$

Exemples.

$\left\{ \begin{array}{l} x \propto 1.\ y \propto \frac{1}{2}.\ z \propto \frac{7}{8}.\ \{ \textit{Quarrez } z + y^3 \propto \frac{8}{8}.\quad z^3 + y \propto \frac{81}{64}.\ \textit{Côtez } 1.\ \frac{9}{8}. \\ x \propto 2.\ y \propto \frac{1}{4}.\ z \propto \frac{255}{64}.\ \{ \textit{Quarrez } z + y^3 \propto \frac{256}{64} \propto 4.\ zz + y \propto \frac{66049}{4096}.\ \textit{Côtez } 2.\ \frac{257}{64}. \end{array} \right.$

VII QUESTION.

23. *Pour trouver deux grandeurs, telles qu'ayant ajoûté la première au cube de la seconde, & la seconde au quarré de la première; la première soit un cube parfait, & la seconde un quarré.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & y la seconde; la premiére égalité sera $z + y^3 \propto x^3$. Ou $z \propto x^3 - y^3$. Et afin que la seconde somme $y + zz$ ou sa valeur $y + x^6 - 2x^3y^3 + y^6$ soit un quarré parfait, on nommera son côté $x^3 + y^3$. Et le quarré sera $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 \propto y + x^6 - 2x^3y^3 + y^6$. Ou $1y \propto 4x^3y^3$. Et $1 \propto 4x^3yy$. Et supposant $ss \propto x$; on aura encore l'égalité $1 \propto 4s^6yy$. Et $1 \propto 2s^3y$. Ou $y \propto \frac{1}{2s^3}$. Et l'arbitraire s doit surpasser $\sqrt{15^c}.\frac{1}{8}$.

Suppositions. | *Résolution infinie.*

$\{ z + y^3 \propto x^3.\ \{ zz + y \propto vv.\ \{ s \textit{ arbitraire}.\ y \propto \frac{1}{2s^3}.\ z \propto \frac{8s^{15} - 1}{8s^9} \propto s^6 - y^3.$

Exemples.

$$\left\{\begin{array}{l} f \propto 1.\ y \propto \frac{1}{2}.\ z \propto \frac{7}{8}.\ \Big\{ \textit{Cube}\ z + y^3 \propto 1.\ \textit{Quarré}\ zz + y \propto \frac{81}{64}.\ \textit{Côté}\ \frac{9}{8}. \\ f \propto 2.\ y \propto \frac{1}{16}.\ z \propto \frac{262143}{4096}.\ \Big\{ \textit{Cube}\ z + y^3 \propto \frac{262144}{4096} \propto 64.\ \textit{Quarré}\ zz + y \propto \frac{68720001025}{16777216}. \\ \qquad \textit{Côté du cube}\ \frac{64}{16} \propto 4.\ \textit{Côté du quarré}\ \frac{262145}{4096}. \end{array}\right.$$

VIII QUESTION.

24. *Pour coupper en deux parties une grandeur connuë, & trouver un cube, en sorte que le plan des deux parties soit ègal à l'excez dont le cube surpasse son côté.*

Ayant nommé $2a$ la grandeur connuë, & zy sa premiére partie, & $zx - 1$ le côté du cube; la seconde partie sera $2a - zy$. Et son plan par la premiére zy sera $2azy - zzyy$. Et si le côté $zx - 1$ du cube est retranché du cube $z^3x^3 - 3zzxx + 3zx - 1$; on formera une égalité du plan avec le reste $z^3x^3 - 3zzxx + 2zx \propto 2azy - zzyy$. Ou $zzx^3 \propto 3zxx - zyy + 2ay - 2x$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \frac{3xx - yy}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}\sqrt{x^4 + 8ayx^3 - 6xxyy + y^4}$. Et afin que la grandeur renfermée sous le signe $\sqrt{}$ soit un quarré parfait; on formera son côté en le tirant comme par approximation, & on le nommera $xx + 4ayx - 3yy - 8aayy$. Et l'égalité sera $x^4 + 8ayx^3 - 6xxyy + y^4 \propto x^4 + 8ayx^3 - 6xxyy + 16aayyxx - 24ay^3x + 9y^4 - 16aayyxx - 64a^3y^3x + 48aay^4 + 64a^4y^4$. Ou $24ay^3x + 64a^3y^3x \propto 8y^4 + 48aay^4 + 64a^4y^4$. Et divisant de part & d'autre par $8y^3$, elle sera enfin $3ax + 8a^3x \propto 1y + 6aay + 8a^4y$. Ou $x \propto \frac{1y + 6aay + 8a^4y}{3a + 8a^3}$. Et la résolution est infinie.

Supposition $\{ z^3x^3 - 3zzxx + 3zx - 1 - zx + 1 \propto 2azy - zzyy$.

Résolution infinie.

$\{ y$ *arbitraire.* $x \propto \frac{1y + 6aay + 8a^4y}{3a + 8a^3}.\ z \propto \frac{xx + yy + 4aayy - 2ayx}{x^3}$.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} 2a \propto 2.\ y \propto 11.\ x \propto 15.\ z \propto \frac{4}{27}.\ \Big\{ zy \propto \frac{44}{27}.\ 2a - zy \propto \frac{10}{27}.\ \Big\{ \textit{Plan}\ 2azy - zzyy \propto \frac{440}{729}. \\ \textit{Côté cubique}\ zx - 1 \propto \frac{11}{9}.\ \textit{Différence du cube \& du côté}\ \frac{1331 - 891}{729} \propto \frac{440}{729}. \end{array}\right.$$

RESOLUTION PLUS COURTE.

Et si on eût pris a pour x, & 1 pour y dans la valeur précédente de l'inconnuë z, la grandeur $x^4 + 8ayx^3 - 6xxyy + y^4$ renfermée sous le signe $\sqrt{}$ eût été au juste le quarré parfait $9a^4 - 6aa + 1$. Et la résolution n'eût été alors que générale, & non pas infinie comme la précédente.

Suppoſition. *Réſolution infinie.*

$$\{ z^3x^3 - 3zzxx + 2zx \propto 2azy - zzyy. \ \{ zy \propto \frac{3aa - 1}{a^3}. \ 2a - zy \propto \frac{2a^4 - 3a + 1}{a^3}. \ zx \propto \frac{3aa - 1}{aa}.$$

Exemple.

$$\{ 2a \propto 6. \ zy \propto \frac{26}{27}. \ 2a - zy \propto \frac{136}{27}. \ \{ \textit{Plan} \ \frac{3536}{729}. \ \textit{Reſte} \ \frac{4913 - 1377}{729} \propto \frac{3536}{729}.$$

SECOND CAS.

25. *ET ſi le cube devoit être retranché de ſon côté cubique, & que le reſte deût égaler le plan des deux grandeurs.*

Ayant ordonné comme au premier cas ſes raiſonnemens, & pris dans la réſolution de ce même cas $xx + 4ayx - yy$ pour côté du quarré renfermé ſous le ſigne, on trouvera la réſolution générale qu'on expoſe ici. On ne propoſe point l'infinie ſemblable à celle qui précéde, parcequ'elle eſt toûjours négative.

$$\textit{Suppoſition} \ \{ zx - 1 - z^3x^3 + 3zzxx - 3zx + 1 \propto 2azy - zzyy.$$

Réſolution générale.

$$\{ 1^{ere} \ \textit{partie} \ zy \propto \frac{16a^4 - 1}{8a^3}. \ 2^e \ \textit{partie} \ 2a - zy \propto \frac{1}{8a^3}. \ \{ \textit{Côté cubique} \ zx - 1 \propto \frac{1}{4aa}.$$

Exemple.

$$\{ 2a \propto 2. \ zy \propto \frac{15}{8}. \ 2a - zy \propto \frac{1}{8}. \ \{ \textit{Plan} \ \frac{15}{64}. \ \textit{Reſte} \ \frac{16 - 1}{64} \propto \frac{15}{64}.$$

IX QUESTION.

PREMIER CAS.

26. *POur trouver deux grandeurs, telles que leur plan recevant l'une & l'autre, les deux ſommes ſoient des cubes parfaits.*

Ayant nommé la premiére z, & la ſeconde y, & xy le côté du premier des deux cubes, & vz le côté du ſecond; La premiére égalité ſera $zy + 1y \propto x^3y^3$. Ou $z \propto x^3yy - 1$. Et la ſeconde $zy + 1z \propto z^3v^3$. Ou $zz \propto \frac{y+1}{v^3}$. Et prenant $y + 1$ pour v, afin d'abbréger & de diminuer les degrez de l'inconnuë v; on aura un quarré $zz \propto \frac{1}{yy + 2y + 1}$, ou $z \propto \frac{1}{y+1} \propto x^3yy - 1$. Et multipliant de part & d'autre par $y + 1$; on aura $1 \propto x^3y^3 + x^3yy - 1y - 1$. Et conſidérant les deux membres comme deux cubes parfaits, ſi le côté du ſecond eſt nommé $xy - 1$; on aura une égalité nouvelle $x^3y^3 + x^3yy - 1y - 1 \infty x^3y^3 - 3xxyy + 3xy - 1$. Ou $x^3y + 3xxy \infty 3x + 1$. Et $y \infty \frac{3x + 1}{x^3 + 3xx}$.

Suppositions.

$\{zy + 1y \infty x^3y^3$. $\{zy + 1z \infty z^3v^3$. $\{x$ *arbitraire.* $y \infty \frac{3x + 1}{x^3 + 3xx}$. $z \infty x^3yy - 1$.

Exemple.

$\{x \infty \frac{1}{2}$. $y \infty \frac{20}{7}$. $z \infty \frac{1}{49}$. $\{yz + y \infty \frac{1000}{343}$. $yz + z \infty \frac{27}{343}$. *Côtez* $\frac{10}{7}$. $\frac{3}{7}$.

SECOND CAS.

27. *Pour trouver deux grandeurs, telles que chacune étant retranchée de leur plan, les restes soient des cubes parfaits.*

On formera la résolution par les mêmes voies que la précédente. Et l'arbitraire x sera prise entre 3 & $\frac{1}{3}$.

Suppositions. *Résolution infinie.*

$\{zy - 1y \infty x^3y^3$. $\{zy - 1z \infty z^3v^3$. $\{x$ *arbitraire.* $y \infty \frac{3x - 1}{3xx - x^3}$. $z \infty x^3yy + 1$.

Exemple.

$\{x \infty 2$. $y \infty \frac{5}{4}$. $z \infty \frac{27}{2}$. $\{yz - y \infty \frac{125}{8}$. $yz - z \infty \frac{27}{8}$. *Côtez* $\frac{5}{2}$. $\frac{3}{2}$.

X QUESTION.

28. *Pour trouver deux grandeurs, telles que leur somme étant ajoûtée à leur plan, ou retranchée de ce même plan; la nouvelle somme & le reste soient deux cubes parfaits, & qui ayent entr'eux le même rapport que deux cubes déja déterminez.*

Ayant nommé zy la premiére grandeur, & zx la seconde, & zv le côté cubique du premier des deux cubes, & zt le côté cubique du second. La premiére égalité sera $zzyx + zy + zx \infty z^3v^3$. Ou $zyx + y \infty zzv^3 - 1x$. Et $y \infty \frac{zzv^3 - 1x}{zx + 1}$. Et la seconde égalité sera $zzyx - zy - zx \infty z^3t^3$. Ou $zyx - y \infty zzt^3 + 1x$. Et $y \infty \frac{zzt^3 + 1x}{zx - 1} \infty \frac{zzv^3 - 1x}{zx + 1}$. Et multipliant de part & d'autre par les deux dénominateurs, on aura l'égalité $z^3t^3x + zzt^3 + zxx + 1x \infty z^3v^3x - zzv^3 - zxx + 1x$. Ou $zzv^3x - zzt^3x \infty zt^3 + zv^3 + 2xx$. D'où l'on tirera une valeur $z \infty \frac{t^3 + v^3}{2v^3x - 2t^3x} + \frac{1}{2v^3x - 2t^3x}\sqrt{t^6 + 2t^3v^3 + v^6 + 8v^3x^3 - 8t^3x^3}$. Et afin que ce qui est renfermé ſous le ſigne $\surd$ ſoit un quarré parfait, je prens comme par approximation $t^3 + v^3 - 4x^3$ pour ſon côté. Et formant l'égalité $t^6 + 2t^3v^3 + v^6 + 8v^3x^3 - 8t^3x^3 \propto t^6 + 2t^3v^3 + v^6 - 8t^3x^3 - 8v^3x^3 + 16x^6$. Ou par tranſpoſition $16v^3x^3 \propto 16x^6$. Et $v^3 \propto x^3$. Ou $v \propto x$. Et l'arbitraire v ſurpaſſe l'arbitraire t. Et enfin comme les côtez zv & zt des deux cubes doivent avoir entr'eux un même rapport que deux grandeurs connuës que je nomme a & b; il y aura encore un même rapport entre les deux arbitraires v & t qu'entre les connuës a & b.

1^{ere} *ſuppoſition* $\{ zzyx + zy + zx \propto z^3v^3$. 2^e $\{ zzyx - zy - zx \propto z^3t^3$.

Réſolution infinie.

$\{$*arbitraires.* $v.t::a.b.$ $\{ z \propto \dfrac{2vv}{v^3 - t^3}$. $zx \propto \dfrac{2v^3}{v^3 - t^3}$. $zy \propto \dfrac{2v^6 + 2v^3t^3}{v^6 - 2v^3t^3 + t^6}$.

Exemple.

$$\begin{cases} a.\ b.\ v.\ t. \ \{ zx.\ zy. & \textit{Cubes.} & \textit{Côtez.} \\ 2.\ 1.\ 2.\ 1.\ \left\{ \dfrac{16}{7}.\ \dfrac{144}{49}. \right. & zzyx + zy + zx \propto \dfrac{4096}{343}.\ zzyx - zy - zx \propto \dfrac{512}{343}. & \left\{ \dfrac{16}{7}.\ \dfrac{8}{7}. \right. \end{cases}$$

XI QUESTION.

29. *Pour coupper une grandeur connuë en trois parties, dont le ſolide ſoit un cube parfait, qui ait pour racine cubique la ſomme des différences alternatives de ces mêmes parties.*

Ayant nommé zy la premiére partie, & zx la ſeconde, & zv la troiſiéme de la grandeur a connuë, & $2zt$ le côté du cube; le ſolide z^3yxv ſera égal au cube $8z^3t^3$. Et $yxv \propto 8t^3$. Ou $y \propto \dfrac{8t^3}{xv}$. Et les différences alternatives des parties ſont $zy - zx$, $zx - zv$, $zy - zv$. Et leur ſomme $2zy - 2zv$ égale le côté cubique $2zt$. Ce qui fournit une valeur $y \propto t + v \propto \dfrac{8t^3}{xv}$. Et multipliant chaque membre par xv, on aura l'égalité $txv + xvv \propto 8t^3$. D'où l'on tirera une valeur $x \propto \dfrac{8t^3}{tv + vv}$. Et mettant pour x & pour y leurs valeurs découvertes; les trois parties ſeront $zy \propto \dfrac{v^3z + 2tvvz + ttvz}{vv + vt}$, & $zx \propto \dfrac{8t^3z}{vv + vt}$, & $zv \propto \dfrac{v^3 + tvv}{vv + vt}$. Et prenant sv pour t, ces mêmes parties ſeront $zy \propto \dfrac{vz + 2svz + ssvz}{1 + s}$, & $zx \propto \dfrac{8s^3vz}{1 + 1}$, & $zv \propto \dfrac{vz + svz}{1 + s}$. Et afin que zy puiſſe ſurpaſſer zx; il faut que le numérateur $vz + 2svz + ssvz$ ſurpaſſe le numérateur $8s^3vz$. Et diviſant par vz, il faut que l'expoſant $1 + 2s + ss$ ſurpaſſe $8s^3$, ou que la racine quarrée $1 + s$ du premier membre ſurpaſſe la quarrée $\surd 8s^3$ du ſecond, ou que l'unité ſurpaſſe $-s + \surd 8s^3$. Et afin que zx puiſſe ſurpaſſer zv; il faut que le numérateur $8s^3vz$ ſurpaſſe le numérateur $vz + svz$, ou que $8s^3$ surpasse $1 + s$, ou que l'unité soit moindre que $- s + 8s^3$. De sorte que $- s + 8s^3$ qui doit surpasser 1, doit surpasser nécessairement $- s + \sqrt{8s^3}$ qui valoit moins que 1. Et par conséquent $8s^3$ surpasse $\sqrt{8s^3}$. Et $64s^6$ surpasse $8s^3$. Et $8s^3$ surpasse 1. Et $2s$ surpasse 1. Et $1s$ surpasse $\frac{1}{2}$. Et pour remplir la condition qui reste, il faut que la somme $zy + zx + zv$ égale la grandeur a. De sorte que mettant pour zy, zx, zv, leurs valeurs précédentes, on formera l'égalité $\frac{2vz + 3svz + ssvz + 8s^3vz}{1 + s} \propto a$. Et multipliant de part & d'autre par $1 + s$, elle sera $2vz + 3svz + ssvz + 8s^3vz \propto 1a + as$. Et $z \propto \frac{1a + as}{2v + 3sv + ssv + 8s^3v}$.

Suppositions.

$\{z^3yxv \propto 8z^3t^3$. $\{zy - zx + zx - zv + zy - zv \propto 2zy - 2zv \propto 2tz$.

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \textit{ plusque } - s + 2s\sqrt{s} \textit{ \& moins que } - s + 8s^3.\ \{s \textit{ arbitraire surpasse } \frac{1}{2}. \\ zy \propto \frac{1a + 2as + ass}{2 + 3s + ss + 8s^3}.\ zx \propto \frac{8as^3}{2 + 3s + ss + 8s^3}.\ zv \propto \frac{1a + as}{2 + 3s + ss + 8s^3}. \end{array}\right.$$

Exemples.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 4.\ s \propto \frac{2}{3}.\ \{zy \propto \frac{75}{46}.\ zx \propto \frac{64}{46}.\ zv \propto \frac{45}{46}.\ \{z^3yxv \propto \frac{27000}{12167}.\quad \textit{Côté } \frac{30}{23}. \\ a \propto 4.\ s \propto \frac{5}{8}.\ \{zy \propto \frac{338}{199}.\ zx \propto \frac{250}{199}.\ zv \propto \frac{208}{199}.\ \{z^3yxv \propto \frac{17576000}{7880599}.\quad \textit{Côté } \frac{260}{199}. \\ a \propto 4.\ s \propto \frac{3}{5}.\ \{zy \propto \frac{40}{23}.\ zx \propto \frac{27}{23}.\ zv \propto \frac{25}{23}.\ \{z^3yxv \propto \frac{27000}{12167}.\quad \textit{Côté } \frac{30}{23}. \end{array}\right.$$

XII QUESTION

ET PREMIER CAS.

30\. *Pour trouver deux cubes, dont la somme soit égale à la différence de deux cubes connus.*

Ayant pris a pour le côté du plus grand des deux cubes connus, & b pour le côté du moindre ; la différence des deux cubes est $a^3 - b^3$. Et si on nomme $a - z$ le côté du premier des deux cubes qu'on cherche ; son cube sera $a^3 - 3aaz + 3azz - z^3$. Et pour effacer $- 3aaz$ & $- b^3$ dans la comparaison ; on nommera $\frac{aaz}{bb} - b$ le côté du second. Et son cube sera $\frac{a^6z^3}{b^6} - \frac{3a^4zz}{b^3} + 3aaz - b^3$. Et la somme des deux est $a^3 - b^3 + 3azz - \frac{3a^4zz}{b^3} - z^3 + \frac{a^6z^3}{b^6}$. Ce qui doit égaler la différence $a^3 - b^3$ des

des deux que l'on propoſe. Et l'égalité étant ordonnée, & ſes deux membres multipliez par b^6; l'égalité ſera $a^6z^3 - b^6z^3 \propto 3a^4b^3zz - 3ab^6zz$. Et diviſant de part & d'autre par $a^3zz - b^3zz$, on trouvera encore l'égalité $a^3z + b^3z \propto 3ab^3$. Ou $z \propto \frac{3ab^3}{a^3 + b^3}$. Et la réſolution ſera poſitive, ſi a^3 ſurpaſſe $2b^3$.

Suppoſition.

$$\{ a^3 - b^3 \propto a^3 - 3aaz + 3azz - z^3 + \frac{a^6z^3}{b^6} - \frac{3a^4zz}{b^3} + 3aaz - b^3.$$

Réſolution générale.

$$\{ z \propto \frac{3ab^3}{a^3 + b^3}. \{ 1^{er}\ \textit{côté}\ a - z \propto \frac{a^4 - 2ab^3}{a^3 + b^3}.\ 2^d\ \textit{côté}\ \frac{aaz}{bb} - b \propto \frac{2a^3b - b^4}{a^3 + b^3}.$$

Exemple.

$$\{ a \propto 2.\ b \propto 1.\ \{ a - z \propto \frac{4}{3}.\ \frac{aaz}{bb} - b \propto \frac{5}{3}.\ \{ \textit{Cubes}\ \frac{64 + 125}{27} \propto \frac{189}{27} \propto 8 - 1.$$

COROLLAIRE.

31. *Pour coupper un cube déterminé en trois autres cubes.*

Si on prend une grandeur indéterminée z pour b dans la réſolution précédente; les côtez des trois cubes ſeront $\frac{a^4 - 2az^3}{a^3 + z^3}$, $\frac{2a^3z - z^4}{a^3 + z^3}$, $\frac{a^3z + z^4}{a^3 + z^3}$. Et ſi on vouloit ôter les fractions; les trois cubes des nouveaux côtez $a^4 - 2az^3$, $2a^3z - z^4$, $a^3z - z^4$, ſeront égaux enſemble au cube du ſeul côté $a^4 + az^3$. Mais a^3 ſurpaſſe $2z^3$.

Suppoſition. *Réſolution infinie.*

$$\{ a^3 \propto z^3 + y^3 + x^3.\ \{ z\ \textit{arbitraire}.\ y \propto \frac{a^4 - 2az^3}{a^3 + z^3}.\ x \propto \frac{2a^3z - z^4}{a^3 + z^3}.$$

Exemple.

$$\{ a \propto 2.\ z \propto 1.\ y \propto \frac{4}{3}.\ x \propto \frac{5}{3}.\ \{ \textit{Cube}\ a^3 \propto 8 \propto z^3 + y^3 + y^3 \propto \frac{27 + 64 + 125}{27} \propto \frac{216}{27}.$$

XIII QUESTION.

ET SECOND CAS.

32. *Pour trouver deux cubes, dont la différence ſoit égale à la ſomme de deux cubes connus.*

Ayant pris a pour le côté du premier des deux cubes connus, & b pour le côté du ſecond; & nommé $a + z$ le côté du premier des deux cubes inconnus, & $\frac{aaz}{bb} - b$ le côté du ſecond, afin d'effacer $a^3, b^3, 3aaz$; on aura l'égalité $a^3 + b^3 \propto a^3 + 3aaz + 3azz + z^3 - \frac{a^6z^3}{b^6} + \frac{3a^4zz}{b^3} - 3aaz + b^3$. Ou $\frac{a^6z^3}{b^6} - z^3$

$\propto \frac{3a^4zz}{b^3} + 3azz$. Et tout étant multiplié par b^6, on aura l'égalité $a^6z^3 - b^6z^3 \propto 3a^4b^3zz + 3ab^6zz$. Et divisant de part & d'autre par $a^3zz + b^3zz$, on trouvera encore $a^3z - b^3z \propto 3ab^3$. Et $z \propto \frac{3ab^3}{a^3 - b^3}$. Et afin que la résolution soit positive, le côté a surpasse l'autre b. Ce qui est toûjours facile.

Supposition.

$$\{ a^3 + b^3 \propto a^3 + 3aaz + 3azz + z^3 - \frac{a^6z^3}{b^6} + \frac{3a^4zz}{b^3} - 3aaz + b^3.$$

Résolution générale.

$$\{ z \propto \frac{3ab^3}{a^3 - b^3}. \ \{ 1^{er} \textit{ côté } a + z \propto \frac{a^4 + 2ab^3}{a^3 - b^3}. \ 2^d \textit{ côté } \frac{aaz}{bb} - b \propto \frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3}.$$

Exemple.

$$\{ a \propto 2. \ b \propto 1. \ \{ a + z \propto \frac{20}{7}. \ \frac{aaz}{bb} - b \propto \frac{17}{7}. \ \{ \textit{Reste } \frac{8000 - 4913}{343} \propto \frac{3087}{343} \propto 8 + 1.$$

COROLLAIRE.

33. Si tous les côtez a, b, $\frac{a^4 + 2ab^3}{a^3 - b^3}$, $\frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3}$, sont multipliez par $a^3 - b^3$; les produits $a^4 - ab^3$, $a^3b - b^4$, $a^4 + 2ab^3$, $2a^3b + b^4$, seront tels que la somme des cubes des deux premiers égalera la différence des cubes des deux autres. Et le cube seul du plus grand $a^4 + 2ab^3$ égalera les trois cubes ensemble des trois autres.

Exemple.

$$\{ a \propto 2. \ b \propto 1. \ \{ a^4 - ab^3 \propto 14. \ a^3 - b^4 \propto 7. \ a^4 + 2ab^3 \propto 20. \ 2a^3b + b^4 \propto 17.$$
$$\textit{Somme } 2744 + 343 \propto 3087. \ \textit{Reste } 8000 - 4913 \propto 3087.$$
$$\textit{Somme } 2744 + 343 + 4913 \propto 8000.$$

XIV QUESTION.
ET TROISIEME CAS.

34. *Pour trouver deux cubes, dont la différence soit égale à celle de deux cubes connus.*

Ayant pris a pour le côté du plus grand des deux cubes connus, & b pour le côté du moindre; la différence des deux cubes est $a^3 - b^3$. Et si on nomme $z - b$ le côté du plus grand des deux cubes qu'on cherche; le cube sera $z^3 - 3bzz + 3bbz - b^3$. Et pour effacer a^3 & $3bbz$, on nommera $\frac{bbz}{aa} - a$ le côté du second. Et le cube sera $\frac{b^6z^3}{a^6} - \frac{3b^4zz}{a^3} + 3bbz - a^3$. Et ce cube étant retranché du précédent; le reste $a^3 - b^3 - 3bzz + \frac{3b^4zz}{a^3} + z^3 - \frac{b^6z^3}{a^6}$ égalera la différence $a^3 - b^3$. Et multipliant de part & d'autre par a^6, & transposant comme à l'ordinaire ; l'égalité sera $a^6z^3 - b^6z^3 \propto 3a^6bzz - 3a^3b^4zz$. Et divisant de part & d'autre par $a^6zz - b^6zz$, on trouvera une valeur $z \propto \frac{3a^6b - 3a^3b^4}{a^6 - b^6} \propto \frac{3a^3b}{a^3 + b^3}$. Et la résolution sera positive, si $2b^3$ surpasse a^3, le côté a surpassant l'autre b, comme on l'a d'abord supposé.

Supposition.

$$\{ a^3 - b^3 \propto z^3 - 3bzz + 3bbz - b^3 - \frac{b^6z^3}{a^6} + \frac{3b^4zz}{a^3} - 3bbz + b^3.$$

Résolution générale.

$$\{ z \propto \frac{3a^3b}{a^3 + b^3}. \ \{ 1^{er} \textit{ côté } z - b \propto \frac{2a^3b - b^4}{a^3 + b^3}. \ 2^d \textit{ côté } \frac{bbz}{aa} - a \propto \frac{2ab^3 - a^4}{a^3 + b^3}.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \propto 5.\ b \propto 4.\ z - b \propto \frac{744}{189} \propto \frac{248}{63}.\ \frac{bbz}{aa} - a \propto \frac{15}{189} \propto \frac{5}{63}.\ \{ \textit{Cubes} \frac{15252992}{250047}.\ \frac{125}{250047}. \\ \textit{Première différence } 125 - 64 \propto 61.\ 2^e \frac{15252992 - 125}{250047} \propto \frac{15252867}{250047} \propto 61. \end{array} \right.$$

XV QUESTION

ET QUATRIEME CAS.

35. **E***T pour trouver deux cubes, dont la somme soit égale à celle des deux cubes connus.*

On en cherchera b d'abord deux autres z^3 & y^3, dont la différence $z^3 - y^3$ soit égale à la somme $a^3 + b^3$. Et on en cherchera c deux nouveaux ensuitte x^3 & v^3, dont la somme $x^3 + v^3$ soit égale à la différence $z^3 - y^3$ des deux précédens z^3 & y^3. Et la somme $x^3 + v^3$ résoudra la question. Mais afin que la résolution puisse être positive, il faut que le cube z^3 surpasse $2y^3$. Si $2y^3$ surpassoit z^3; on employeroit la résolution qu'on expliquera un peu plus bas.

b. 32. c. 30.

Supposition. $\{ \textit{Somme } a^3 + b^3 \propto z^3 - y^3 \propto x^3 + v^3.$

Résolution générale.

$$\{ z \propto \frac{a^4 + 2ab^3}{a^3 - b^3}.\ y \propto \frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3}.\ \{ x \propto \frac{z^4 - 2zy^3}{z^3 + y^3}.\ v \propto \frac{2z^3y - y^4}{z^3 + y^3}.$$

Exemple.

$$\{ a \propto 5.\ b \propto 2.\ \{ z \propto \frac{705}{117} \propto \frac{235}{39}.\ y \propto \frac{516}{117} \propto \frac{172}{39}.\ x \propto \frac{6582300065}{7045865597}.\ v \propto \frac{3589175944}{7045865597}.\ \&c.$$

COROLLAIRE.

36. Deux cubes en général dont les côtez sont $a^4 + ab^3$ & $2ab^3 - a^4$ sont égaux à deux autres cubes qui ont pour côtez $a^3b + b^4$ & $2a^3b - b^4$. Mais il faut dans ce modéle général que $2a^3$ surpasse b^3, & que $2b^3$ surpasse a^3.

$$\left\{\begin{array}{llllll} a. & b. & a^4 + ab^3. & 2ab^3 - a^4. & a^3b + b^4. & 2a^3b - b^4. \\ 5. & 4. & 945. & 15. & 756. & 744. \\ \multicolumn{6}{l}{843908625 + 3375 \propto 432081216 + 411830784.} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{Somme.} \\ 843912000. \end{array}\right.$$

COROLLAIRE GENERAL

DES QUESTIONS PRECEDENTES,

Pour rendre infinies les résolutions des mêmes questions; & pour trouver positivement les côtez des deux cubes.

PREMIER CAS.

37. *Pour trouver deux cubes, dont la somme soit égale à la différence de deux cubes connus, lors même que le moindre surpasse la moitié du plus grand; ou lorsqu'on veut trouver une autre résolution que celle de la question douziéme.*

b. 34. Si les deux cubes qu'on propose sont a^3 & b^3; on en cherchera [b] deux z^3 & y^3, dont la différence $z^3 - y^3$ soit égale à la différence $a^3 - b^3$ des
c. 39. deux cubes connus. Et ensuitte on en cherchera [c] deux nouveaux x^3 & v^3, dont la somme $x^3 + v^3$ soit égale à la différence $z^3 - y^3$ des deux précédens z^3 & y^3. Et la somme $x^3 + v^3$ égalera la différence $a^3 - b^3$.

$$\textit{Supposition.}\ \{\textit{Somme}\ a^3 - b^3 \propto z^3 - y^3 \propto x^3 + v^3.$$

Résolution générale.

$$\left\{ z \propto \frac{2a^3b - b^4}{a^3 + b^3}.\ y \propto \frac{2ab^3 - a^4}{a^3 + b^3}.\ \right\{ x \propto \frac{z^4 - 2zy^3}{z^3 + y^3}.\ v \propto \frac{2z^3y - y^4}{z^3 + y^3}.$$

Exemple.

$$\left\{ a \propto 5.\ b \propto 4.\ z \propto \frac{248}{63}.\ y \propto \frac{5}{63}.\ \right\{ x \propto \frac{3782680016}{960946371}.\ v \propto \frac{152529295}{960946371}.\ \&c.$$

SECOND CAS.

38. *Et pour trouver deux cubes, dont la différence soit égale à la somme de deux cubes connus; en sorte que la résolution puisse devenir infinie.*

b. 32. On cherchera d'abord [b] deux cubes z^3 & y^3, dont la différence $z^3 - y^3$

ſoit égale à la ſomme $a^3 + b^3$ des deux a^3 & b^3 qu'on propoſe. Et enſuitte on en cherchera [c] deux autres x^3 & v^3, dont la ſomme $x^3 + v^3$ égalera c. 30 ou 37.
la différence $z^3 - y^3$ des deux précédens z^3 & y^3 ; & aprés cela on en cherchera encore [b] deux nouveaux t^3 & $ſ^3$, dont la différence $t^3 - ſ^3$ égalera la ſomme $x^3 + v^3$ des deux derniers x^3 & v^3. Et les cubes t^3 & $ſ^3$ réſoudront la queſtion. Et cette réſolution ſervira à ſon tour pour en trouver une autre. Et ainſi de ſuitte juſques à l'infini.

Suppoſition. {*Somme* $a^3 + b^3 \propto z^3 - y^3 \propto x^3 + v^3 \propto t^3 - ſ^3$.

Réſolution générale.

$$\left\{ z \propto \frac{a^4 + 2ab^3}{a^3 - b^3} .\ y \propto \frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3} . \quad \left\{ v \propto \frac{z^4 - 2zy^3}{z^3 + y^3} .\ x \propto \frac{2z^3y - y^4}{z^3 + y^3} . \right.\right.$$

$$\left\{ t \propto \frac{x^4 + 2xv^3}{x^3 - v^3} .\ ſ \propto \frac{2x^3v + v^4}{x^3 - v^3} . \right.$$

Exemple.

Première réſolution.

$$\left\{ a \propto 3.\ b \propto 1.\ z \propto \frac{87}{26} .\ y \propto \frac{55}{26} . \quad \left\{ z^3 - y^3 \propto \frac{658503 - 166375}{17576} \propto \frac{492128}{17576} \propto 28. \right.\right.$$

Seconde réſolution.

$$x \propto \frac{63284705}{21446828} .\ v \propto \frac{28340511}{21446828} .\ x^3 \propto \frac{253452325273412980702625}{9864820937041015055552} .$$

$$v^3 \propto \frac{22762660963735440852831}{9864820937041015055552} .\ x^3 + v^3 \propto \frac{276214986237148421555456}{9864820937041015055552} \propto 28.$$

Côté du premier cube. $t \propto \dfrac{1892071220470201097176903235033 5}{4947561551827392932621677753432}$.

Côté du ſecond cube. $ſ \propto \dfrac{1501104226820549203687056932939 1}{4947561551827392932621677753432}$.

TROISIEME CAS.

39. *ET pour trouver deux cubes, dont la différence ſoit égale à celle de deux cubes connus, lors même que le plus grand ſurpaſſe la moitié du moindre ; ou qu'on en veut trouver d'autres que par la réſolution de la queſtion quatorzième.*

On en cherchera [b] deux z^3 & y^3, dont la ſomme $z^3 + y^3$ ſoit égale à la b. 30 ou 37.
différence $a^3 - b^3$ des deux a^3 & b^3 qu'on propoſe. Et enſuitte on en cherchera [c] deux autres x^3 & v^3, dont la différence $x^3 - v^3$ ſoit égale à c. 32.
la ſomme $z^3 + y^3$ des deux précédens z^3 & y^3. Et les deux x^3 & v^3 réſoudront la queſtion.

Suppoſition. {*Différence* $a^3 - b^3 \propto z^3 + y^3 \propto x^3 - v^3$.

Résolution générale.

$$\{ z \propto \frac{2a^3b - b^4}{a^3 + b^3} .\ y \propto \frac{a^4 - 2ab^3}{a^3 + b^3} .\ \{ x \propto \frac{z^4 + 2zy^3}{z^3 - y^3} .\ v \propto \frac{2z^3y + y^4}{z^3 - y^3} .$$

Exemple.

Première résolution.

$$\{ a \propto 2.\ b \propto 1.\ z \propto \frac{5}{3} .\ y \propto \frac{4}{3} .\ x \propto \frac{1265}{183} .\ v \propto \frac{1256}{183} .\ \{ z^3 + y^3 \propto \frac{189}{27} \propto 7.$$

Seconde résolution.

$$\{ x^3 \propto \frac{2024284625}{6128487} .\ v^3 \propto \frac{1981385216}{6128487} .\ x^3 - v^3 \propto \frac{42899409}{6128487} \propto 7 \propto 8 - 1.$$

QUATRIEME CAS.

40. *ET pour trouver deux cubes, dont la somme soit égale à celle de deux cubes connus, lorsque la résolution de la question quinziéme est négative, ou qu'on veut en trouver deux autres que ceux qu'elle fournit.*

b. 32. On en cherchera [b] d'abord deux z^3 & y^3, dont la difference $z^3 - y^3$ soit égale à la somme $a^3 + b^3$ des deux a^3 & b^3 qu'on propose. Et ensuitte
c. 34 ou 39. on en [c] cherchera deux x^3 & v^3, dont la difference $x^3 - v^3$ soit égale à la difference $z^3 - y^3$ des deux précédens. Et enfin on en [c] cherchera deux nouveaux t^3 & $ſ^3$, dont la somme $t^3 + ſ^3$ égalera la difference $x^3 - v^3$ des deux x^3 & v^3 nouvellement découverts. Et les cubes t^3 & $ſ^3$ résoudront la question, & pourront servir à leur tour pour en trouver deux autres. Et ainsi de suitte jusques à l'infini. Et les diverses résolutions des quatre cas, que l'on vient d'expliquer, pourront être réïterées par des révolutions nouvelles, & par des applications des unes aux autres continuées jusques où l'on voudra, & même jusques à l'infini.

Suppositions. $\{$ *Somme* $a^3 + b^3 \propto z^3 - y^3 \propto x^3 - v^3 \propto t^3 + ſ^3.$

Résolution générale.

$$\{ z \propto \frac{a^4 + 2ab^3}{a^3 - b^3} .\ y \propto \frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3} .\ \{ x \propto \frac{2z^3y - y^4}{z^3 + y^3} .\ v \propto \frac{2zy^3 - z^4}{z^3 + y^3} .$$

$$\{ t \propto \frac{x^4 - 2xv^3}{x^3 + v^3} .\ ſ \propto \frac{2x^3v - v^4}{x^3 + v^3} .$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \propto 2.\ b \propto 1.\ z \propto \frac{20}{7} .\ y \propto \frac{17}{7} .\ \{ z^3 - y^3 \propto \frac{8000 - 4913}{343} \propto \frac{3087}{343} \propto 9. \\ x \propto \frac{188479}{90391} .\ v \propto \frac{36520}{90391} .\ x^3 \propto \frac{6695590842626239}{738542637646471} . \\ v^3 \propto \frac{48707103808000}{738542637646471} .\ x^3 - v^3 \propto \frac{6646883738818239}{738542637646471} \propto 9. \\ t \propto \frac{1243617733990094836481}{609623835676137297449} .\ ſ \propto \frac{487267171714352336560}{609623835676137297449} .\ \&c. \end{array} \right.$$

XVI QUESTION.

41. *Pour trouver trois grandeurs, dont la somme soit un quarré parfait, & telles que le cube de leur somme ayant receu chacune de ces mêmes grandeurs, les sommes soient aussi des quarrez parfaits.*

Ayant nommé zz le quarré formé par la somme des trois, & y la premiére, & x la seconde, & v la troisiéme ; il faudra que les sommes $z^6 + y$, $z^6 + x$, $z^6 + v$, soient des quarrez parfaits. Et si le premier des côtez est nommé tz^3, & le second sz^3, & le troisiéme rz^3 ; la premiére égalité sera $z^6 + y \propto ttz^6$. Et $y \propto ttz - 1z^6$. Et la seconde sera $z^6 + x \propto ssz^6$. Ou $x \propto ssz^6 - 1z^6$. Et la troisiéme $z^6 + v \propto rrz^6$. Ou $v \propto rrz^6 - 1z^6$. Et la somme $y + x + v \propto ttz^6 + ssz^6 + rrz^6 - 3z^6 \propto 1zz$. Ou $ttz^4 + ssz^4 + rrz^4 - 3z^4 \propto 1$. Et $tt + ss + rr - 3 \propto \frac{1}{z^4}$. De sorte que la question se réduit à trouver trois quarrez tt, ss, rr, dont la somme soit une puissance quatriéme & parfaite $\frac{1}{z^4}$. C'est pourquoi prenant $p + 1$ pour t, & $p - 1$ pour s, & $pp - 1$ pour v, afin d'effacer -3, & $2pp$; la somme $tt + ss + vv - 3$ sera au juste $1p^4 \propto \frac{1}{z^4}$. Et $p \propto \frac{1}{z}$. Ou $z \propto \frac{1}{p}$. Et comme les côtez t, s, r, surpassent chacun l'unité ; il faut que $p - 1 \propto s$ surpasse 1, ou que l'arbitraire p surpasse 2.

Suppositions.

$\{ y + x + v \propto zz$. $\{ z^6 + y \propto ttz^6$. $\{ z^6 + x \propto ssz^6$. $\{ z^6 + v \propto rrz^6$.

Résolution infinie.

$\{ p$ *arbitraire*. $z \propto \frac{1}{p}$. $\{ y \propto \frac{1p + 2}{p^5}$. $x \propto \frac{1p - 2}{p^5}$. $v \propto \frac{p^3 - 2p}{p^5}$.

Exemple.

$\{ p \propto 3$. $z \propto \frac{1}{3}$. $\{ y \propto \frac{5}{243}$. $x \propto \frac{1}{243}$. $v \propto \frac{21}{243}$. $\left\{ z^6 + y \propto \frac{16}{729} \right.$. $z^6 + x \propto \frac{4}{729}$. $z^6 + v \propto \frac{64}{729}$.

XVII QUESTION.

42. *Pour coupper une grandeur connuë en trois parties, telles que chacune étant retranchée du cube de la même grandeur, les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë, & nommé z sa premiére partie, & y la seconde, & x la troisiéme ; & v le côté du premier des quarrez, & t le côté du second, & s le côté du troisiéme ; la premiére égalité sera $a^3 - z \propto vv$. Ou $z \propto a^3 - vv$. Et la seconde $a^3 - y \propto tt$. Ou $y \propto a^3 - tt$. Et la troisiéme $a^3 - x \propto ss$. Ou $x \propto ss - a^3$. Et la somme

$z + y + x \propto 3a^3 - vv - tt - ss \propto a$. Et $3a^3 - 1a \propto vv + tt + ss$. De sorte que la grandeur $3a^3 - 1a$ doit être ou un quarré parfait, ou la somme de deux, ou la somme de trois. Et chacun des trois vv, tt, ss, est moindre que le cube a^3. Mais chacun surpasse $a^3 - 1a$, puisqu'ayant ôté $a^3 - 1a$ de la somme $3a^3 - 1a$ des trois, le reste $2a^3$ surpasse la somme de deux tels qu'on voudra des trois. Supposant donc la somme $3a^3 - 1a$ couppée en trois quarrez connus bb, cc, dd, dont l'un comme cc soit moindre que la grandeur connuë $a^3 - 1a$, on trouvera la résolution suivante, ou deux quarrez vv & tt conserveront les limites qui leur sont prescrites. Et alors si le quarré ss conserve aussi les siennes ; la question sera résoluë.

Mais s'il surpasse a^3, comme dans l'éxemple que l'on y propose ; on ôtera le quarré vv de la somme $3a^3 - 1a$. Et le reste $3a^3 - 1a - vv$ qui comprend deux quarrez connus hh & dd sera couppé en deux quarrez, dont chacun doit être plus petit que le cube a^3, & plus grand que $a^3 - 1a$. C'est pourquoi ôtant a^3 de $3a^3 - 1a - vv$; le reste $2a^3 - 1a - vv$ sera plus grand que le quarré tt. De sorte que les quarrez ss & tt auront chacun leurs justes limites entre a^3 & $2a^3 - 1a - vv$. Ce qui sera [b] facile à régler d'abord, sans qu'il soit nécessaire de tenter la premiére forme de résolution qu'on expose, pour faire juger de la nécessité qu'il y a de bien déterminer les justes limites des grandeurs, lorsqu'on veut éviter les résolutions négatives.

b. 13. 3.

Suppositions.

$$\{ z + y + x \propto a. \quad \{ a^3 - z \propto vv. \quad \{ a^3 - y \propto tt. \quad \{ a^3 - x \propto ss.$$

Résolution infinie & par tentative.

$$3a^3 - 1a \propto bb + cc + dd. \quad r \text{ arbitraire entre } \frac{c + \sqrt{2a^3 - 1a - dd}}{b - \sqrt{a^3}} \;\&\; \frac{c + \sqrt{2a^3 - dd}}{b - \sqrt{a^3 - a}}.$$

$$v \propto \frac{brr - 2cr - b}{rr + 1}. \quad hh \propto bb + cc - vv. \quad q \text{ arbitraire entre } \frac{h + \sqrt{hh + dd - a^3}}{d - \sqrt{a^3}}$$

$$\& \frac{h + \sqrt{hh + dd - a^3 + a}}{d - \sqrt{a^3 - a}}. \quad t \propto \frac{dqq - 2hq - d}{qq + 1}. \quad ss \propto hh + dd - tt.$$

$$1^{ere} \text{ partie } z \propto a^3 - vv. \quad 2^{e}\; y \propto a^3 - tt. \quad 3^{e}\; x \propto a^3 - ss.$$

Exemple.

$$a \propto 2. \quad 3a^3 - 1a \propto 22 \propto 9 + 4 + 9 \propto bb + cc + dd. \quad r \text{ entre } \frac{2 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{8}} \;\&\; \frac{2 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{6}}.$$

$$r \text{ presqu'entre } \frac{423}{18} \;\&\; \frac{464}{56}. \quad r \propto 9 \text{ entre } 23\tfrac{1}{2} \;\&\; 8\tfrac{2}{7}. \quad v \propto \frac{102}{41}. \quad h \propto \frac{107}{41}.$$

$$q \text{ entre } \frac{107 + \sqrt{13130}}{123 - \sqrt{13448}} \;\&\; \frac{107 + \sqrt{16492}}{123 - \sqrt{10086}}. \quad q \text{ presqu'entre } \frac{11050}{369} \propto 29\tfrac{349}{369}$$

$$\& \frac{5875}{574} \propto 10\tfrac{135}{574}. \quad q \propto 11. \quad \{ t \propto \frac{6203}{2501}. \quad s \propto \frac{7773}{2501}. \quad tt \propto \frac{38477209}{6255001}. \quad ss \propto \frac{60419529}{6255001},$$

$$1^{ere} \text{ partie } z \propto \frac{2044}{1681}. \quad 2^{e}\; y \propto \frac{11562799}{6255001}. \quad 3^{e} \text{ négative } x \propto -\frac{10379521}{6255001}. \;\&c.$$

Résolution infinie & toûjours juste.

$b.\ c.\ d.\ r.\ v.\ h.$ *comme auparavant.* $h \propto \frac{crr + 2br - c}{rr + 1}$. $v \propto \frac{brr - 2cr - b}{rr + 1}$.

q *arbitraire entre* $\frac{h + \sqrt{a^3}}{d - \sqrt{2a^3 - a - vv}}$ & $\frac{h + \sqrt{2a^3 - a - vv}}{d - \sqrt{a^3}}$. $t \propto \frac{dqq - 2hq - d}{qq + 1}$.

$s \propto \frac{hqq + 2dq - h}{qq + 1}$. 1^ere^ *partie* $z \propto a^3 - vv$. 2^e^ $y \propto a^3 - tt$. 3^e^ $x \propto a^3 - ss$.

Exemple.

$a \propto 2.\ 3a^3 - 1a \propto 22 \propto bb + cc + dd \propto 9 + 4 + 9$. r *entre* $\frac{2 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{8}}$ & $\frac{2 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{6}}$.

r *presque entre* $\frac{423}{18} \propto 23\frac{1}{2}$ & $\frac{464}{56} \propto 8\frac{2}{7}$. $r \propto 9$. $v \propto \frac{102}{41}$. $h \propto \frac{107}{41}$.

q *entre* $\frac{107 + \sqrt{13448}}{143 - \sqrt{13130}}$ & $\frac{107 + \sqrt{13130}}{143 - \sqrt{13448}}$. q *presque entre* $\frac{2229}{85}$ & $\frac{2215}{71}$.

Ou q *presque entre* $26\frac{19}{85}$ & $31\frac{14}{71}$. $q \propto 27$. $t \propto \frac{41883}{14965}$. $s \propto \frac{42269}{14965}$.

Premiére partie $z \propto \frac{405536900}{223951225}$. 2^e^ $y \propto \frac{37424111}{223951225}$. 3^e^ $x \propto \frac{4941439}{223951225}$.

Somme $z + y + x \propto \frac{447902450}{223951225} \propto 2$. $a^3 - z \propto \frac{10404}{1681}$. *Côté* $\frac{102}{41}$.

Ou $a^3 - z \propto \frac{1386072900}{223951225}$. *Côté* $\frac{37230}{14965}$. $a^3 - y \propto \frac{1754185689}{223951225}$. *Côté* $\frac{41883}{14965}$.

$a^3 - x \propto \frac{1785907681}{223951225}$. *Côté* $\frac{42269}{14965}$.

XVIII QUESTION.

43. *POur coupper une grandeur connuë en trois parties, telles que le cube de la même grandeur étant retranché de chacune de ses trois parties, les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë, & nommé z sa premiére partie, & y la seconde, & x la troisiéme; & v le côté du premier quarré, & t le côté du second, & s le côté du troisiéme. La premiére égalité sera $z - a^3 \propto vv$. Ou $z \propto a^3 + vv$. Et la seconde $y - a^3 \propto tt$. Ou $y \propto a^3 + tt$. Et la troisiéme $x - a^3 \propto ss$. Ou $x \propto ss + a^3$. Et la somme des trois est $z + y + x \propto a \propto 3a^3 + vv + tt + ss$. Et on trouve l'égalité $1a - 3a^3 \propto vv + tt + ss$. De sorte que la grandeur $1a - 3a^3$ doit être un quarré parfait, ou la somme des deux, ou la somme des trois. Si elle en comprend deux connus bb & cc, & qu'on prenne une arbitraire r plus grande que l'unité, on aura la résolution qu'on expose ici. Et si elle en comprend un seul connu aa; on le couppera en deux bb & cc pour suivre ensuitte la même résolution. Et si elle en comprenoit trois; on coupperoit la somme de deux connus en deux autres indéterminément. Ce qui pourra se faire trois fois, à cause des sommes alternatives des trois quarrez qui seroient connus.

Suppositions.

$\{1a \propto z + y + x.\ \{z - a^3 \propto vv.\ \{y - a^3 \propto tt.\ \{x - a^3 \propto ss.\ \{1a - 3a^3 \propto bb + cc.$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} r \text{ arbitraire. } \{1^{er} \text{ côté } v \propto \frac{2br}{rr+1}.\ 2^d\ t \propto \frac{brr - 1b}{rr+1}.\ 3^e\ s \propto c. \\ 1^{ere} \text{ partie } z \propto a^3 + vv.\ 2^e\ y \propto a^3 + tt.\ 3^e\ x \propto a^3 + ss. \end{array}\right.$$

Premier éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto \frac{1}{2}.\ 1a - 3a^3 \propto \frac{1}{8} \propto \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \propto bb + cc.\ b \propto \frac{1}{4} \propto c.\ r \propto 2.\ \{v \propto \frac{4}{20}.\ t \propto \frac{3}{20}.\ s \propto \frac{5}{20}. \\ z \propto \frac{66}{400}.\ y \propto \frac{59}{400}.\ x \propto \frac{75}{400}.\ \{z + y + x \propto \frac{1}{2}.\ \{z - \frac{1}{8} \propto \frac{16}{400}.\ y - \frac{1}{8} \propto \frac{9}{400}.\ x - \frac{1}{8} \propto \frac{25}{400}. \end{array}\right.$$

Second éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto \frac{1}{4}.\ 1a - 3a^3 \propto \frac{9+4}{64} \propto bb + cc.\ b \propto \frac{3}{8}.\ r \propto 2.\ \{v \propto \frac{12}{40}.\ t \propto \frac{9}{40}.\ s \propto \frac{10}{40}. \\ z \propto \frac{169}{1600}.\ y \propto \frac{106}{1600}.\ x \propto \frac{125}{1600}.\ \{z + y + x \propto \frac{1}{4}.\ (z - \frac{1}{64} \propto \frac{144}{1600}.\ y - \frac{1}{64} \propto \frac{81}{1600}.\ x - \frac{1}{64} \propto \frac{100}{1600}. \end{array}\right.$$

XIX QUESTION.

44. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacune étant ajoûtée au cube de la somme des trois, les nouvelles sommes soient des cubes parfaits.*

Ayant nommé la premiére zy, & zx la seconde, & zv la troisiéme, & zt la somme des trois; & zs le côté de la premiére des trois sommes cubiques, & zr le côté cubique de la seconde, & zq celuy de la troisiéme. La premiére égalité sera $zy + z^3t^3 \propto z^3s^3$. Ou $y \propto zzs^3 - zzt^3$. Et la seconde $zx + z^3t^3 \propto z^3r^3$. Et $x \propto zzr^3 - zzt^3$. Et la troisiéme $zv + z^3t^3 \propto z^3q^3$. Et $v \propto zzq^3 - zzt^3$. Et la somme des trois est $zy + zx + zv \propto zt$. Et $y + x + v \propto t \propto zzs^3 + zzr^3 + zzq^3 - 3zzt^3$. Et prenant pour t un quarré pp, on aura l'égalité $1pp \propto zzs^3 + zzr^3 + zzq^3 - 3zzp^6$. Et $\frac{pp}{zz} \propto s^3 + r^3 + q^3 - 3p^6$. Et afin de faire en sorte que le second membre soit un quarré parfait; on prendra $m + pp$ pour s, & $n - m$ pour r, pour effacer m^3. Et mettant pour s & pour r ces nouvelles valeurs dans l'égalité précédente; elle sera $\frac{pp}{zz} \propto 3mmpp + 3mmn + 3mp^4 - 3mnn + n^3 + q^3 - 2p^6$. Et prenant encore un quarré $9ll$ pour $3pp + 3n$ qui multiplie le quarré mm; on aura une valeur $n \propto 3ll - pp$. Et p sera moindre que $\sqrt{3ll}$. Et l'égalité précédente sera $\frac{pp}{zz} \propto 9llmm + 3mp^4 - 3mnn + n^3 + q^3 - 2p^6$. Nommant donc enfin $k - 3lm$ ou $3lm - k$ le côté du second de ses membres; on trouvera une nouvelle égalité $9llmm + 3mp^4 - 3mnn + n^3 + q^3 - 2p^6 \propto 9llmm - 6klm + kk$.

Et par tranſpoſition, $6klm + 3p^4m - 3nnm \propto kk + 2p^6 - n^3 - q^3$. Et $m \propto \frac{kk + 2p^6 - n^3 - q^3}{6kl + 3p^4 - 3nn}$. Et l'arbitraire q ſurpaſſera pp, afin que la grandeur zv ſoit réelle. Et comme m ou ſa valeur $\frac{kk + 2p^6 - n^3 - q^3}{6kl + 3p^4 - 3nn}$ vaut moins que la grandeur $n \propto 3ll - pp$, ſi on multiplie de part & d'autre par le dénominateur, & qu'on achêve les comparaiſons, on trouvera que l'arbitraire k vaut moins que $3ln - 3lpp + \sqrt{9llnn - 36lnpp + 9llp^4 + 3p^4n - 2n^3 - 5p^6 + q^3 + 3ppnn}$. Et afin que la grandeur m ſoit poſitive; le quarré kk ſurpaſſe $n^3 + q^3 - 2p^6$, & ſon côté k ſurpaſſe encore $\frac{nn - p^4}{2}$: Ou le quarré kk vaut moins que $n^3 + q^3 - 2p^6$, & ſon côté k vaut encore moins que $\frac{nn - p^4}{2}$.

Suppoſitions.

$\{ zy + zx + zv \propto zt$. $\{ zy + z^3t^3 \propto z^3s^3$. $\{ zx + z^3t^3 \propto z^3r^3$. $\{ zv + z^3t^3 \propto z^3q^3$.

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} q.\ p.\ k.\ l.\ \textit{arbitraires}.\ n \propto 3ll - pp.\ m \propto \frac{kk + 2p^6 - n^3 - q^3}{6kl + 3p^4 - 3nn}.\ s \propto m + pp. \\ \quad r \propto n - m.\ t \propto pp.\ z \propto \frac{2pkl + p^5 - nnp}{kkl + p^4k - nnk - 2p^6l + n^3l + q^3l} \propto \frac{p}{g}. \\ \quad g \propto k - 3lm.\ \{ zy \propto \frac{p^3s^3 - p^9}{g^3}.\ zx \propto \frac{p^3r^3 - p^9}{g^3}.\ zv \propto \frac{p^3q^3 - p^9}{g^3}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} p \propto 1.\ l \propto 1.\ q \propto 2.\ k \propto 4.\ \{ n \propto 2.\ m \propto \frac{2}{15}.\ s \propto \frac{17}{15}.\ r \propto \frac{28}{15}.\ g \propto \frac{18}{5}.\ z \propto \frac{5}{18}. \\ zy \propto \frac{1538}{157464}.\ zx \propto \frac{18577}{157464}.\ zv \propto \frac{23625}{157464}.\ \{ zs \propto \frac{17}{54}.\ zr \propto \frac{28}{54}.\ zq \propto \frac{30}{54}. \\ \textit{Cubes}.\ z^3p^6 + zy \propto \frac{4913}{157464}.\ z^3p^6 + zx \propto \frac{21952}{157464}.\ z^3p^6 + zv \propto \frac{27000}{157464}. \end{array}\right.$$

XX QUESTION.

45\. *Pour trouver deux grandeurs, telles que chacune étant retranchée du cube de leur ſomme, les reſtes ſoient des cubes parfaits.*

Ayant nommé la premiére zy, & la ſeconde zx, & leur ſomme zt; & zs le côté du premier des deux cubes, & zr le côté du ſecond. La premiére égalité $z^3t^3 - zy \propto z^3s^3$ fournit une valeur $zy \propto z^3t^3 - z^3s^3$. Et la ſeconde $z^3t^3 - zx \propto z^3r^3$ une valeur $zx \propto z^3t^3 - z^3r^3$. Et la ſomme $zy + zx \propto zt \propto 2z^3t^3 - z^3s^3 - z^3r^3$. Et $t \propto 2zzt^3 - zzs^3 - zzr^3$. Et prenant un quarré pp pour t; la même égalité ſera $pp \propto 2zz\,p^6 - zzs^3 - zzr^3$. Ou $\frac{pp}{zz} \propto 2p^6 - s^3 - r^3$. Et prenant $pp - r$ pour s, afin d'effaçer s^3 & r^3, & d'avoir un ſeul quarré p^6; l'égalité précédente ſera

$\frac{pp}{zz} \propto p^6 + 3p^4r - 3prr$. Et nommant $gr - p^3$ le côté $\frac{p}{z}$, la même égalité sera $p^6 + 3p^4r - 3pprr \propto p^6 - 2gp^3r + ggrr$. Et $ggr + 3ppr \propto 3p^4 + 2gp^3$. Ou $r \propto \frac{3p^4 + 2gp^3}{gg + 3pp}$. Et comme pp surpasse r ou sa valeur $\frac{3p^4 + 2gp^3}{gg + 3pp}$; le produit $ggpp + 3p^4$ surpasse le numérateur $3p^4 + 2gp^3$. Et l'arbitraire g surpasse $2p$.

1ere *supposition* $\{ zy + zx \propto zt$. 2e $\{ z^3t^3 - zy \propto s^3$. 3e $\{ z^3t^3 - zx \propto z^3r^3$.

Résolution infinie.

$\left\{ \begin{array}{l} p.\ g.\ \textit{arbitraires}.\ r \propto \frac{3p^4 + 2gp^3}{gg + 3pp}.\ s \propto pp - r.\ t \propto pp.\ z \propto \frac{p}{gr - p^3}. \\ \quad 1^{ere}\ \textit{grandeur}\ zy \propto z^3t^3 - z^3s^3.\ 2^{e}\ zx \propto z^3t^3 - z^3r^3. \end{array} \right.$

Exemples.

p.	g.	r.	s.	z.	zy.	zx.	$z^3t^3 - zy$.	$z^3t^3 - zx$.	zs.	zr.	zt.
1.	3.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{4}{5}$.	$\frac{63}{125}$.	$\frac{37}{125}$.	$\frac{1}{125}$.	$\frac{27}{125}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{3}{5}$.	$\frac{100}{125}$.
1.	4.	$\frac{11}{19}$.	$\frac{8}{19}$.	$\frac{19}{25}$.	$\frac{6347}{15625}$.	$\frac{4528}{15625}$.	$\frac{512}{15625}$.	$\frac{1331}{15625}$.	$\frac{8}{19}$.	$\frac{11}{19}$.	$\frac{10875}{15625}$.

XXI QUESTION.

46. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacune étant retranchée du cube de leur somme, les restes soient des cubes parfaits.*

Nul des Sçavans qui ont écrit sur Diophante, n'ayant pû jusqu'ici éclaircir la résolution qu'il expose de cette question; j'ai entrepris de le faire en découvrant les vestiges secrets de son Analyse, & les suppositions ou les opérations tacites qu'il a supprimées. Et même j'aurai soin de rendre infinie la résolution qu'il n'a donné qu'en particulier. Pour ce sujet je nommerai, comme dans la question précédente, zy la première grandeur, & zx la seconde, & zv la troisiéme, & zt la somme des trois; & zs le côté du premier des trois cubes, & zr le côté du second, & zq le côté du troisiéme. Et la première égalité sera $z^3t^3 - zy \propto z^3s^3$. Ou $zy \propto z^3t^3 - z^3s^3$. Et la seconde $z^3t^3 - zx \propto z^3r^3$. Ou $zx \propto z^3t^3 - z^3r^3$. Et la troisiéme $z^3t^3 - zv \propto z^3q^3$. Ou $zv \propto z^3t^3 - z^3q^3$. Et $zy + zx + zv \propto 3z^3t^3 - z^3s^3 - z^3r^3 - z^3q^3 \propto zt$. Et $y + x + v \propto 3zzt^3 - zzs^3 - zzr^3 - zzq^3 \propto t$. Et prenant pp pour t, on aura $3p^6 - s^3 - r^3 - q^3 \propto \frac{pp}{zz}$. Et supposant $pp - n \propto s$, & la somme $r^3 + q^3$ des deux autres cubes égale à la différence de deux cubes, dont les côtez seront $pp - 2n$ & $3n$; si on met dans l'égalité précédente pour s sa valeur $pp - n$, & pour $r^3 + q^3$ la différence $p^6 - 6p^4n + 12ppnn - 35n^3$ des cubes de $pp - 2n$ & $3n$; on formera l'égalité $p^6 + 9p^4n - 15ppnn + 36n^3 \propto \frac{pp}{zz}$. Et

Autre résolution plus étenduë.

Ayant dénommé les grandeurs, & formé comme auparavant l'égalité $3p^6 - s^3 - r^3 - q^3 \propto \frac{pp}{zz}$. Si on prend $pp - n$ pour s, & $n - m$ pour r; l'égalité précédente sera changée en celle-ci $2p^6 + m^3 - q^3 + 3p^4n - 3ppnn - 3mmn + 3mnn \propto \frac{pp}{zz}$. Et si on peut quarrer une partie du premier membre, comme $2p^6 + m^3 - q^3$, où n n'est point enveloppée; le reste de la résolution sera facile. Et afin de pouvoir quarrer $2p^6 + m^3 - q^3$, on pourra prendre $pp - 2m$ pour q. Et le quarré $2p^6 + m^3 - q^3$ sera $p^6 + 6p^4m - 12ppmm + 9m^3$. Et mettant ll pour m, afin que $9m^3$ soit un quarré $9l^6$; le même quarré sera $p^6 + 6p^4ll - 12ppl^4 + 9l^6$. Et nommant $p^3 + 3l^3$ le côté de ce même quarré; on formera l'égalité $p^6 + 6p^4ll - 12ppl^4 + 9l^6 \propto p^6 + 6p^3l^3 + 9l^6$. Ou $6p^4ll - 12ppl^4 \propto 6p^3l^3$. Et divisant de part & d'autre par $6ppll$; on aura celle-ci $pp - 2ll \propto pl$. Et on en tirera une valeur $p \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + 2ll} \propto 2l$. Mettant donc pour p sa valeur $2l$, & pour m sa valeur ll, & pour q sa valeur $pp - 2m$ ou $2ll$; le quarré $2p^6 + m^3 - q^3$ sera $121l^6$. Et nommant h son côté $11l^3$, l'égalité $2p^6 + m^3 - q^3 + 3p^4n - 3ppnn - 3mmn + 3mnn \propto \frac{pp}{zz}$, d'où l'on étoit parti, sera $hh + 3p^4n - 3ppnn - 3mmn + 3mnn \propto \frac{pp}{zz}$. Et nommant enfin $h + gn$ le côté du quarré; on aura l'égalité $hh + 3p^4n - 3ppnn - 3mmn + 3mnn \propto hh + 2ghn + ggnn$. Ou $ggn + 3ppn - 3mn \propto 3p^4 - 3mm - 2gh$. Et $n \propto \frac{3p^4 - 3mm - 2gh}{gg + 3pp - nn} \propto \frac{45l^4 - 22gl^3}{gg + 9ll}$. &c. Et cette résolution est infiniment plus étenduë, & suppose beaucoup moins que celle de Schooten.

Suppositions.

$$\{ zy + zx + zv \propto zt. \ \{ z^3t^3 - zy \propto z^3s^3. \ \{ z^3t^3 - zx \propto z^3r^3. \ \{ z^3t^3 - zv \propto z^3q^3.$$

Résolution infinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} l.\ g.\ \textit{arbitraires}.\ n \propto \frac{45l^4 - 22gl^3}{gg + 9ll}.\ z \propto \frac{2gg + 18ll}{99l^4 + 45gl^3 - 11ggll} \propto \frac{2l}{11l^3 + gn}. \\ s \propto \frac{4llgg + 22gl^3 - 9l^4}{gg + 9ll}.\ r \propto \frac{36l^4 - 22gl^3 - llgg}{gg + 9ll}.\ q \propto 2ll.\ t \propto 4ll. \\ zy \propto 64l^6z^3 - s^3z^3.\ zx \propto 64l^6z^3 - r^3z^3.\ zv \propto 64l^6z^3 - q^3z^3. \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} l \propto 1.\ g \propto 1.\ \{ n \propto \frac{23}{10}.\ z \propto \frac{20}{133}.\ s \propto \frac{17}{10}.\ r \propto \frac{13}{10}.\ q \propto 2.\ t \propto 4.\ tz \propto \frac{80}{133}. \\ t^3z^3 \propto \frac{512000}{2352637}.\ \{ zy \propto \frac{472696}{2352637}.\ zx \propto \frac{494424}{2352637}.\ zv \propto \frac{448000}{2352637}. \\ \textit{Cubes}.\ t^3z^3 - zy \propto \frac{39304}{2352637}.\ t^3z^3 - zx \propto \frac{17576}{2352637}.\ t^3z^3 - zv \propto \frac{64000}{2352637}. \\ \textit{Côtez}.\ zs \propto \frac{34}{133}.\ zr \propto \frac{26}{133}.\ zq \propto \frac{40}{133}.\ \{ zy + zx + zv \propto \frac{1415120}{2352637} \propto \frac{80}{133} \propto tz. \end{array} \right.$$

XXII QUESTION.

47. *Pour trouver quatre grandeurs, telles que chacune étant ôtée du cube de leur ſomme, les reſtes ſoient des cubes parfaits.*

Ayant nommé comme aux queſtions précédentes, la premiére zy, & la ſeconde zx, & la troiſiéme zv, & la quatriéme zt, & la ſomme zss; & zr le côté du premier cube $z^3s^6 - zy$, & zq le côté du ſecond $z^3s^6 - zx$, & zp le côté du troiſiéme $z^3s^6 - zv$, & zn le côté quatriéme $z^3s^6 - zt$; On prendra les valeurs des grandeurs, & leur ſomme étant comparée au côté zss, on formera l'égalité $4s^6 - r^3 - q^3 - p^3 - n^3 \propto \frac{ss}{zz}$. Et afin que le premier membre ſoit au juſte un quarré; on prendra premiérement $ss - m$ pour r, & $m - l$ pour q; & mettant ces valeurs des grandeurs r & q dans l'égalité, elle ſera transformée en cette autre $3s^6 + 3s^4m - 3ssmm + 3mml - 3mll + l^3 - p^3 - n^3$. On cherchera enſuitte un quarré parfait égal à la partie $3s^6 + l^3 - p^3 - n^3$, où m ne ſe rencontre point. Et pour trouver ce quarré, on ſuppoſera $p \propto ss - k$ & $n \propto ss - 2k$, & $l \propto 3k$. Et la partie $3s^6 + l^3 - p^3 - n^3$ ſera $s^6 + 9s^4k - 15sskk + 36k^3$. Et prenant $s^3 + 3sk$ pour côté de ce quarré, l'égalité ſera $s^6 + 9s^4k - 15ssk + 36k^3 \propto s^6 + 6s^4k + 9sskk$. Ou $36kk \propto 24ssk - 3s^4$. Et $12kk \propto 8ssk - s^4$. D'où l'on tirera [b] une valeur $k \propto \frac{1}{3}ss + \sqrt{\frac{1}{9}s^4 - \frac{1}{12}s^4} \propto \frac{1}{2}ss$, & une autre $k \propto \frac{1}{6}ss$. Et ainſi le quarré $3s^6 + l^3 - p^3 - n^3$ de $s^3 + 3sk$ ſera $\frac{9}{4}s^6$. Et l'égalité $3s^6 + l^3 - p^3 - n^3 + 3s^4m - 3ssmm + 3mml - 3mll$, d'où l'on étoit parti, ſera $\frac{9}{4}s^6 + 3s^4m - 3ssmm + 3mml - 3mll$. Et prenant $gm - \frac{3}{2}s^3$ pour côté du quarré, l'égalité ſera $\frac{9}{4}s^6 + 3s^4m - 3ssmm + 3mml - 3mll \propto \frac{9}{4}s^6 - 3s^3gm + ggmm$. Ou $ggm + 3ssm - 3lm \propto 3s^3g + 3s^4 - 3ll$. Et $m \propto \frac{3s^3g + 3s^4 - 3ll}{gg + 3ss - 3l} \propto \frac{12s^3g + 9s^4}{4gg + 6ss}$. Mais afin que le côté r ou ſa valeur $ss - m$ ſoit poſitive; le quarré ss ſurpaſſe m ou ſa valeur $\frac{12s^3 + 9s^4}{4gg + 6ss}$. Et diviſant de part & d'autre par ss, & multipliant encore de part & d'autre par le dénominateur $4gg + 6ss$; ce même dénominateur ſurpaſſera l'expoſant $12sg + 9ss$. Et l'arbitraire g ſurpaſſera [d] par conſéquent $\frac{3}{2}s + s\sqrt{3}$. Mais afin que l'autre côté q ou $m - \frac{1}{2}ss$ ſoit encore poſitive, il faudra que $2m$ ou $\frac{12s^3g + 9s^4}{2gg + 3ss}$ ſurpaſſe $1ss$, ou que $12sg + 9ss$ ſurpaſſe le dénominateur $2gg + 3ss$. De ſorte que gg vaut moins $6sg + 3ss$. Et l'arbitraire g moins que $3s + \sqrt{12ss}$. Les deux exemples tirez du modéle, & qu'on ex-

b. 23. 1.

d. 21. 1.

poſe ici, ſont beaucoup plus ſimples que ceux qui ſont dans Shooten, & dont il fait une ſi grande eſtime.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Somme } \{ zy + zx + zv + zt \propto zss. \ \{ 1^{er} \textit{ Cube } z^3s^6 - zy \propto z^3r^3. \\ 2^d \textit{ Cube } z^3s^6 - zx \propto z^3q^3. \ \{ 3^e \ z^3s^6 - zv \propto z^3p^3. \ \{ 4^e \ z^3s^6 - zt \propto z^3n^3. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} g.\ s.\ \textit{arbitraires. } m \propto \frac{12s^3g + 9s^4}{4gg + 6ss}.\ z \propto \frac{2}{2gm - 3s^3}.\ q \propto \frac{2m - ss}{2}.\ r \propto ss - m.\ p \propto \frac{5}{6}ss. \\ n \propto \frac{2}{3}ss.\ \{ rz \propto \frac{6ss - 6m}{6gm - 9s^3}.\ qz \propto \frac{6m - 3ss}{6gm - 9s^3}.\ pz \propto \frac{5ss}{6gm - 9s^3}.\ nz \propto \frac{4ss}{6gm - 9s^3}. \\ zy \propto z^3s^6 - z^3r^3.\ zx \propto z^3s^6 - z^3q^3.\ zv \propto z^3s^6 - z^3p^3.\ zt \propto z^3s^6 - z^3n^3. \end{array}\right.$$

Premier exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s \propto 1.\ g \propto 6.\ m \propto \frac{27}{50}.\ z \propto \frac{50}{87}.\ \{ ssz \propto \frac{150}{261}.\ rz \propto \frac{69}{261}.\ qz \propto \frac{6}{261}.\ pz \propto \frac{125}{261}.\ nz \propto \frac{100}{261}. \\ 1^{ere} \textit{ grandeur } zy \propto \frac{3046491}{17779581}.\ 2^e\ zx \propto \frac{3374784}{17779581}.\ 3^e\ zv \propto \frac{1421875}{17779581}.\ 4^e\ zt \propto \frac{2375000}{17779581}. \\ \textit{Somme } zy + zx + zv + zt \propto ssz \propto \frac{10218150}{17779581} \propto \frac{150}{261} \propto \frac{50}{87}.\ \{ z^3s^6 - zy \propto \frac{3328509}{17779581}. \\ z^3s^6 - zx \propto \frac{216}{17779581}.\ z^3s^6 - zv \propto \frac{1953125}{17779581}.\ z^3s^6 - zt \propto \frac{1000000}{17779581}. \end{array}\right.$$

Second exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s \propto 1.\ g \propto 4.\ m \propto \frac{57}{70}.\ \{ 1z \propto ssz \propto \frac{210}{369}.\ rz \propto \frac{39}{369}.\ qz \propto \frac{61}{369}.\ pz \propto \frac{175}{369}.\ nz \propto \frac{140}{369}. \\ zy \propto \frac{9201681}{50243409}.\ zx \propto \frac{8973504}{50243409}.\ zv \propto \frac{3901625}{50243409}.\ zt \propto \frac{6517000}{50243409}. \\ \textit{Somme } zy + zx + zv + zt \propto zss \propto \frac{28593810}{50243409} \propto \frac{210}{369}.\ \{ z^3s^6 - zy \propto \frac{59319}{50243409}. \\ z^3s^6 - zx \propto \frac{287496}{50243409}.\ z^3s^6 - zv \propto \frac{5359375}{50243409}.\ z^3s^6 - zt \propto \frac{2744000}{50243409}. \end{array}\right.$$

XXIII QUESTION.

48. *Pour trouver trois grandeurs, telles qu'ayant ôté de chacune le cube de la ſomme des trois, les reſtes ſoient des cubes parfaits.*

Ayant nommé zy la premiére grandeur, & zx la ſeconde, & zv la troiſiéme, & ppz comme dans les queſtions précédentes, la ſomme des trois; & zs le côté du premier des cubes, & zr le côté du ſecond, & zq le côté du troiſiéme. La premiére égalité ſera $zy - z^3p^6 \propto z^3s^3$. Et $zy \propto z^3p^6 + z^3s^3$. Et la ſeconde $zx - z^3p^6 \propto z^3r^3$. Ou $zx \propto z^3p^6 + z^3r^3$. Et la troiſiéme $zv - z^3p^6 \propto z^3q^3$. Ou $zv \propto z^3p^6 + z^3q^3$. Et la ſomme $zy + zx + zv \propto zpp \propto 3z^3p^6 + z^3s^3 + z^3r^3 + z^3q^3$. Et $\frac{pp}{zz} \propto 3p^6 + s^3 + r^3 + q^3$. Et prenant $n - s$ pour r, afin d'effacer s^3; la même égalité ſera $3p^6 + n^3 - 3nns + 3nss + q^3 \propto \frac{pp}{zz}$. Et afin que le premier membre puiſſe

$2zz + 3z + 3$. Et ce même plan recevant le premier donnera le quarré de $2zz + 3z + 2$. De sorte que pour remplir toutes les conditions, il suffit que $4zz + 4z + 4$ ou $zz + 1z + 1$ soit un quarré parfait. Nommant donc son côté $y - z$, l'égalité sera $yy - 2yz + zz \propto zz + 1z + 1$. Ou $2yz + 1z \propto yy - 1$. Et $z \propto \frac{yy - 1}{2y + 1}$.

Suppositions.

$$zzvv + zz + vv \propto ss.\ zzvv + tt \propto rr.\ zztt + zz + tt \propto qq.$$
$$zztt + vv \propto pp.\ vvtt + vv + tt \propto nn.\ vvtt + zz \propto mm.$$

Résolution infinie.

$$y \text{ arbitraire. } zz \propto \frac{y^4 - 2yy + 1}{4yy + 4y + 1}.\ v \propto \frac{yy + 2y}{2y + 1}.\ t \propto \frac{2yy + 2y + 2}{2y + 1}.$$

Exemple.

$$y \propto 4.\ zz \propto \frac{25}{9}.\ vv \propto \frac{64}{9}.\ tt \propto \frac{196}{9}.\ zzvv + zz + vv \propto \frac{2401}{81}.\ s \propto \frac{49}{9}.$$
$$zzvv + tt \propto \frac{3364}{81}.\ r \propto \frac{58}{9}.\ zztt + zz + tt \propto \frac{6889}{81}.\ q \propto \frac{83}{9}.\ zztt + vv \propto \frac{5476}{81}.$$
$$p \propto \frac{74}{9}.\ vvtt + vv + tt \propto \frac{14884}{81}.\ n \propto \frac{122}{9}.\ vvtt + zz \propto \frac{12769}{81}.\ m \propto \frac{113}{9}.$$

COROLLAIRE ET QUESTION XXV.

50. *Pour trouver trois nombres, tels qu'ayant ôté de chacun de leurs plans alternatifs les côtez qui le forment, ou le nombre qui reste; les trois restes soient des quarrez parfaits. Et si on ôte 2 de chacun de ces mêmes nombres, que les restes soient encore des quarrez parfaits.*

Si on ajoûte 2 à chacun des quarrez précédens; les nombres $1zz + 2$, $1zz + 2z + 3$, $4zz + 4z + 6$, résoudront la question. Car ayant ôté 2 de chacun, les restes sont déja les quarrez parfaits $1zz$, $1zz + 2z + 1$, $4zz + 4z + 4$. Et le plan des deux premiers nombres moins leur somme donne le quarré de $zz + 1z + 1$. Et ce même plan moins le troisiéme donne le quarré de $1zz + 1z$. Et le plan du premier & du troisiéme moins leur somme donne le quarré de $2zz + 1z + 2$. Et ce même plan moins le second donne le quarré de $2zz + 1z + 3$. Et le plan du second & du troisiéme moins leur somme donne le quarré de $2zz + 3z + 3$. Et ce même plan moins le premier donne le quarré de $2zz + 3z + 4$.

Suppositions.

$$1zz + 2 \propto t.\ 1xx + 2 \propto s.\ 1vv + 2 \propto r.\ ts - t - s \propto qq.\ ts - r \propto pp.$$
$$tr - t - r \propto nn.\ tr - s \propto mm.\ sr - s - r \propto ll.\ sr - t \propto kk.$$

Résolution infinie.

$$y \text{ arbitraire. } z \propto \frac{yy - 1}{2y + 1}.\ t \propto zz + 2.\ s \propto zz + 2z + 3.\ r \propto 4zz + 4z + 6.$$

Résolution infinie.

$$y \text{ arbitraire.}\quad z \propto \frac{yy - aa}{2y + a}.\quad v \propto \frac{yy + 2ay}{2y + a}.\quad t \propto \frac{2yy + 2ay + 2aa}{2y + a}.$$

Exemple.

$$\begin{cases} a \propto 3.\ y \propto 12.\ zz \propto 25.\ vv \propto 64.\ tt \propto 196.\ zzvv + aazz + aavv \propto 2401. \\ zzvv + aatt \propto 3364.\ zztt + aatt \propto 14884.\ vvtt + aavv \propto 5476. \\ vvtt + aavv + aatt \propto 14884.\ vvtt + aazz \propto 12769. \\ \text{Côtez. } s \propto 49.\ r \propto 58.\ q \propto 83.\ p \propto 74.\ n \propto 122.\ m \propto 113. \end{cases}$$

XXVII QUESTION.

PREMIER CAS.

52. *Pour trouver trois grandeurs, telles que chacune étant ajoûtée au solide des trois, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la premiére grandeur, & zy le côté du quarré qui comprend le solide des trois plus la premiére z, & x la seconde grandeur, & la troisiéme v. La premiére égalité sera $zxv + z \propto zzyy$. Et $xv \propto zyy - 1$. Et $v \propto \frac{zyy - 1}{x}$. Et le solide zxv ou sa valeur $zzyy - 1z$ recevant la seconde grandeur x, & ensuitte la troisiéme grandeur v ou sa valeur $\frac{zyy - 1}{x}$; les deux sommes $zzyy - 1z + x$ & $zzyy - 1z + \frac{zyy - 1}{x}$ doivent être des quarrez parfaits. Et cette double égalité étant résoluë selon les régles
c. 93. 4. prescrites [b] au sixiéme cas de la question quinziéme du quatriéme Livre, on trouvera une valeur indéterminée de l'inconnuë z. Et cette résolution aura beaucoup plus d'étenduë que celle de Monsieur De Fermat, où il faut nécessairement que l'une des grandeurs soit un quarré parfait. Et il seroit facile de former encore d'autres modéles de résolutions infinies.

1ere *supposition* $zxv + z \propto zzyy$. 2e $zxv + x \propto ss$. 3e $zxv + v \propto rr$.

Résolution infinie.

$$x.\ y. \text{ arbitraires. } t \propto \frac{4x^3 + 4x - yy}{4yx}.\quad z \propto \frac{ttx + 1}{yy + 2txy - 1x}.\quad v \propto \frac{zyy - 1}{x}.$$

Exemple.

$$\begin{cases} x \propto 2.\ y \propto 2.\ t \propto \frac{9}{4}.\ z \propto \frac{89}{160}.\ v \propto \frac{49}{80}.\ zxv \propto \frac{4361}{6400}.\ zxv + z \propto \frac{7921}{6400}.\ zy \propto \frac{89}{80}. \\ zxv + x \propto \frac{17161}{6400}.\ s \propto \frac{131}{80}.\ zxv + v \propto \frac{8281}{6400}.\ r \propto \frac{91}{80}. \end{cases}$$

SECOND CAS.

53. *Et si chacune des grandeurs est retranchée du solide des trois; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Si l'arbitraire x vaut moins que le quarré arbitraire yy; la même x surpassera l'unité. Et le quarré yy sera moindre que $4x^3 - 4x$.

1ere supposition $\{ zxv - z \propto zzyy$. 2e $\{ zxv - x \propto ss$. 3e $\{ zxv - v \propto rr$.

Résolution infinie.

$$\{ x.\ y.\ \textit{arbitraires}.\ t \propto \frac{4x^3 - 4x - yy}{4yx}.\ z \propto \frac{tt + x}{2ty + 1}.\ v \propto \frac{zyy + 1}{x}.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \propto 2.\ y \propto 2.\ t \propto \frac{5}{4}.\ z \propto \frac{19}{32}.\ v \propto \frac{27}{16}.\ \{ zxv \propto \frac{513}{256}.\ \{ zxv - z \propto \frac{361}{256}.\ zy \propto \frac{19}{16}. \\ zxv - x \propto \frac{1}{256}.\ s \propto \frac{1}{16}.\ \{ zxv - v \propto \frac{81}{256}.\ r \propto \frac{9}{16}. \end{array} \right.$$

XXVIII QUESTION.

54. *POur trouver trois nombres, tels que leur somme étant multipliée par le premier donne un nombre triangulaire, & par le second un quarré, & par le troisiéme un cube.*

Ayant nommé z la somme des trois nombres, & le premier y, & le second x; le troisiéme est $z - x - y$. Et le plan de la somme z par le premier y donne un nombre triangulaire que je nomme t. Ce qui donne une valeur $y \propto \frac{t}{z}$. Et le plan de la somme z par le second nombre x donne un quarré vv. Ce qui fournit une valeur $x \propto \frac{vv}{z}$. Et par la troisiéme supposition, le plan de la somme z par le troisiéme nombre $z - y - x$ donne un nombre cubique que je nomme s^3. D'où je forme l'égalité $zz - zy - zx \propto s^3$. Et mettant dans cette égalité pour y sa valeur $\frac{t}{z}$, & pour x sa valeur $\frac{vv}{z}$; la même égalité sera $zz - t - vv \propto s^3$. Ou $zz \propto vv + t + s^3$. Prenant donc $v + r$ pour le côté z, on aura l'égalité $vv + t + s^3 \propto vv + 2vr + rr$. Ou $2vr \propto t + s^3 - rr$. Et la question est résoluë dans toute l'étenduë qu'elle peut avoir. Ceux qui auront ici la curiosité de comparer la méthode que nous suivons avec celle de Diophante pourront facilement juger de la différence. Les nombres les plus simples qu'il découvre, & qui satisfont au problême, sont $\frac{153}{81}, \frac{6400}{81}, \frac{8}{81}$. Et son Commentateur employe selon sa coûtume beaucoup de discours & de peine, pour éclaircir les difficultez de cette résolution. Les nombres tres-simples, qu'on découvre ici sans aucun travail, sont $\frac{3}{6}, \frac{25}{6}, \frac{8}{6}$.

Suppositions.

$\{ z \propto y + x + p$. $\{ zy \propto t$ *triangulaire*. $\{ zx \propto vv$. $\{ zp \propto zz - zy - zx \propto s^3$.

Résolution infinie.

$t.\ s.\ r.$ *arbitraires.* $v \propto \frac{t + s^3 - rr}{2r}$. $z \propto \frac{t + s^3 + rr}{2r}$. $1^{ere}\ y \propto \frac{2tr}{t + s^3 + rr}$.
$2^e\ x \propto \frac{2vvr}{t + s^3 + rr}$. $3^e\ p \propto z - y - x \propto \frac{tt + 2ts^3 + s^6 - 2trr - 4vvrr + 2s^3rr + r^4}{2tr + 2s^3r + 2r^3}$.

Exemples.

$t.$	$s.$	$r.$	$v.$	$z.$	$y.$	$x.$	$p.$	zy *triangulaire.*	$zx.$	$zp.$	$z.$
3.	2.	1.	5.	6.	$\frac{3}{6}$.	$\frac{25}{6}$.	$\frac{8}{6}$.	3 *triangulaire.*	25.	8.	$\frac{36}{6}$.
15.	2.	1.	11.	12.	$\frac{15}{12}$.	$\frac{121}{12}$.	$\frac{8}{12}$.	15 *triangulaire.*	121.	8.	$\frac{144}{12}$.
153.	2	1.	80.	81.	$\frac{153}{81}$.	$\frac{6400}{81}$.	$\frac{8}{81}$.	153 *triangulaire.*	6400.	8.	$\frac{6561}{81}$.

XXIX QUESTION.

55. *Pour trouver cinq nombres, tels que leur somme étant multipliée par le premier donne pour produit un nombre triangulaire, & par le second un quarré, & par le troisiéme un cube, & par le quatriéme un pentagone, & par le cinquiéme une puissance quatriéme & parfaite.*

Ayant nommé z la somme des cinq nombres, & y le premier, & x le second, & v le troisiéme, & t le quatriéme, & s le cinquiéme. Le cinquiéme s sera $z - y - x - v - t$. Et nommant r le nombre triangulaire, & qq le quarré, & p^3 le cubique, & n le nombre pentagone, & m^4 celuy qui est en quatriéme puissance. La premiére égalité sera $zy \propto r$. Et $y \propto \frac{r}{z}$. Et la seconde $zx \propto qq$. Et $x \propto \frac{qq}{z}$. Et la troisiéme $zv \propto p^3$. Et $v \propto \frac{p^3}{z}$. Et la quatriéme $zt \propto n$. Et $t \propto \frac{n}{z}$. Et la cinquiéme $zs \propto zz - zy - zx - zv - zt \propto m^4$. Et mettant dans cette égalité pour y sa valeur $\frac{r}{z}$, & pour x sa valeur $\frac{qq}{z}$, & pour v la sienne $\frac{p^3}{z}$, & pour t la sienne $\frac{n}{z}$; la même égalité sera $zz - r - qq - p^3 - n \propto m^4$. Et $zz \propto qq + r + p^3 + n + m^4$. Et nommant $g + l$ le côté z de ce même quarré. L'égalité sera $qq + r + p^3 + n + m^4 \propto qq + 2ql + ll$. Et $2ql \propto r + p^3 + n + m^4 - ll$. Et enfin $q \propto \frac{r + p^3 + n + m^4 - ll}{2l}$. Et on pourra former une suitte infinie de résolutions infinies. Et on peut remarquer que la somme des numérateurs est le quarré du commun dénominateur z.

Suppositions.

$z \propto y + x + v + t + s$. $zy \propto r$ *triangulaire.* $zx \propto qq$.
$zv \propto p^3$. $zt \propto n$ *pentagone.* $zs \propto zz - zy - zx - zv - zt \propto m^4$.

Résolution infinie.

$$\begin{cases} r.\ p.\ n.\ m.\ l.\ \text{arbitraires.}\ q \propto \dfrac{r + p^3 + n + m^4 - ll}{2l}.\ z \propto q + l. \\ z \propto \dfrac{r + p^3 + n + m^4 + ll}{2l}.\ \Big\{ y \propto \dfrac{r}{z}.\ x \propto \dfrac{qq}{z}.\ v \propto \dfrac{p^3}{z}.\ t \propto \dfrac{n}{z}.\ s \propto \dfrac{m^4}{z}. \end{cases}$$

Exemple.

$$\begin{cases} r.\ p.\ n.\ m.\ l. & \{\ q.\ \ z. & \{\ y.\ \ x.\ \ v.\ \ t.\ \ s.\ \ z. \\ 6.\ 2.\ 5.\ 2.\ 1. & \{\ 17.\ 18. & \{\ \dfrac{6}{18}.\ \dfrac{289}{18}.\ \dfrac{8}{18}.\ \dfrac{5}{18}.\ \dfrac{16}{18}.\ \dfrac{324}{18}.\ \ \&c. \end{cases}$$

XXX QUESTION.

56. *Pour trouver trois quarrez de quarrez, dont la ſomme ſoit un quarré parfait.*

Ayant nommé ſimplement le premier z^4, & le ſecond y^4, & le troiſiéme x^4, & pris $v - zz$ pour le côté du quarré que doit former leur ſomme; l'égalité ſera $z^4 + y^4 + x^4 \propto z^4 - 2vzz + vv$. Ou $2vzz \propto vv - y^4 - x^4$. Et $zz \propto \dfrac{vv - y^4 - x^4}{2v}$. Et prenant $yy + xx$ pour v, afin d'effacer y^4 & x^4; la même égalité ſera $zz \propto \dfrac{yyxx}{yy + xx}$. Comme donc le numérateur eſt déja quarré; il ſuffira que le dénominateur $yy + xx$ en ſoit encore un. Ce qui ſera [b] facile, prenant $tt - ss$ pour y, & $2ts$ pour x. b. 10. 3.

Suppoſition. *Résolution infinie.*

$$\Big\{ z^4 + y^4 + x^4 \propto vv - 2vzz + z^4.\ \Big\{ t.\ s.\ \text{arbitraires.}\ y \propto tt - ss.\ x \propto 2ts.\ z \propto \dfrac{2t^3s - 2ts^3}{tt + ss}.$$

Exemple.

$$\begin{cases} t \propto 2.\ s \propto 1.\ \Big\{ y \propto 3.\ x \propto 4.\ z \propto \dfrac{12}{5}.\ \Big\{ z^4 + y^4 + x^4 \propto \dfrac{231361}{625}.\ \textit{Côté}\ \dfrac{481}{25}. \\ \textit{Résolution par entiers.}\ \Big\{ z \propto 12.\ y \propto 15.\ x \propto 20.\ z^4 + y^4 + x^4 \propto 231361. \end{cases}$$

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SEPTIEME.

DE L'ANALYSE INDETERMINE'E.

DES TRIANGLES RECTANGLES.

Definitions.

1. Nous avons déja dit, que si le quarré *aa* d'une seule grandeur *a* est égal aux deux quarrez ensemble *bb* & *cc* de deux autres *b* & *c*, la moitié $\frac{1}{2}bc$ du plan *bc* des deux *b* & *c* est *un triangle rectangle*. Et que les côtez *a*, *b*, *c*, sont *les trois côtez* du triangle rectangle. Que le plus grand *a* est *sa soûtendante*, & les deux *b* & *c* indifféremment l'un *sa base*, & l'autre son perpendicule. Et souvent on se contente de dire simplement que la base & le perpendicule sont *les côtez de l'angle droit* du triangle rectangle. Et on nomme encore *aire du triangle rectangle* ou simplement *aire* la même moitié $\frac{1}{2}bc$ du plan des côtez *b* & *c*. De sorte que l'aire, ou l'aire du triangle rectangle, ou le triangle rectangle ne signifie ordinairement qu'une même chose. Ce qu'il est à propos de bien remarquer. Et on dit encore que la somme des trois côtez du triangle en est *la circonférence*.

2. Et on dit qu'un triangle rectangle est formé de deux grandeurs *z* & *y*, lorsqu'on

lorſqu'on luy donne pour [b] ſoûtendante la ſomme $zz + yy$ de leurs quarrez, & leur différence $zz - yy$ pour baſe, & le double $2zy$ de leur plan zy pour perpendicule; ou $zz - yy$ pour perpendicule, & $2zy$ pour baſe. Et alors le triangle rectangle, ou ce qu'on nomme ſon aire, eſt $z^3y - zy^3$. Et c'eſt ici le fondement le plus étendu des réſolutions de ce ſeptiéme Livre. b. 10. 3.

Formation du triangle rectangle.

Soûtendante.	Perpendicule.	Baſe.	Aire du triangle rectangle.
$zz + yy$.	$zz - yy$.	$2zy$.	$z^3y - zy^3$.
$25 + 9 \propto 34$.	$25 - 9 \propto 16$.	30.	$375 - 135 \propto 240$.

I QUESTION.

PREMIER CAS.

3. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que ſon aire ayant receu l'un des deux côtez, la ſomme ſoit égale à une grandeur connuë.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë, & nommé zy le perpendicule, & zx la baſe; l'aire [b] eſt $\frac{1}{2}zzyx$. Et ſi on luy ajoûte le côté zy; on formera l'égalité $\frac{1}{2}zzyx + zy \propto a$. Ou $zzyx + 2zy \propto 2a$. D'où l'on tirera [c] une valeur $z \propto -\frac{1y}{yx} + \frac{1}{yx}\sqrt{yy + 2ayx}$. De ſorte que la grandeur $yy + 2ayx$ doit déja être un quarré parfait. Mais la ſomme $zzyy + zzxx$ des quarrez des côtez zy & zx doit encore [b] fournir un quarré parfait. Et par conſéquent les deux grandeurs $yy + xx$, & $yy + 2ayx$ ſont des quarrez parfaits. Et cette double égalité étant rapportée au premier cas de la queſtion cinquiéme du quatriéme Livre; on trouvera une valeur $x \propto \frac{aay - 1y}{2a}$. Et comme on peut trouver ſucceſſivement & juſques à l'infini des valeurs toûjours nouvelles de la grandeur x; on peut auſſi varier juſques à l'infini la réſolution qu'on déſire. b. 1. c. 15. 1.

1ere *ſuppoſition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2e *ſuppoſition* $\{$ *Somme* $\frac{1}{2}zzyx + zy \propto a$.

Premiére des réſolutions infinies.

Réſolution générale. $\{$ *Soûtendante* $\frac{aa + 1}{a + 1}$. *Perpendicule* $\frac{2a}{a + 1}$. *Baſe* $\frac{aa - 1}{a + 1}$.

Exemple.

$\{ a \propto 7$. $\{$ *Soûtendante* $\frac{25}{4}$. *Perpendicule* $\frac{7}{4}$. *Baſe* $\frac{24}{4}$. $\{$ *Aire* $\frac{21}{4}$. $\frac{21 + 7}{4} \propto 7$.

SECOND CAS.

4. *Et ſi l'un des côtez eſt retranché de l'aire, & que le reſte doive égaler une grandeur connuë.*

On formera à peu prés la résolution par les mêmes voies que la précédente.

1^{ere} *supposition* $\{zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2^{e} *supposition* $\{$*Somme* $\frac{1}{2}zzyx - zy \propto a$.

Premiére des résolutions infinies.

Résolution générale. $\{$*Soûtendante* $\frac{aa+1}{a-1}$. *Perpendicule* $\frac{2a}{a-1}$. *Base* $\frac{aa-1}{a-1}$.

Exemple.

$\{a \propto 7$. $\{$*Soûtendante* $\frac{25}{3}$. *Perpendicule* $\frac{7}{3}$. *Base* $\frac{24}{3}$. $\{$*Aire* $\frac{28}{3}$. $\frac{28-7}{3} \propto 7$.

TROISIEME CAS.

5. *ET si l'aire est ôtée de l'un des deux côtez ; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On observera le même ordre & la même méthode. Mais afin que la premiére des résolutions infinies puisse être positive ; il faudra que la grandeur a connuë soit moindre que l'unité.

1^{ere} *supposition* $\{zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2^{e} *supposition* $\{1zy - \frac{1}{2}zzyx \propto 1a$.

Premiére des résolutions infinies.

Résolution générale. $\left\{ \text{Soûtendante. } \frac{1+1a+1aa+1a^3}{1-1aa}. \quad \text{Perpendicule. } \frac{2a+2aa}{1-1aa}. \quad \text{Base. } \frac{1+1a-1aa-1a^3}{1-1aa}. \right.$

Exemple.

$\{a \propto \frac{1}{2}$. $\{$*Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. $\{$*Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{4-3}{2} \propto \frac{1}{2}$.

II QUESTION.

PREMIER CAS.

6. *ET si on ajoûte à l'aire la somme des deux côtez, & que la nouvelle somme doive être égale à une grandeur connuë.*

Ayant nommé comme auparavant zy le perpendicule, & zx la base ; & a la grandeur connuë. L'aire sera $\frac{1}{2}zzyx$. Et l'égalité sera $\frac{1}{2}zzyx + zy$
b. 15. 1. $+ zx \propto a$. Ou $zzyx + 2zy + 2zx \propto 2a$. D'où l'on tirera une [b] valeur $z \propto \frac{-y-x}{yx} + \frac{1}{yx}\sqrt{yy + 2yx + xx + 2ayx}$. De sorte que ce qui est sous le signe $\sqrt{}$ doit être un quarré parfait. Et de plus la somme $zzyy + zzxx$
c. 1. des quarrez des côtez zy & zx doit fournir [c] encore un quarré. Et si on la divise par le quarré zz ; l'exposant $yy + xx$ est un quarré parfait. Et

ainsi il faudra résoudre la double égalité $yy + 2yx + xx + 2ayx$ & $yy + xx$. Ce qui sera facile, en la rapportant au premier cas de la question neuviéme du quatriéme Livre, d'où on tirera une valeur $x \propto \frac{aay + 2ay - 3y}{4a + 4}$.
Et comme on peut trouver [d] successivement & jusques à l'infini des valeurs toûjours nouvelles de la grandeur x; on peut aussi trouver des résolutions toûjours nouvelles & jusques à l'infini de la question proposée. d. 144. 4.

1ere *supposition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2e *supposition* $\{$ *Somme* $\frac{1}{2}zzyx + zy + zx \propto a$.

Premiére des résolutions infinies.

Résolution générale. $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Soûtendante}\ \frac{a^3 + aa + 3a - 5}{2aa + 4a - 6}. \\ \textit{Perpendicule}\ \frac{4aa - 4}{2aa + 4a - 6}.\ \textit{Base}\ \frac{a^3 + aa - 5a + 3}{2aa + 4a - 6}. \end{array} \right.$

Exemple.

$\{ a \propto 6$. $\{$ *Soûtendante* $\frac{53}{18}$. *Perpendicule* $\frac{28}{18}$. *Base* $\frac{45}{18}$. $\{$ *Aire* $\frac{105}{54}$. $\frac{105 + 219}{54} \propto 6$.

SECOND CAS.

7. *ET si la somme des côtez est retranchée de l'aire, & que le reste soit égal à une grandeur connuë.*

On formera la résolution par des voies semblables. Et on la pourra rendre infinie de la même sorte.

1ere *supposition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2e *supposition* $\{$ *Reste* $\frac{1}{2}zzyx - zy - zx \propto a$.

Premiére des résolutions infinies.

Résolution générale. $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Soûtendante}\ \frac{a^4 + 5a^3 + 11aa + 15a}{a^3 + 3aa - 1a - 3}. \\ \textit{Perpendicule}\ \frac{4a^3 + 16aa + 12a}{a^3 + 3aa - 1a - 3}.\ \textit{Base}\ \frac{a^4 + 5a^3 + 3aa - 9a}{a^3 + 3aa - 1a - 3}. \end{array} \right.$

Exemple.

$\{ a \propto 6$. $\{$ *Soûtendante* $\frac{318}{35}$. *Perpendicule* $\frac{24}{5}$. *Base* $\frac{54}{7}$. $\{$ *Aire* $\frac{648}{35}$. $\frac{648 - 438}{35} \propto 6$.

TROISIEME CAS.

8. *ET si l'aire est retranchée de la somme des côtez; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On formera ses raisonnemens & sa résolution comme les deux précédentes. Mais afin que la premiére des résolutions infinies, dont on expose ici le modéle, puisse être positive; il faudra que la grandeur *a* connuë surpasse l'unité, & soit moindre que 3.

1ere *supposition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2e *supposition* $\{ zy + zx - \frac{1}{2}zzyx \propto a$.

Premiére des résolutions infinies.

$$\text{Résolution générale.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Soûtendante } \frac{15a - 11aa + 5a^3 - a^4}{3aa + 1a - a^3 - 3}. \\ \text{Perpendicule } \frac{16aa - 4a^3 - 12a}{3aa + 1a - a^3 - 3}. \text{ Base } \frac{a^4 - 5a^3 + 3aa + 9a}{3aa + 1a - a^3 - 3}. \end{array} \right.$$

Premier exemple.

$\{a \propto 2$. $\{$*Soûtendante* $\frac{10}{3}$. *Perpendicule* $\frac{8}{3}$. *Base* $\frac{6}{3}$. $\{$*Aire* $\frac{8}{3}$. $\frac{8 + 6 - 8}{3} \propto 2$.

Second exemple.

$\{a \propto \frac{3}{2}$. $\{$*Soûtendante* $\frac{51}{10}$. *Perpendicule* $\frac{24}{10}$. *Base* $\frac{45}{10}$. $\{$*Aire* $\frac{54}{10}$. $\frac{24 + 45 - 54}{10} \propto \frac{3}{2}$.

QUATRIEME CAS.

9. *ET si la différence des côtez est ajoûtée à l'aire; afin que la somme puisse égaler une grandeur connuë.*

On formera la résolution de la même sorte. Et afin que la premiére des résolutions infinies soit réelle, en se réglant sur le modéle qu'on expose ici, il faudra que la grandeur a connuë surpasse 3, & soit moindre que $3 + \sqrt{8}$. Car y doit surpasser x ou sa valeur $\frac{aay - 2ay - 3y}{4a - 4}$. Et multipliant de part & d'autre par $4a - 4$; le produit $4ay - 4y$ doit surpasser le numérateur $aay - 2ay - 3y$. Et par conséquent $6a - 1$ doit supasser aa, & $3 + \sqrt{8}$ doit surpasser a. Mais a doit surpasser 3. Si la connuë a étoit moindre que 3, ou plus grande que $3 + \sqrt{8}$; la résolution même que l'on donne ici, serviroit pour le cas suivant, où la différence des côtez est retranchée de l'aire.

1ere *supposition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv$. 2e *supposition* $zy - zx + \frac{1}{2}zzyx \propto a$.

Premiére des résolutions infinies.

$$\text{Résolution générale.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Soûtendante } \frac{a^4 - 5a^3 + 11aa - 15a}{a^3 - 3aa - 1a + 3}. \\ \text{Perpendicule } \frac{4a^3 - 16aa + 12a}{a^3 - 3aa - 1a + 3}. \text{ Base } \frac{a^4 - 5a^3 + 3aa + 9a}{a^3 - 3aa - 1a + 3}. \end{array} \right.$$

Premier éxemple pour la résolution présente.

$\{a \propto 4$. $\{$*Soûtendante* $\frac{52}{15}$. *Perpendicule* $\frac{48}{15}$. *Base* $\frac{20}{15}$. $\{$*Aire* $\frac{32}{15}$. $\frac{32 + 48 - 20}{15} \propto 4$.

Second éxemple pour la résolution suivante.

$\{a \propto 2$. $\{$*Soûtendante* $\frac{10}{3}$. *Perpendicule* $\frac{8}{3}$. *Base* $\frac{6}{3}$. $\{$*Aire* $\frac{8}{3}$. $\frac{8 - 8 + 6}{3} \propto 2$.

Troisiéme exemple pour la résolution suivante.

$\{ a \propto \frac{1}{2}.$ $\{$ *Soûtendante* $\frac{17}{6}.$ *Perpendicule* $\frac{8}{6}.$ *Base* $\frac{15}{6}.$ $\{$ *Aire* $\frac{10}{6}.$ $\frac{10 - 15 + 8}{6} \propto \frac{1}{2}.$

Quatriéme exemple pour la résolution suivante.

$\{ a \propto 6.$ $\{$ *Soûtendante* $\frac{174}{35}.$ *Perpendicule* $\frac{120}{35} \propto \frac{24}{7}.$ *Base* $\frac{126}{35} \propto \frac{18}{5}.$
Aire $\frac{216}{35}.$ *Reste* $\frac{216 - 126 + 120}{35} \propto \frac{210}{35} \propto 6.$

CINQUIEME CAS.

10. *ET si la différence des côtez est retranchée de l'aire; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On formera la résolution comme les précédentes. Et la premiére des résolutions infinies sera positive ou réelle dans le modéle qu'on expose, si la grandeur a connuë surpasse 3, & vaut moins que $3 + \sqrt{8}$. Mais si a vaut moins que 3, & surpasse $3 + \sqrt{8}$; la résolution que l'on donne ici servira pour le cas précédent, où la différence des côtez est ajoûtée à l'aire.

1ere *supposition* $\{ zzyy + zzxx \propto zzvv.$ 2e *supposition* $\{ \frac{1}{2} zzyx - zy + zx \propto a.$

Premiere des résolutions infinies.

Résolution générale. $\{$ *Soûtendante* $\frac{a^3 - 1aa + 3a + 5}{2aa - 4a - 6}.$
Perpendicule $\frac{4aa - 4}{2aa - 4a - 6}.$ *Base* $\frac{a^3 - 1aa - 5a - 3}{2aa - 4a - 6}.$

Premier exemple pour la résolution présente.

$\{ a \propto 4.$ $\{$ *Soûtendante* $\frac{13}{2}.$ *Perpendicule* $\frac{12}{2}.$ *Base* $\frac{5}{2}.$ $\{$ *Aire* $\frac{15}{2}.$ $\frac{15 - 12 + 5}{2} \propto 4.$

Second exemple pour la résolution précédente.

$\{ a \propto 6.$ $\{$ *Soûtendante* $\frac{29}{6}.$ *Perpendicule* $\frac{20}{6}.$ *Base* $\frac{21}{6}.$ $\{$ *Aire* $\frac{35}{6}.$ $\frac{35 - 20 + 21}{6} \propto 6.$

Troisiéme exemple pour la résolution précédente.

$\{ a \propto \frac{1}{2}.$ $\{$ *Soûtendante* $\frac{17}{20}.$ *Perpendicule* $\frac{8}{20}.$ *Base* $\frac{15}{20}.$ $\{$ *Aire* $\frac{3}{20}.$ $\frac{3 - 8 + 15}{20} \propto \frac{1}{2}.$

SIXIEME CAS.

11. *ET si l'aire est retranché de la différence des côtez; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On suivra la même méthode. Mais la premiére des résolutions infinies sera négative. Ceux qui voudront s'exercer, pourront en former le mo-

b. 114. 4. déle ; & chercher ensuitte par les régles que nous avons [b] prescrites, des résolutions positives.

III QUESTION.

PREMIER CAS.

12. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que son aire ayant receu la soûtendante, la somme soit égale à une grandeur connuë.*

Ayant pris a pour la grandeur connuë, & nommé zy la soûtendante, & zx le perpendicule, & $2zv$ la base du triangle rectangle ; l'aire sera $zzxv$. Et si on ajoûte la soûtendante à l'aire ; on aura l'égalité $zzxv + zy \propto 1a$. Et $zy \propto 1a - zzxv$. Et le quarré $zzyy$ égal aux deux ensemble $zzxx$ & $4zzvv$ est égal au quarré $1aa - 2azzxv + z^4xxvv$. Et comparant les deux termes de l'égalité $zzxx + 4zzvv \propto 1aa - 2azzxv + z^4xxvv$, on pourra supposer $4zzvv \propto z^4xxvv$, ou $4 \propto zzxx$, & $2 \propto zx$. Et alors l'égalité précédente sera réduitte à celle-ci $zzxx \propto 1aa - 2azzxv$. Ou $2azzxv \propto 1aa - zzxx$. Et $v \propto \frac{1aa - zzxx}{2azzx}$. Et mettant pour zx sa valeur 2 ; la même v sera $\frac{1aa - 4}{4az}$. Et la base $2zv$ sera $\frac{1aa - 4}{2a}$. &c.

1^{ere} *supposition* $\{zzyy \propto zzxx + 4zzvv$. 2^{e} *supposition* $\{zzxv + zy \propto 1a$.

Résolution générale.

$\{$ *Soûtendante* $zy \propto \frac{1aa + 4}{2a}$. *Perpendicule* $zx \propto \frac{4a}{2a}$. *Base* $2zv \propto \frac{1aa - 4}{2a}$.

Exemple.

$\{a \propto 4$. $\{$ *Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. $\{$ *Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{5 + 3}{2} \propto 4$.

SECOND CAS.

13. *Et si la soûtendante est retranchée de l'aire ; afin que le reste soit égal à une grandeur connuë.*

Ayant pris comme auparavant a pour la grandeur connuë, & nommé zy la soûtendante du triangle rectangle, & zx le perpendicule, & $2zv$ la base ; le seul quarré $zzyy$ égalera les deux autres ensemble $zzxx + 4zzvv$. Et la supposition fournira l'égalité $zzxv - zy \propto 1a$. Ou $zy \propto zzxv - 1a$. Et $zzyy \propto z^4xxvv - 2azzxv + 1aa \propto zzxx + 4zzvv$. Et supposant $1aa \propto zzxx$, ou $1a \propto zx$; la même égalité sera réduite à celle-ci $z^4xxvv - 2azzxv \propto 4zzvv$. Et $zzxxv - 4v \propto 2ax$. Et $v \propto \frac{2ax}{zzxx - 4}$. Et mettant pour zx sa valeur $1a$, & pour x sa valeur $\frac{1a}{z}$; la même v sera $\frac{2aa}{aaz - 4z}$. Et la base $2zv$ sera $\frac{4aa}{aa - 4}$. &c.

1ere *supposition* { $zzyy \propto zzxx + 4zzvv$. 2e *supposition* { $zzxv - zy \propto 1a$.

Résolution générale.

{ *Soûtendante* $zy \propto \frac{a^3 + 4a}{aa - 4}$. *Perpendicule* $zx \propto \frac{a^3 - 4a}{aa - 4}$. *Base* $2zv \propto \frac{4aa}{aa - 4}$.

Exemple.

{ $a \propto 4$. { *Soûtendante* $\frac{20}{3}$. *Perpendicule* $\frac{12}{3}$. *Base* $\frac{16}{3}$. { *Aire* $\frac{32}{3}$. $\frac{32 - 20}{3} \propto 4$.

TROISIEME CAS.

14. *ET si l'aire est retranchée de la soûtendante ; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

Ayant dénommé les grandeurs comme aux cas précédens ; on formera l'égalité $zzyy \propto zzxx + 4zzvv \propto aa + 2azzx + z^4xxvv$. Et si on veut supposer $zzxx \propto aa$, ou $zx \propto a$; l'égalité sera $4zzvv \propto 2azzxv + z^4xxvv$. Ou $4v - zzxxv \propto 2ax$. Et on tirera une valeur de la base $2zv \propto \frac{4aa}{4 - 1aa}$. &c. Et si on supposoit $4zzvv \propto z^4xxvv$; l'égalité seroit $zzxx \propto 2azzxv + aa$. Et on tireroit une valeur de la base $2zx \propto \frac{4 - 1aa}{2a}$. &c.

1ere *supposition* { $zzyy \propto zzxx + 4zzvv$. 2e *supposition* { $zy - zzxv \propto 1a$.

Premiére résolution générale.

{ *Soûtendante* $zy \propto \frac{4a + a^3}{4 - aa}$. *Perpendicule* $zx \propto \frac{4a - a^3}{4 - aa}$. *Base* $2zv \propto \frac{4aa}{4 - 1aa}$.

Premier exemple.

{ $a \propto 1$. { *Soûtendante* $\frac{5}{3}$. *Perpendicule* $\frac{3}{3}$. *Base* $\frac{4}{3}$. { *Aire* $\frac{2}{3}$. $\frac{5 - 2}{3} \propto 1$.

Second exemple.

{ $a \propto \frac{3}{2}$. { *Soûtendante* $\frac{75}{14}$. *Perpendicule* $\frac{21}{14}$. *Base* $\frac{72}{14}$. { *Aire* $\frac{54}{14}$. $\frac{75 - 54}{14} \propto \frac{3}{2}$.

Seconde résolution générale.

{ *Soûtendante* $zy \propto \frac{4 + 1aa}{2a}$. *Perpendicule* $zx \propto \frac{4a}{2a}$. *Base* $2zv \propto \frac{4 - 1aa}{2a}$.

Premier exemple.

{ $a \propto 1$. { *Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. { *Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{5 - 3}{2} \propto 1$.

Second exemple.

{ $a \propto \frac{3}{2}$. { *Soûtendante* $\frac{25}{12}$. *Perpendicule* $\frac{24}{12}$. *Base* $\frac{7}{12}$. { *Aire* $\frac{7}{12}$. $\frac{25 - 7}{12} \propto \frac{3}{2}$.

IV QUESTION.

PREMIER CAS.

15. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que son aire ayant receu la somme de la soûtendante & de l'un des côtez, la nouvelle somme soit égale à une grandeur connuë.*

b. 2. Ayant formé avec z & y un [b] triangle rectangle, & multiplié par x tous les côtez; la soûtendante sera $zzx + yyx$, le perpendicule $zzx - yyx$, & la base $2zyx$. Et l'aire ayant receu la soûtendante & le perpendicule, on formera l'égalité $z^3yxx - zy^3xx + 2zzx \propto a$. Et on en

c. 15. 1. tirera [c] une valeur $x \propto \frac{-zz}{z^3y - zy^3} + \frac{1}{z^3y - zy^3}\sqrt{z^4 + az^3y - azy^3}$. De sorte que pour achever la résolution, il faut que la grandeur $z^4 + az^3y - azy^3$ soit un quarré parfait. Prenant donc $v + y$ pour z, & mettant cette valeur de z dans la grandeur qui doit être un quarré, elle sera $y^4 + 4y^3v + 6yyvv + 4yv^3 + v^4 + 2ay^3v + 3ayyvv + ayv^3$. Nommant donc son côté $yy + 2yv + ayv - vv$. On formera l'égalité $y^4 + 4y^3v + 6yyvv + 4yv^3 + v^4 + 2ay^3v + 3ayyvv + ayv^3 \propto y^4 + 4y^3v + 2yyvv - 4yv^3 + v^4 + 2ay^3v + 4ayyvv + aayyvv - 2ayv^3$. Ou $4yyvv - ayyvv - aayyvv + 8yv^3 + 3ayv^3 \propto 0$. Et $aay + ay - 4y \propto 8v + 3av$. Et $y \propto \frac{8v + 3av}{aa + 1a - 4}$.

Suppositions.

$$\left\{\begin{array}{lll} \textit{Soûtendante.} & \textit{Perpendicule.} & \textit{Base.} \\ zzx + yyx. & zzx - yyx. & 2zyx. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} \textit{Somme} \\ z^3yxx - zy^3xx + 2zzx \propto a \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} v \textit{ arbitraire. } y \propto \frac{8v + 3av}{aa + a - 4}.\ x \propto \frac{ay - 2v}{2y^3 + 3vyy + vvy}.\ z \propto \frac{aav + 4av + 4v}{aa + 1a - 4}. \\ \textit{Soutendante } 2yyx + 2vyx + vvx.\ \textit{Perpendicule } 2vyx + vvx.\ \textit{Base } 2yyx + 2vyx. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 4.\ v \propto 1.\ y \propto \frac{5}{4}.\ x \propto \frac{32}{105}.\ \left\{\textit{Soûtendante } \frac{212}{105}.\ \textit{Perpendicule } \frac{112}{105} \propto \frac{16}{15}.\right. \\ \quad \textit{Base } \frac{180}{105} \propto \frac{12}{7}.\ \left\{\textit{Aire } \frac{96}{105}.\ \textit{Somme } \frac{96 + 212 + 112}{105} \propto \frac{420}{105} \propto 4.\right. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

16. *Et si la somme de la soûtendante & du perpendicule est retranchée de l'aire du triangle rectangle; & que le reste soit égal à une grandeur connuë.*

On formera la résolution de la même sorte que la précédente. Les doubles égalitez ausquelles Monsieur De Fermat prétend rapporter cette question & la précédente ne leur conviennent pas. Et celles qui leur sont propres, sont d'une autre espéce que les ordinaires, parcequ'il ne suffit pas d'égaler d'égaler indifféremment deux grandeurs à deux divers quarrez ; mais il faut encore que l'un des quarrez soit déterminé.

Suppositions.

Soûtendante.	*Perpendicule.*	*Base.*	*Différence.*
$zzx + yyx$.	$zzx - yyx$.	$2zyx$.	$z^3yxx - zy^3xx - 2zzx \propto a$.

Résolution générale.

v arbitraire. $y \propto \frac{8v + 3av}{aa + 1a - 4}$. $x \propto \frac{4v + av + 2y}{v^3 + 3vvy + 2vyy}$. $z \propto \frac{aav + 4av + 4v}{aa + 1a - 4}$.
Soûtendante $2yyx + 2vyx + vvx$. *Perpendicule* $2vyx + vvx$. *Base* $2yyx + 2vyx$.

Exemple.

$a \propto 4$. $v \propto 1$. $y \propto \frac{5}{4}$. $x \propto \frac{4}{3}$. *Soûtendante* $\frac{53}{6}$. *Perpendicule* $\frac{28}{6}$. *Base* $\frac{45}{6}$.
Aire $\frac{105}{6}$. *Différence* $\frac{105 - 53 - 28}{6} \propto \frac{24}{6} \propto 4$.

TROISIEME CAS.

17. *ET si l'aire même est retranchée de la somme de la soûtendante & du perpendicule ; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On dénommera les grandeurs comme aux deux cas qui précédent. Et pour résoudre l'égalité $2zzx - z^3yxx + zy^3xx \propto 1a$, ou $z^3yxx - zy^3xx \propto 2zzx - 1a$; on tirera premiérement une valeur $x \propto \frac{zz}{z^3y - zy^3} - \frac{1}{z^3y - zy^3}\sqrt{z^4 - az^3y + azy^3}$. Et on aura soin d'égaler ce qui est sous le signe $\surd$ à un quarré parfait ; ce qu'on pourra faire, en prenant $y + v$ pour z. Car le quarré sera $y^4 + 4y^3vv + 6yyvv + 4yv^3 + v^4 - 2ay^3v - 3ayyvv - ayv^3$. Et si on nomme son côté $yy + 2yv + vv - ayv$; le même quarré sera $y^4 + 4y^3v + 6yyvv + 4yv^3 + v^4 - 2ay^3v - 4ayyvv - 2ayv^3 + aayyvv$. Et la comparaison fournira cette égalité $aayyvv - ayyvv \propto ayv^3$, ou $1ay - 1y \propto 1v$. Et $y \propto \frac{1v}{a - 1}$. &c. On pourroit trouver encore d'autres résolutions.

Suppositions.

Soûtendante.	*Perpendicule.*	*Base.*	*Différence.*
$zzx + yyx$.	$zzx - yyx$.	$2zyx$.	$2zzx - z^3yxx + zy^3xx \propto 1a$.

Résolution générale.

v arbitraire. $1y \propto \frac{1v}{a - 1}$. $x \propto \frac{av}{2yy + 3yv + vv}$. $z \propto \frac{av}{a - 1}$.
Soûtendante $2yyx + 2vyx + vvx$. *Perpendicule* $2vyx + vvx$. *Base* $2yyx + 2vyx$.

Premier éxemple.

$a \propto 2$. *Soûtendante* $\frac{5}{3}$. *Perpendicule* $\frac{3}{3}$. *Base* $\frac{4}{3}$. *Aire* $\frac{2}{3}$. $\frac{5 + 3 - 2}{3} \propto 2$.

Second éxemple.

$\{ a \propto 3.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. $\{$ *Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{5 + 4 - 3}{2} \propto 3$.

Troisiéme éxemple.

$\{ a \propto 4.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{17}{5}$. *Perpendicule* $\frac{15}{5}$. *Base* $\frac{8}{5}$. $\{$ *Aire* $\frac{12}{5}$. $\frac{17 + 15 - 12}{5} \propto 4$.

QUATRIEME CAS.

18. *ET si la différence de la soûtendante & du perpendicule est ajoûtée à l'aire; afin que la somme puisse égaler une grandeur connuë.*

On pourra régler & former sa résolution comme les précédentes, & même en diverses maniéres. Et les résolutions qu'on aura découvertes pourront encore servir à en trouver d'autres. Je me contenterai d'en fournir deux divers modéles.

Suppositions.

$\{$ *Soûtendante.* *Perpendicule.* *Base.* $\{$ *Somme.*
$\{ zzx + yyx.\ \ zzx - yyx.\ \ 2zyx.\ \{ z^3yxx - zy^3xx + 2yyx \propto 1a.$

Premiére résolution générale.

$\{ v$ *arbitraire.* $z \propto \frac{1av - 2v}{1a - 3}$. $y \propto \frac{1v}{1a - 3}$. $x \propto \frac{1a}{2yy + 3yv + 1vv}$.
$\{$ *Soûtendante* $2yyx + 2vyx + vvx$. *Perpendicule* $2vyx + vvx$. *Base* $2yyx + 2vyx$.

Premier éxemple.

$\{ a \propto 4.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{10}{3}$. *Perpendicule* $\frac{6}{3}$. *Base* $\frac{8}{3}$. $\{$ *Aire* $\frac{8}{3}$. $\frac{8 + 10 - 6}{3} \propto 4$.

Second éxemple.

$\{ a \propto 5.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{25}{6}$. *Perpendicule* $\frac{20}{6}$. *Base* $\frac{15}{6}$. $\{$ *Aire* $\frac{25}{6}$. $\frac{25 + 25 - 20}{6} \propto 5$.

Troisiéme éxemple.

$\{ a \propto 6.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{51}{10}$. *Perpendicule* $\frac{45}{10}$. *Base* $\frac{24}{10}$. $\{$ *Aire* $\frac{54}{10}$. $\frac{54 + 51 - 45}{10} \propto 6$.

Seconde résolution générale.

$\{$ *Soûtendante* $\frac{aa + 4a + 8}{2a + 4}$. *Perpendicule* $\frac{4a + 8}{2a + 4}$. *Base* $\frac{aa + 4a}{2a + 4}$.

Premier éxemple.

$\{ a \propto 2.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. $\{$ *Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{3 + 5 - 4}{2} \propto 2$.

Second éxemple.

$\{ a \propto 5.\ \{$ *Soûtendante* $\frac{53}{14}$. *Perpendicule* $\frac{28}{14}$. *Base* $\frac{45}{14}$. $\{$ *Aire* $\frac{45}{14}$. $\frac{45 + 53 - 28}{14} \propto 5$.

CINQUIEME CAS.

19. *ET si la différence de la soûtendante & du perpendicule est retranchée de l'aire ; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

On formera encore la résolution de la même sorte. Et pour suivre le premier modéle qu'on expose ; la grandeur a connuë surpassera 3. Mais elle vaudra moins que 2, lorsqu'on voudra suivre le second ; si ce n'est qu'on veüille une résolution négative.

Suppositions.

{ *Soûtendante.* $zzx + yyx$. *Perpendicule.* $zzx - yyx$. *Base.* $2zyx$. { *Différence.* $z^3yxx - zy^3xx - 2yyx \propto 1a$.

Premiére résolution générale.

{ v *arbitraire.* $z \propto \frac{1av - 2v}{1a - 3}$. $y \propto \frac{1v}{1a - 3}$. $x \propto \frac{2y + av}{2yyv + 3yvv + v^3}$.
Soûtendante $2yyx + 2vyx + vvx$. *Perpendicule* $2vyx + vvx$. *Base* $2yyx + 2vyx$.

Premier éxemple.

{ $a \propto 4$. { *Soûtendante* 5. *Perpendicule* 3. *Base* 4. { *Aire* 6. $6 - 5 + 3 \propto 4$.

Second éxemple.

{ $a \propto 5$. { *Soûtendante* 5. *Perpendicule* 4. *Base* 3. { *Aire* 6. $6 - 5 + 4 \propto 5$.

Troisiéme éxemple.

{ $a \propto 6$. { *Soûtendante* $\frac{17}{3}$. *Perpendicule* $\frac{15}{3}$. *Base* $\frac{8}{3}$. { *Aire* $\frac{20}{3}$. $\frac{20 - 17 + 15}{3} \propto 6$.

Seconde résolution générale.

{ *Soûtendante* $\frac{aa - 4a + 8}{4 - 2a}$. *Perpendicule* $\frac{8 - 4a}{4 - 2a}$. *Base* $\frac{4a - aa}{4 - 2a}$.

Premier éxemple.

{ $a \propto 1$. { *Soûtendante* $\frac{5}{2}$. *Perpendicule* $\frac{4}{2}$. *Base* $\frac{3}{2}$. { *Aire* $\frac{3}{2}$. $\frac{3 - 5 + 4}{2} \propto 1$.

Second éxemple.

{ $a \propto \frac{3}{2}$. { *Soûtendante* $\frac{17}{4}$. *Perpendicule* $\frac{8}{4}$. *Base* $\frac{15}{4}$. { *Aire* $\frac{15}{4}$. $\frac{15 - 17 + 8}{4} \propto \frac{3}{2}$.

SIXIEME CAS.

20. *ET si l'aire même est ôtée de la différence de la soûtendante & du perpendicule ; afin que le reste puisse égaler une grandeur connuë.*

Les premiéres résolutions découvertes par les voies précédentes ne seront pas positives. Et je ne m'arrêterai pas à tenter d'autres voies, puisque les cas sont étendus déja beaucoup au delà de ceux de Diophante, & de ceux que Monsieur De Fermat remarque en passant pouvoir être ajoûtez à ceux des Commentateurs, qui sont entrez dans le plus grand détail. J'avertirai néanmoins que les résolutions qui sont seulement générales, peuvent devenir infinies en diverses rencontres par des suppositions semblables à celles de la question vintiéme du quatriéme Livre. Et les négatives deviendront positives par la même voie.

V QUESTION.

PREMIER CAS.

21. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que son aire ayant receu une grandeur connuë, la somme soit un quarré parfait.*

b. 2. Ayant formé un [b] triangle rectangle avec les grandeurs y & $\frac{x}{y}$, & multiplié ses trois côtez par z, la soûtendante sera $\frac{zy^4 + zxx}{yy}$, le perpendicule $\frac{zy^4 - zxx}{yy}$, & la base $2zx$. Et l'aire $\frac{zzy^4x - zzx^3}{yy}$ ayant receu une grandeur connuë a, la somme $\frac{zzy^4x - zzx^3 + ayy}{yy}$ doit fournir un quarré. Et pour former ce quarré, on pourra supposer un quarré vv pour x, & prendre ensuitte pour côté du quarré $zzy^4vv - zzv^6 + ayy$ la grandeur $zyyv + zt$. Ce qui fournira une nouvelle égalité $zzy^4vv - zzv^6 + ayy \propto zzy^4vv + 2zzyyvt + zztt$. Ou $ayy \propto 2zzyyvt + zztt + zzv^6$. Et multipliant par a de part & d'autre, afin que le premier membre soit un quarré parfait, on aura cette égalité $aayy \propto 2azzyyvt + azztt + azzv^6$. Et supposant la partie $2azzyyvt$ égale à un quarré $4aazzyyvvss$, on aura une valeur $t \propto 2avss$. Et l'égalité sera $aayy \propto 4aazzyyvvss + 4a^3zzvvs^4 + azzv^6$. Et afin que le second membre soit un quarré parfait; si on le divise par $zzvv$, il faudra que l'exposant $4aayyss + 4a^3s^4 + av^4$ soit au juste un quarré. C'est pourquoi nommant son côté $2ays + ar$; on aura l'égalité $4aayyss + 4a^3s^4 + av^4 \propto 4aayyss + 4aaysr + aarr$. Ou $4aysr \propto 4aas^4 + v^4 - arr$. Et $y \propto \frac{4aas^4 + v^4 - arr}{4asr}$. Et enfin le côté ay étant égal au côté $2azyvs + azvr$; on trouvera une valeur $z \propto \frac{y}{2yvs + vr}$. Et comme yy surpasse x ou sa valeur vv; le côté y ou sa valeur $\frac{4aas^4 + v^4 - arr}{4asr}$ surpasse le côté v. Et le numérateur $4aas^4 + v^4 - arr$ surpasse le produit $4asvr$. Et par con-
c. 22. 1. séquent l'arbitraire r est [c] moindre que $-\frac{2asv}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{4a^3s^4 + 4aassvv + av^4}$, ou que $\frac{2ass\sqrt{a} - 2asv + vv\sqrt{a}}{a}$.

Suppositions.

Soûtendante.	Perpendicule.	Base.	Quarré.
$\frac{zy^4 + zxx}{yy}$.	$\frac{zy^4 - zxx}{yy}$.	$2zx$.	$\frac{zzy^4x - zzx^3 + ayy}{yy} \propto qq$.

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} s.\ v.\ r.\ \text{arbitraires.}\ y \propto \dfrac{4aas^4 + v^4 - arr}{4asr}.\ z \propto \dfrac{4aas^4 + v^4 - arr}{8aas^5v + 2sv^5 + 2avrrs}. \\ \text{Soûtendante}\ \dfrac{zy^4 + zv^4}{yy}.\ \text{Perpendicule}\ \dfrac{zy^4 - zv^4}{yy}.\ \text{Base}\ 2zvv. \end{array}\right.$$

Premier éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 5.\ s \propto 1.\ v \propto 1.\ r \propto 1.\ y \propto \dfrac{24}{5}.\ z \propto \dfrac{24}{53}.\ \{\text{Soûtendante}\ \dfrac{332401}{31800}.\ \text{Perpendicule}\ \dfrac{331151}{31800}. \\ \text{Base}\ \dfrac{48}{53}.\ \{\text{Aire}\ \dfrac{331151}{70225}.\ \text{Quarré}\ \dfrac{331151}{70225} + 5 \propto \dfrac{682276}{70225}.\ \text{Côté}\ \dfrac{826}{265}. \end{array}\right.$$

Second éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} a \propto 5.\ s \propto 1.\ v \propto 2.\ r \propto 2.\ y \propto \dfrac{12}{5}.\ z \propto \dfrac{3}{17}.\ \{\text{Soûtendante}\ \dfrac{1921}{1275}.\ \text{Perpendicule}\ \dfrac{671}{1275}. \\ \text{Base}\ \dfrac{24}{17}.\ \{\text{Aire}\ \dfrac{2684}{7225}.\ \text{Quarré}\ \dfrac{2684}{7225} + 5 \propto \dfrac{38809}{7225}.\ \text{Côté}\ \dfrac{197}{85}. \end{array}\right.$$

RESOLUTION POUR UN CERTAIN CAS.

Si $2a - 1$ est un quarré ; on trouvera toûjours la résolution générale que j'expose ici, & qui revient à celle de Monsieur De Fermat, dont il a supprimé la méthode.

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} z \propto 1.\ y \propto \sqrt{2a-1}.\ x \propto 2aa - 2a.\ \{\text{Soûtendante}\ \dfrac{2aa - 2a + 1}{\sqrt{2a-1}}.\ \text{Perpendicule}\ \sqrt{2a-1}. \\ \text{Base}\ \dfrac{2aa - 2a}{\sqrt{2a-1}}.\ \{\text{Aire}\ aa - 1a.\ \text{Quarré}\ 1aa.\ \text{Son côté}\ 1a. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\{a \propto 5.\ \{\text{Soûtendante}\ \dfrac{41}{3}.\ \text{Perpendicule}\ \dfrac{9}{3}.\ \text{Base}\ \dfrac{40}{3}.\ \{\text{Aire}\ 20.\ \text{Quarré}\ 20 + 5.$$

SECOND CAS.

22. *Et si on ôte une grandeur connuë de l'aire du triangle rectangle ; afin que le reste soit un quarré parfait.*

On formera la résolution de la même sorte & par les mêmes voyes qu'au premier cas.

Suppositions.

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Soûtendante.} & \text{Perpendicule.} & \text{Base.} & \text{Quarré.} \\ \dfrac{zy^4 + zxx}{yy}. & \dfrac{zy^4 - zxx}{yy}. & 2zx. & \left\{ \dfrac{zzy^4x - zzx^3 - ayy}{yy} \propto qq. \right. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} s.\ v.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ y \propto \dfrac{4aas^4 + v^4 + arr}{4asr}.\ z \propto \dfrac{4aas^4 + v^4 + arr}{8aas^3v + 2sv^5 - 2avrrs}. \\ \textit{Soûtendante}\ \dfrac{zy^4 + zv^4}{yy}.\ \textit{Perpendicule}\ \dfrac{zy^4 - zv^4}{yy}.\ \textit{Baſe}\ 2zvv. \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \propto 6.\ v \propto 1.\ s \propto \frac{1}{2}.\ r \propto \frac{1}{3}.\ y \propto \frac{8}{3}.\ z \propto \frac{8}{7}.\ \{ \textit{Soûtendante}\ \frac{4177}{504}.\ \textit{Perpendicule}\ \frac{4015}{504}. \\ \textit{Baſe}\ \frac{1152}{504} \propto \frac{16}{7}.\ \{ \textit{Aire}\ \frac{4015}{441}.\ \textit{Quarré}\ \frac{4015}{441} - 6 \propto \frac{1369}{441}.\ \textit{Côté}\ \frac{37}{21}. \end{array} \right.$$

TROISIEME CAS.

23. *ET ſi l'aire du triangle rectangle eſt retranchée de la grandeur connuë ; afin que le reſte ſoit un quarré parfait.*

Ayant nommé comme auparavant $\frac{zy^4 + zv^4}{yy}$ la ſoûtendante du triangle rectangle, & $\frac{zy^4 - zv^4}{yy}$ ſon perpendicule, & $2zvv$ la baſe ; l'aire ſera $\frac{zzy^4vv - zzv^6}{yy}$. Et ſi on la retranche de la grandeur a ; il faudra que le reſte $\frac{ayy + zzv^6 - zzy^4vv}{yy}$ ſoit un quarré parfait. Et le dénominateur étant déja quarré, il ſuffira que le numérateur le ſoit. C'eſt pourquoi nommant ſon côté $zv^3 + zyyt$; on formera l'égalité $ayy + zzv^6 - zzy^4vv \propto zzv^6 + 2zzv^3yyt + zzy^4tt$. Ou $ayy \propto 2zzv^3yyt + zzy^4tt + zzy^4vv$. Et $aayy \propto 2azzv^3yyt + azzy^4tt - azzy^4vv$. Et afin que le ſecond membre ſoit au juſte un quarré ; ſi on le diviſe par $zzyy$, l'expoſant $2av^3t + ayytt + ayyvv$ ſera encore quarré. Et ſuppoſant la partie $2av^3t$ où n'eſt point y, égale à un quarré $4aav^4ss$; on aura $t \propto 2avss$. Et le quarré $2av^3t + ayytt + ayyvv$ ſera $4aav^4ss + 4a^3vvs^4yy + avvyy$. C'eſt pourquoi ſi on nomme ſon côté $2avvs + avry$; on aura l'égalité $4aav^4ss + 4a^3vvs^4yy + avvyy \propto 4aav^4ss + 4aav^3rsy + aavvrryy$. Ou $4aav^3sry \propto 4a^3vvs^4yy + avvyy - aavvrryy$. Et $y \propto \frac{4avsr}{4aas^4 + 1 - arr}$. Et enfin le côté a étant égal au côté $2avvsz + avryz$, on aura une valeur $z \propto \frac{1}{2vvs + vry}$. Et comme y ou ſa valeur $\frac{4av{,}r}{4aas^4 + 1 - arr}$ ſurpaſſe v ; l'arbitraire r ſurpaſſe $-2s + \sqrt{4ss + 4as^4 + \frac{1}{a}}$.

Suppoſitions.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \textit{Soûtendante.} & \textit{Perpendicule.} & \textit{Baſe.} \\ \dfrac{zy^4 + zv^4}{yy}. & \dfrac{zy^4 - zv^4}{yy}. & 2zvv. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Quarré.} \\ \dfrac{ayy + zzv^6 - zzy^4vv}{yy}. \end{array} \right.$$

Résolution infinie.

$v.\ r.\ s.$ *arbitraires.* $y \propto \frac{4avsr}{4aas^4 + 1 - arr}$. $z \propto \frac{4aas^4 + 1 - arr}{8aavvs^3 + 2vvs + 2avvsrr}$.
Soûtendante $\frac{zy^4 + zv^4}{yy}$. *Perpendicule* $\frac{zy^4 - zv^4}{yy}$. *Base* $2zvv$.

Premier exemple.

$a \propto 10.\ v \propto 1.\ s \propto \frac{1}{2}.\ r \propto \frac{8}{5}.\ y \propto 80.\ z \propto \frac{1}{129}$. *Soûtendante* $\frac{40960001}{825600}$.
Perpendicule $\frac{40959999}{825600}$. *Base* $\frac{2}{129}$. *Aire* $\frac{40959999}{106502400}$.
Quarré $\frac{1065024000 - 40959999}{106502400} \propto \frac{1024064001}{106502400}$. *Côté* $\frac{32001}{10320}$.

Second exemple.

$a \propto 10.\ v \propto 1.\ r \propto 1.\ s \propto \frac{1}{2}.\ y \propto \frac{5}{4}.\ z \propto \frac{4}{9}$. *Soûtendante* $\frac{881}{900}$.
Perpendicule $\frac{369}{900}$. *Base* $\frac{8}{9}$. *Aire* $\frac{41}{225}$. *Quarré* $\frac{2250 - 41}{225} \propto \frac{2209}{225}$. *Côté* $\frac{47}{15}$.

VI QUESTION.

24. *Pour trouver un triangle rectangle, dont le perpendicule soit un quarré parfait, & l'excez du perpendicule sur la base encore un quarré, & l'aire avec la base un autre.*

Ayant nommé $zzyy$ le perpendicule, & zzx la base, & $zzvv$ l'excez $zzyy - zzx$, dont le perpendicule surpasse la base ; on aura $x \propto yy - vv$. Et la base zzx sera $zzyy - zzvv$. Mais si on forme un [b] triangle rectangle avec les grandeurs zy & zv ; la soûtendante sera $zzyy + zzvv$, & le perpendicule $2zzyv \propto zzyy$. Ce qui donnera $2v \propto 1y$. Et ainsi la soûtendante sera $5zzvv$, le perpendicule $4zzvv$, & la base $3zzvv$. Et l'aire $6z^4v^4$ ayant receu la base $3zzvv$, formera un quarré $6z^4v^4 + 3zzvv$. Et divisant ce quarré par $zzvv$; il faudra que l'exposant $6zzvv + 3$ soit un quarré. C'est pourquoi prenant $t + 1$ pour zv, le même quarré sera $6tt + 12t + 9$. Et si on nomme son côté $st - 3$; on formera l'égalité $6tt + 12t + 9 \propto sstt - 6st + 9$. Ou $6st + 12t \propto sstt - 6tt$. Et $t \propto \frac{6s + 12}{ss - 6}$. Et l'arbitraire s surpasse $\sqrt{6}$.

b. 2.

Suppositions.

Soûtendante $zzyy + zzvv$. *Perpendicule* $2zzyv \propto zzyy$. *Base* $zzyy - zzvv$.

Résolution infinie.

$s.$ *arbitraire.* $t \propto \frac{6s + 12}{ss - 6}$. *Soûtendante* $5tt + 10t + 5$.
Perpendicule $4tt + 8t + 4$. *Base* $3tt + 6t + 3$.

Exemples.

$\left\{ \begin{array}{l} s \propto 3.\ t \propto 10.\ \textit{Soûtendante } 605.\ \textit{Perpendicule } 484.\ \textit{Base } 363.\ \&c. \\ s \propto 0.\ t \propto 0.\ \textit{Soûtendante } 5.\ \textit{Perpendicule } 4.\ \textit{Base } 3.\ \&c. \end{array} \right.$

VII QUESTION.

PREMIER CAS.

25. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que son aire ayant receu le perpendicule ou la base, les sommes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé $zyy + zxx$ la soûtendante, & $zyy - zxx$ la base, & $2zyx$ le perpendicule; l'aire $zzy^3x - zzyx^3$ plus le perpendicule $2zyx$ doit fournir un quarré $zzvv$. Ce qui donne une valeur $z \propto \frac{2yx}{vv - y^3x + yx^3}$. Et la même aire $zzy^3x - zzyx^3$ plus la base $zyy - zxx$ doit fournir un autre quarré $zztt$. Ce qui donne une autre valeur $z \propto \frac{yy - xx}{tt - y^3x + yx^3} \propto \frac{2yx}{vv - y^3x + yx^3}$. Et multipliant en croix les numérateurs par les dénominateurs, pour ôter les fractions; on aura l'égalité $vvyy - vvxx - y^5x + 2y^3x^3 - yx^5 \propto 2ttyx - 2y^4xx + 2yyx^4$. D'où on tire une valeur $tt \propto \frac{vvyy - vvxx - y^5x + 2y^4xx + 2y^3x^3 - 2yyx^4 - yx^5}{2yx}$. Et pour trouver une résolution, je considére attentivement la valeur de tt, & je reconnois que son numérateur comprend un produit du quarré vv par la base $yy - xx$ d'un triangle rectangle, dont le perpendicule est le dénominateur même $2yx$; plus un produit de l'aire $y^3x - yx^3$ de ce même triangle par la différence $2yx - yy + xx$, dont le perpendicule $2yx$ surpasse $yy - xx$. Mais supposant que le perpendicule $2yx$ soit égal à un quarré, & que la différence $2yx - yy$ soit encore égale à un autre quarré ss, si on prend $q + s$ pour v; le numérateur de la fraction sera $qqyy - qqxx + 2qsyy - 2qsxx + 2y^3x - 2yx^3 - y^4 + 2yyxx - x^4 - y^5x + 2y^4xx. + 2y^3x^3 - 2yyx^4 - yx^5$, ou $qqyy - qqxx + 2qsyy - 2qsxx + y^3ss - yx^3ss + yyss - xxss$. Et cette grandeur comprend un produit de la base $yy - xx$ par $qq + 2qs$, plus un produit du quarré supposé $2yx - yy + xx$ ou ss par la somme $y^3x - yx^3 + yy - xx$ de l'aire & de la base. Et si ce dernier produit, où q ne se rencontre point, étoit au juste un quarré $ppss$, ou si la somme $y^3x - yx^3 + yy - xx$ étoit un quarré pp; le numérateur seroit réduit à cette expression abbrégée $qqyy - qqxx + 2qsyy - 2qsxx + ppss$. Et nommant son côté $mq - ps$; on auroit une égalité $qqyy - qqxx + 2qsyy - 2qsxx + ppss \propto ppss - 2mpqs + mmqq$. Ou $2mpqs + 2qsyy - 2qsxx \propto mmqq - qqyy + qqxx$. Et $q \propto \frac{2mps + 2syy - 2sxx}{mm - yy + xx}$. Il faut donc pour achever la résolution, trouver par la résolution précédente un triangle rectangle, dont le perpendicule $2yx$ soit un quarré $4nn$, & la différence $2yx - yy + xx$ du perpendicule $4nn$ & de la base $3nn$ un autre quarré nn, & la somme $y^3x - yx^3 + yy - xx$ de l'aire & de la base

base encore un quarré $6n^4 + 3nn$. Et comme v ou sa valeur $q + n$ est moindre que $nn\sqrt{6}$; l'arbitraire m sera moindre que $\frac{p + 2nn\sqrt{6}}{-1 + n\sqrt{6}}$.

Suppositions.

Soûtendante $zyy + zxx$. *Base* $zyy - zxx$. *Perpendicule* $2zyx$.
$zzy^3x - zzyx^3 + zyy - zxx \propto zztt$. $zzy^3x - zzyx^3 + 2zyx \propto zzvv$.

Résolution infinie.

l. m. arbitraires. $n \propto \frac{ll + 6l + 6}{ll - 6}$. $pp \propto 6n^4 + 3nn$. $q \propto \frac{2mpn + 6n^3}{mm - 3nn}$.
$v \propto q + n$. $z \propto \frac{4nn}{vv - 6n^4}$. *Perpendicule* $4nnz$. *Base* $3nnz$. *Soûtendante* $5nnz$.

Premier exemple.

$l \propto -2$. $m \propto 3$. $n \propto 1$. $p \propto 3$. $q \propto 4$. $v \propto 5$. $z \propto \frac{4}{19}$. *Soûtendante* $\frac{20}{19}$.
Perpendicule $\frac{16}{19}$. *Base* $\frac{12}{19}$. *Aire* $\frac{96}{361}$. $\frac{96 + 304}{361} \propto \frac{400}{361}$. $\frac{96 + 228}{361} \propto \frac{324}{361}$.

Second exemple.

$l \propto 0$. $m \propto 2$. $n \propto -1$. $p \propto 3$. $q \propto 18$. $v \propto 19$. $z \propto -\frac{4}{355}$. *Soûtendante* $-\frac{20}{355}$.
Perpendicule $-\frac{16}{355}$. *Base* $-\frac{12}{355}$. *Aire* $\frac{96}{126025}$. *Quarrez.* $\frac{5776}{126025}$. $\frac{4356}{126025}$.
Ou $\frac{96 + 5680}{126025}$. $\frac{96 + 4260}{126025}$. *Côtez.* $\frac{76}{355}$. $\frac{66}{355}$.

AUTRE RESOLUTION.

Comme les triangles infinis qu'on trouve dans la résolution précédente, sont tous semblables ou d'une même espèce, puisque leurs côtez sont tous multiples des trois nombres 5, 4, 3 ; on en pourra découvrir encore d'une autre espèce en cette sorte. Ayant pris 4 pour le perpendicule, & $3 + 1y$ pour la base ; l'excez dont le perpendicule 4 surpasse la base $3 + 1y$, est $1 - 1y$. Et son produit par le perpendicule 4 est $4 - 4y$, lequel étant multiplié par l'aire donne un solide $24 - 16y - 8yy$. Et si on ajoûte à ce même solide le plan du perpendicule 4 par la base $3 + 1y$, ou $12 + 4y$; la somme $36 - 12y - 8yy$ doit être un quarré, comme il est aisé de le reconnoître dans le cours des raisonnemens de la résolution précédente. Mais les quarrez ensemble des côtez 4 & $3 + 1y$ fournissent une somme $25 + 6y + 1yy$, qui doit encore être un quarré parfait. De sorte qu'il faut résoudre une double égalité $36 - 12y - 8yy$ & $25 + 6y + 1yy$. Ce qu'on doit rapporter à la résolution de la question dix-huitiéme du quatriéme Livre, & ensuitte à la vintiéme de ce même Livre, qui peut fournir successivement & jusques à l'infini des résolutions toûjours nouvelles. Et on pourra varier de la même sorte la pluspart des résolutions, qui sont trop limitées, ou les infinies mêmes en changeant les espèces des déterminations.

SECOND CAS.

26. *ET si le perpendicule & la base sont retranchez de l'aire du triangle rectangle; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

On formera la résolution comme la précédente. Et l'arbitraire m surpassera $\frac{p + 2nn\sqrt{6}}{-1 + n\sqrt{6}}$, afin que z & q soient positives.

Suppositions.

$\begin{cases} \text{Soûtendante } zyy + zxx. \text{ Base } zzy - zxx. \text{ Perpendicule } 2zyx. \\ zzy^3x - zzyx^3 - zyy + zxx \infty zztt. \ \{zzy^3x - zzyx^3 - 2zyx \infty zzvv. \end{cases}$

Résolution infinie.

$\begin{cases} l.\ m.\ \text{arbitraires. } n \infty \frac{ll + 6l + 6}{ll - 6}.\ pp \infty 6n^4 + 3nn.\ q \infty \frac{2mpn + 6n^3}{mm - 3nn}. \\ v \infty q + n.\ z \infty \frac{4nn}{6n^4 - vv}.\ \{ \text{Perpendicule } 4nnz.\ \text{Base } 3nnz.\ \text{Soûtendante } 5nnz. \end{cases}$

Premier exemple.

$\begin{cases} l \infty -2.\ m \infty -1.\ n \infty 1.\ p \infty 3.\ q \infty 0.\ v \infty 1.\ z \infty \frac{4}{5}.\ \{\text{Soûtendante } \frac{20}{5}. \\ \text{Perpendicule } \frac{16}{5}.\ \text{Base } \frac{12}{5}.\ \{\text{Aire } \frac{96}{25}.\ \{\text{Quarrez. } \frac{16}{25}.\ \frac{36}{25}. \\ \text{Ou } \frac{96 - 80}{25}.\ \frac{96 - 60}{25}.\ \{\text{Côtez. } zv \infty \frac{4}{5}.\ zt \infty \frac{6}{5}. \end{cases}$

Second exemple.

$\begin{cases} l \infty -2.\ m \infty 6.\ n \infty 1.\ p \infty 3.\ q \infty \frac{14}{11}.\ v \infty \frac{25}{11}.\ z \infty \frac{484}{101}. \\ \text{Soûtendante } \frac{2420}{101}.\ \text{Perpendicule } \frac{1936}{101}.\ \text{Base } \frac{1452}{101}.\ \{\text{Aire } \frac{1405536}{10201}. \\ \text{Quarrez. } \frac{1405536 - 195536}{10201} \infty \frac{1210000}{10201}.\ \frac{1405536 - 146652}{10201} \infty \frac{1258886}{10201}. \\ \text{Côtez. } zt \infty \frac{1122}{101}.\ zv \infty \frac{1100}{101}. \end{cases}$

TROISIEME CAS.

27. *ET si la soûtendante & le perpendicule sont retranchez de l'aire du triangle rectangle; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé, comme aux cas précédens, la soûtendante $zyy + zxx$,

& $2zyx$ le perpendicule, & $zyy - zxx$ la base ; l'aire $zzy^3x - zzyx^3$ moins le perpendicule $2zyx$ doit fournir un quarré $zzvv$. De sorte qu'on aura une valeur $z \propto \frac{2yx}{y^3x - yx^3 - vv}$. Et l'aire $zzy^3x - zzyx^3$ moins la soûtendante $zyy + zxx$ fournissant encore un quarré $zztt$; on aura aussi une valeur $z \propto \frac{yy + xx}{y^3x - yx^3 - tt} \propto \frac{2yx}{y^3x - yx^3 - vv}$. Et multipliant en croix les numérateurs par les dénominateurs ; on formera l'égalité $y^5x - yx^5 - vvyy - vvxx \propto 2y^4xx - 2yyx^4 - 2yxtt$. D'où l'on tirera une valeur $tt \propto \frac{vvyy + vvxx - y^5x + yx^5 + 2y^4xx - 2yyx^4}{2yx}$. Et supposant y égale à un quarré ss, & x égale à un quarré rr ; si on multiplie la valeur du quarré tt par le quarré $4yx$ ou $4rrss$, & qu'on mette par tout ss pour y, & rr pour x ; le produit $2vvs^4 + 2vvr^4 - 2s^{10}rr + 2ssr^{10} + 4s^8r^4 - 4s^4r^8$ doit encore être au juste un quarré. Mais ce quarré comprend un produit du quarré vv par $2s^4 + 2r^4$, plus un produit du quarré $s^6rr - 2s^4r^4 + ssr^6$ par $-2s^4 + 2r^4$. Et si on ajoûte ensemble $2s^4 + 2r^4$ & $-2s^4 + 2r^4$; la somme sera un quarré $4r^4$. De sorte que si les deux quarrez vv & $s^6rr - 2s^4r^4 + ssr^6$ étoient égaux ; le quarré tt seroit un produit du quarré $4r^4$ par le quarré $s^6rr - 2s^4r^4 + ssr^6$ divisé par un autre quarré $4ssrr$. Et on auroit enfin une valeur $t \propto ssrr - r^4$.

Suppositions.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Soûtendante } zyy + zxx. \ \textit{Base } zyy - zxx. \ \textit{Perpendicule } 2zyx. \\ zzy^3x - zzyx^3 - zyy - zxx \propto zztt. \ \{ zzyx^3 - zzyx^3 - 2zyx \propto zzvv. \end{array}\right.$$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} s.\ r.\ \textit{arbitraires.}\ v \propto s^3r - sr^3.\ t \propto ssrr - r^4.\ z \propto \frac{1}{ssrr - r^4}.\ y \propto ss.\ x \propto rr. \\ \textit{Soûtendante } \frac{s^4 + r^4}{ssrr - r^4}.\ \textit{Perpendicule } \frac{2ssrr}{ssrr - r^4}.\ \textit{Base } \frac{s^4 - r^4}{ssrr - r^4}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s \propto 2.\ r \propto 1.\ z \propto \frac{1}{3}.\ \{ \textit{Soûtendante } \frac{17}{3}.\ \textit{Perpendicule } \frac{8}{3}.\ \textit{Base } \frac{15}{3}.\ \{ \textit{Aire } \frac{20}{3}. \\ \textit{Quarrez.}\ \frac{20 - 17}{3} \propto 1.\ \frac{20 - 8}{3} \propto 4.\ \{ \textit{Côtez.}\ zt \propto 1.\ zv \propto 2. \end{array}\right.$$

RESOLUTION PLUS ETENDUE.

Mais quoique la résolution précédente soit infinie, elle n'a pas neanmoins toute l'étenduë qu'elle peut avoir, puisque le quarré vv y reçoit quelque détermination par rapport aux grandeurs arbitraires y & r. C'est pourquoi, si on veut rendre encore la résolution plus indéterminée. Aprés avoir soigneusement considéré la grandeur $2vvs^4 + 2vvr^4 - 2s^{10}rr + 2ssr^{10} + 4s^8r^4 - 4s^4r^8$; on prendra $p - s^3r + sr^3$ pour v, & nommant a la grandeur $s^3r - sr^3$, & b la grandeur $2s^4 + 2r^4$, afin d'abbréger ; la grandeur précédente qui doit être un quarré, sera réduitte à cette expression assez simple $bpp - 2abp + 4aar^4$. On prendra donc alors $pm - 2arr$ pour côté de ce même quarré. Et on formera l'égalité $bpp - 2abp + 4aar^4 \propto ppmm - 4apmrr + 4aar^4$. Ou $bp - mmp \propto 2ab - 4amrr$. Et $p \propto \frac{2ab - 4amrr}{b - mm}$. &c. Et comme v ou sa valeur $p - a$ vaut moins que la racine quarrée de l'aire $s^6rr - ssr^6$. Si on nomme c cette même racine; il faudra que la grandeur $1ab - 4amrr + amm$ soit moindre que $bc - cmm$. De sorte que l'arbitraire m est moindre que $\frac{2arr + \sqrt{4aar^4 + bcc - aab}}{a + c}$. Et la même m est encore ou moindre ou plus grande que chacune des grandeurs $\sqrt{b}$ & $\frac{b}{2rr}$. On pourroit proposer & résoudre encore divers cas semblables.

Suppositions.

Soûtendante $zs^4 + zr^4$. *Base* $zs^4 - zr^4$. *Perpendicule* $2zssrr$.
$zzs^6rr - zzssr^6 - zs^4 - zr^4 \propto zztt$. $zzs^6rr - zzssr^6 - 2zssrr \propto zzvv$.

Résolution infinie.

$s.\ r.\ m.$ *arbitraires.* $a \propto s^3r - sr^3$. $b \propto 2s^4 + 2r^4$. $p \propto \frac{2ab - 4amrr}{b - mm}$.
$v \propto p - a$. $z \propto \frac{2ssrr}{s^6rr - ssr^6 - vv}$. *Soûtendante* $zs^4 + zr^4$. *Perpendicule* $2zssrr$. &c.

Premier exemple.

$s \propto 2$. $r \propto 1$. $m \propto 2$. $p \propto 12$. $v \propto 6$. $z \propto \frac{1}{3}$. *Soûtendante* $\frac{17}{3}$. *Perpendicule* $\frac{8}{3}$.
Base $\frac{15}{3}$. *Aire* $\frac{20}{3}$. *Quarrez.* $\frac{20 - 17}{3} \propto 1$. $\frac{20 - 8}{3} \propto 4$. *Côtez.* 1. 2.

Second exemple.

$s \propto 3$. $r \propto 1$. $m \propto 2$. $p \propto 48$. $v \propto 24$. $z \propto \frac{1}{8}$. *Soûtendante* $\frac{41}{4}$. *Perpendicule* $\frac{9}{4}$.
Base $\frac{40}{4}$. *Aire* $\frac{45}{4}$. *Quarrez.* $\frac{45 - 41}{4} \propto 1$. $\frac{45 - 9}{4} \propto 9$. *Côtez.* 1. 3.

QUATRIEME CAS.

28. *ET si on ajoûte le perpendicule & la soûtendante à l'aire du triangle rectangle; afin que les sommes soient des quarrez parfaits.*

On suivra le même ordre pour les raisonnemens qu'au cas précédent. Et on prendra pour v la grandeur $p + a$, & le côté du dernier quarré sera encore $pm - 2arr$. Et l'arbitraire m sera plus grande que $\sqrt{b}$, & moindre que $\frac{2arr + \sqrt{4aar^4 + bcc - aab}}{c - a}$.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Soûtendante } zs^4 + zr^4.\ \textit{Baſe } zs^4 - zr^4.\ \textit{Perpendicule } 2zssrr. \\ zzs^6rr - zzssr^6 + zs^4 + zr^4 \propto zztt.\ \{zzs^6rr - zzssr^6 + 2zssrr \propto vvzz. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} s.\ r.\ m.\ \textit{arbitraires.}\ a \propto s^3r - sr^3.\ b \propto 2s^4 + 2r^4.\ p \propto \frac{2ab + 4amrr}{mm - b}. \\ v \propto p + a.\ z \propto \frac{2ssrr}{vv - s^6rr + ssr^6}.\ \{\textit{Soûtendante } zs^4 + zr^4.\ \textit{Perpendicule } 2zssrr.\ \&c. \end{array}\right.$$

Premier éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s \propto 2.\ r \propto 1.\ m \propto 8.\ p \propto 20.\ v \propto 26.\ z \propto \frac{1}{77}.\ \{\textit{Soûtendante } \frac{17}{77}.\ \textit{Perpendicule } \frac{8}{77}. \\ \textit{Baſe } \frac{15}{77}.\ \{\textit{Aire } \frac{60}{5929}.\ \{\textit{Quarrez.}\ \frac{60 + 1309}{5929} \propto \frac{1369}{5929}.\ \frac{60 + 616}{5929} \propto \frac{676}{5929}.\ \{\textit{Côtez.}\ \frac{37}{77}.\ \frac{26}{77}. \end{array}\right.$$

Second éxemple.

$$\left\{\begin{array}{l} s \propto 3.\ r \propto 1.\ m \propto 18.\ p \propto 60.\ v \propto 84.\ z \propto \frac{1}{352}.\ \{\textit{Soûtendante } \frac{41}{176} \propto \frac{1804}{7744}. \\ \textit{Perpendicule } \frac{9}{176} \propto \frac{396}{7744}.\ \textit{Baſo } \frac{40}{176} \propto \frac{10}{44}.\ \{\textit{Aire } \frac{45}{7744} \propto \frac{180}{30976}. \\ \textit{Quarrez.}\ \frac{45 + 1804}{7744} \propto \frac{1849}{7744}.\ \frac{45 + 396}{7744} \propto \frac{441}{7744}.\ \{\textit{Côtez.}\ zt \propto \frac{43}{88}.\ vz \propto \frac{21}{88}. \end{array}\right.$$

VIII QUESTION.

PREMIER CAS.

29. *POur trouver un triangle rectangle, tel qu'ayant ôté chacun des deux côtez de la ſoûtendante, les reſtes ſoient des cubes parfaits.*

Ayant nommé $zz + yy$ la ſoûtendante du triangle rectangle, & $zz - yy$ ſa baſe, & $2zy$ ſon perpendicule; & yx le côté du premier des deux cubes. La premiére égalité ſera $2yy \propto y^3x^3$. Et $y \propto \frac{2}{x^3}$. Et ſi on ôte le perpendicule $2zy$ de la ſoûtendante $zz + yy$; le reſte $zz - 2zy + yy$ eſt un quarré parfait. Et parce qu'on veut que ce même reſte ſoit un cube parfait; ſon côté [b] eſt néceſſairement un cube. C'eſt pourquoi nommant v le côté de ce cube $z - y$; l'égalité ſera $z - y \propto v^3$. Et $y \propto z - v^3 \propto \frac{2}{x^3}$. Et $z \propto \frac{v^3x^3 + 2}{x^3}$.

b. 1ere partie. 14. 4.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{lll} \textit{Soûtendante.} & \textit{Baſe.} & \textit{Perpendicule.} \\ zz + yy. & zz - yy. & 2zy. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Cubes.} \\ zz + yy - 2zy \propto v^6.\ \{2yy \propto y^3x^3. \end{array}\right.$$

Résolution infinie.

v. x. arbitraires. $z \propto \frac{v^3x^3 + 2}{x^3}$. $y \propto \frac{2}{x^3}$. *Soûtendante* $\frac{v^6x^6 + 4v^3x^3 + 8}{x^6}$.
Perpendicule $\frac{4v^3x^3 + 8}{x^6}$. *Base* $\frac{v^6x^6 + 4v^3x^3}{x^6}$.

Exemple.

$v \propto 2$. $x \propto 1$. *Soûtendante* 104. *Perpendicule* 40. *Base* 96.
Cubes. $104 - 40 \propto 64$. $104 - 96 \propto 8$. *Côtez cubiques.* $vv \propto 4$. $yx \propto 2$.

SECOND CAS.

30. *ET si chacun des côtez est ajoûté à la soûtendante; afin que les sommes soient des cubes parfaits.*

On formera la résolution comme la précédente. Mais le cube arbitraire v^3 sera plus grand que $\frac{2}{x^3}$, & plus petit que $\frac{4}{x^3}$.

Suppositions.

Soûtendante.	*Base.*	*Perpendicule.*	*Cubes.*
$zz + yy$.	$zz - yy$.	$2zy$	$zz + yy + 2zy \propto v^6$. $2zz \propto z^3x^3$.

Résolution infinie.

x. v. arbitraires. $z \propto \frac{2}{x^3}$. $y \propto \frac{v^3x^3 - 2}{x^3}$. *Soûtendante* $\frac{v^6x^6 - 4v^3x^3 + 8}{x^6}$.
Perpendicule $\frac{4v^3x^3 - 8}{x^6}$. *Base* $\frac{4v^3x^3 - v^6x^6}{x^6}$.

Premier exemple.

$x \propto 1$. $v \propto \frac{3}{2}$. *Soûtendante* $\frac{377}{64}$. *Perpendicule* $\frac{352}{64}$. *Base* $\frac{135}{64}$.
Cubes. $\frac{377 + 352}{64} \propto \frac{729}{64}$. $\frac{377 + 135}{64} \propto \frac{512}{64}$. *Côtez* $\frac{9}{4}$. $\frac{8}{4}$.

Second exemple.

$x \propto \frac{1}{2}$. $v \propto 3$. *Soûtendante* 377. *Perpendicule* 352. *Base* 135.
Cubes. $377 + 352 \propto 729$. $377 + 135 \propto 512$. *Côtez.* 9. 8.

TROISIEME CAS.

31. *ET si l'un des côtez est ajoûté à la soûtendante, & que l'autre en soit retranché; afin que la somme & le reste soit des cubes parfaits.*

On formera encore ses raisonnemens de la même sorte. Et le cube arbitraire x^3 surpassera $\frac{4}{v^3}$.

Suppositions.

Soûtendante.	*Base.*	*Perpendicule.*	*Cubes.*
$zz + yy$.	$zz - yy$.	$2zy$	$zz + yy + 2zy \propto v^6$. $2yy \propto y^3x^3$.

Résolution infinie.

x. v. arbitraires. $y \propto \frac{2}{x^3}$. $z \propto \frac{v^3x^3 - 2}{x^3}$. *Soûtendante* $\frac{v^6x^6 - 4v^3x^3 + 8}{x^6}$.
Perpendicule $\frac{4v^3x^3 - 8}{x^6}$. *Base* $\frac{v^6x^6 - 4v^3x^3}{x^6}$.

Exemple.

$v \propto 2$. $x \propto 1$. *Soûtendante* 40. *Perpendicule* 24. *Base* 32.
Cubes. $40 + 24 \propto 64$. $40 - 32 \propto 8$. *Côtez.* 4. 2.

IX QUESTION.

32. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que le quarré de la soûtendante comprenne un quarré plus le côté de ce nouveau quarré. Et si le quarré de la soûtendante est divisé par la base, que l'exposant comprenne un cube ajoûté à son côté cubique.*

Ayant nommé simplement la soûtendante z, & la base x, & le perpendicule yx, & vx le côté du nouveau quarré ; le quarré zz de la soûtendante doit égaler les deux quarrez ensemble xx & $yyxx$ des côtez x & yx. Et le même quarré zz de la soûtendante doit encore égaler le quarré $vvxx$ plus son côté vx. De sorte qu'on pourra déja former l'égalité $xx + yyxx \propto vvxx + vx$. D'où on tirera une valeur $x \propto \frac{v}{yy + 1 - vv}$. Mais le quarré zz ou $vvxx + vx$ de la soûtendante étant divisé par la base $1x$ donne un exposant $vvx + v$, qui doit comprendre un cube t^3 plus son côté cubique t. Et si on prend v pour t, afin que les degrez des inconnuës ne montent point trop haut ; l'égalité sera $v^3 + 1v \propto vvx + 1v$. Et $v^3 \propto vvx$. Ou $x \propto v \propto \frac{1v}{yy - vv + 1}$. Et divisant par v de part & d'autre, on aura $1 \propto \frac{1}{yy - vv + 1}$. Et multipliant chaque membre par $yy - vv + 1$, on trouvera $1yy - 1vv + 1 \propto 1$. Ou $yy \propto vv$. Et $y \propto v$. Et mettant pour y & pour x leur valeur commune v dans la premiére égalité $zz \propto xx + yyxx$; elle sera changée en celle-ci $zz \propto 1vv + 1v^4$. De sorte que le terme $1vv + v^4$ ou $1 + vv$ doit être un quarré. On prendra donc $s - v$ pour son côté. Et l'égalité sera $1 + vv \propto vv - 2sv + ss$. Ou $2sv \propto ss - 1$. Et $v \propto \frac{ss - 1}{2s}$.

Suppositions.

$zz \propto xx + yyxx \propto vvxx + vx$. $\frac{zz}{1x} \propto vvx + v \propto t^3 + t$.

Résolution infinie.

$\{$ *s arbitraire.* $\{$ *Soûtendante* $\frac{s^4 - 1}{4ss}$. *Perpendicule* $\frac{s^4 - 2ss + 1}{4ss}$. *Base* $\frac{2s^3 - 2s}{4ss}$.

Exemple.

$\left\{ \begin{array}{l} s = 2. \ \{ \textit{Soûtendante } \frac{15}{16}. \ \textit{Perpendicule } \frac{9}{16}. \ \textit{Base } \frac{12}{16}. \ \{ zz = \frac{225}{256}. \\ \textit{Quarré } \frac{225}{256} = \frac{81}{256} + \frac{9}{16}. \ \textit{Exposant } \frac{zz}{1x} = \frac{75}{64} = \frac{27}{64} + \frac{3}{4}. \end{array} \right.$

X QUESTION.

33. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que la soûtendante comprenne un cube plus le côté du cube, & la base un cube moins le côté du cube, & le perpendicule un cube.*

On prendra $z^3 + 1z$ pour la soûtendante, & $z^3 - 1z$ pour la base. Et le perpendicule sera $2zz$. Et si on l'égale à un cube z^3y^3; on trouvera une valeur $z = \frac{2}{y^3}$. Et 2 surpassera le cube arbitraire y^3.

Suppositions. $\{$ *Soûtendante* $z^3 + 1z$. *Base* $z^3 - 1z$. *Perpendicule* $2zz = z^3y^3$.

Résolution infinie.

$\{$ *y arbitraire.* $z = \frac{2}{y^3}$. $\{$ *Soûtendante* $\frac{8 + 2y^6}{y^9}$. *Base* $\frac{8 - 2y^6}{y^9}$. *Perpendicule* $\frac{8y^3}{y^9}$.

Exemple.

$\{ y = 1$. $\{$ *Soûtendante* 10. *Base* 6. *Perpendicule* 8. $\{ 10 = 8 + 2.\ 6 = 8 - 2$.

XI QUESTION.

PREMIER CAS.

34. *Pour trouver un triangle rectangle, dont l'aire avec la base fasse un quarré parfait, & tel que la circonférence soit encore un cube parfait.*

b. 2. Ayant formé [b] le triangle rectangle avec les grandeurs z & $z + y$; la soûtendante sera $2zz + 2zy + yy$, la base $2zy + yy$, & le perpendicule $2yz + 2zz$. Et la circonférence ou la somme entiére des trois côtez sera $4zz + 6yz + 2yy$, qui est un plan de $4z + 2y$ par $z + y$. Si donc les trois côtez du triangle rectangle sont divisez par $z + y$; la circonférence du nouveau qui sera semblable à ce premier, sera $4z + 2y$. Et si on l'égale à un cube x^3; on trouvera une valeur $z = \frac{x^3 - 2y}{4}$. Et l'aire $\frac{2z^3y + 3zzy + zy^3}{zz + 2zy + yy}$ recevant la base $\frac{2zy + yy}{z + y}$, la somme $\frac{2z^3y + 3zzyy + zy^3 + 2zzy + 3zyy + y^3}{zz + 2zy + yy}$ doit fournir au juste un quarté. Et si on divise le

numérateur

numérateur par le dénominateur, qui est déja quarré ; l'exposant $2zy - yy + 2y + \frac{y^3 - yy}{z + y}$ doit être encore quarré. Prenant donc o pour la fraction $\frac{y^3 - yy}{z + y}$, ou supposant 1 pour y ; le quarré précédent sera $2zy - yy + 2y$ ou $2z + 1$. Et si on l'égale à un quarré vv ; on trouvera une valeur $z \propto \frac{vv - 1}{2} \propto \frac{x^3 - 2y}{4} \propto \frac{x^3 - 2}{4}$. Et $2vv - 2 \propto x^3 - 2$. Ou $2vv \propto x^3$. Et enfin prenant vt pour x, on aura $2vv \propto v^3t^3$. Et $v \propto \frac{2}{t^3}$. Et 2 surpasse le cube arbitraire t^3.

Suppositions.

Soûtendante $\frac{2zz + 2yz + yy}{z + y}$. *Base* $\frac{2yz + yy}{z + y}$. *Perpendicule* $\frac{2yz + 2zz}{z + y}$.
Somme des trois côtez ou circonférence entiére $4z + 2y \propto x^3$
L'aire & la base $\frac{2z^3y + 3zzy + zy^3 + 2zzy + 3zyy + y^3}{zz + 2zy + yy} \propto 2z + 1 \propto vv$.

Résolution infinie.

t arbitraire. *Soûtendante* $\frac{t^{12} + 16}{t^{12} + 4t^6}$. *Base* $\frac{8t^6}{t^{12} + 4t^6}$. *Perpendicule* $\frac{16 - t^{12}}{t^{12} + 4t^6}$.

Premier exemple.

$t \propto 1$. *Soûtendante* $\frac{17}{5}$. *Base* $\frac{8}{5}$. *Perpendicule* $\frac{15}{5}$. *Aire* $\frac{12}{5}$.
Quarré $\frac{12 + 8}{5} \propto 4$. *Côté* 2. *Cube* $\frac{17 + 8 + 15}{5} \propto 8$. *Côté* 2.

Second exemple.

$t \propto \frac{1}{2}$. *Soûtendante* $\frac{65537}{257}$. *Perpendicule* $\frac{65535}{257}$. *Base* $\frac{512}{257}$. *Aire* $\frac{16776960}{66049}$.
Somme des trois côtez ou circonférence $\frac{131584}{257} \propto 512$. *Côté cubique* 8.
L'aire & la base $\frac{16776960 + 131584}{66049} \propto \frac{16908544}{66049}$. *Racine quarrée* $\frac{4112}{257} \propto 16$.

SECOND CAS.

35. *ET si la base est ajoûtée à l'aire ; afin que la somme soit un cube parfait, & la circonférence entiére un quarré.*

On trouvera comme au cas précédent $4z + 2y$ pour la circonférence, & $2z + 1$ pour la somme de l'aire avec la base. Nommant donc x le côte du quarré $4z + 2y$ ou $4z + 2$, & v le côté du cube $2z + 1$; la premiére égalité sera $4z + 2 \propto xx$. Et $z \propto \frac{xx - 2}{4}$. Et la seconde $2z + 1 \propto v^3$. Et $z \propto \frac{v^3 - 1}{2} \propto \frac{xx - 2}{4}$. Et $2v^3 - 2 \propto xx - 2$. Ou $2v^3 \propto xx$.

Et prenant xt pour v, on aura l'égalité $2v^3 \propto 2x^3t^3 \propto xx$. Et $x \propto \frac{1}{2t^3}$. Et $\frac{1}{2}$ surpasse le quarré arbitraire tt.

Suppositions.

Soûtendante $\frac{2zz + 2zy + yy}{z + y}$. *Base* $\frac{2zy + yy}{z + y}$. *Perpendicule* $\frac{2zy + 2zz}{z + y}$.
Somme des trois côtez ou circonférence entiére $4z + 2y \propto xx$.
L'aire & la base $\frac{2z^3y + 3zzy + zy^3 + 2zzy + 3zyy + y^3}{zz + 2zy + yy} \propto 2z + 1 \propto v^3$.

Résolution infinie.

t arbitraire. *Soûtendante* $\frac{1 + 64t^{12}}{8t^6 + 64t^{12}}$. *Base* $\frac{16t^6}{8t^6 + 64t^{12}}$. *Perpendicule* $\frac{1 - 64t^{12}}{8t^6 + 64t^{12}}$.

Premier exemple.

$t \propto \frac{1}{2}$. *Soûtendante* $\frac{65}{9}$. *Base* $\frac{16}{9}$. *Perpendicule* $\frac{63}{9}$. *Aire* $\frac{56}{9}$.
L'aire & la base $\frac{56 + 16}{9} \propto \frac{72}{9} \propto 8$. *Côté cubique* 2. *Circonférence* $\frac{144}{9}$. *Côté* 4.

Second exemple.

$t \propto \frac{1}{4}$. *Soûtendante* $\frac{262145}{513}$. *Base* $\frac{1024}{513}$. *Perpendicule* $\frac{262143}{513}$.
L'aire $\frac{134217216}{263169}$ *plus la base* $\frac{525312}{263169} \propto \frac{134742528}{263169} \propto 512$. *Côté* 8.
Somme des côtez ou circonférence $\frac{525312}{513} \propto 1024$. *Racine quarrée* 32.

XII QUESTION.

36. *Pour trouver un triangle rectangle, dont la circonférence soit un quarré parfait, & tel qu'ayant ajoûté l'aire à ce même quarré, la somme soit un cube parfait.*

Ayant nommé $zz + yy$ la soûtendante du triangle rectangle, & $zz - yy$ le perpendicule, & la base $2zy$; la circonférence entiére $2zz + 2zy$ doit donner un quarré $zzxx$. D'où l'on tire une valeur $z \propto \frac{2y}{xx - 2}$. Et la somme de la circonférence $2zz + 2zy$ & de l'aire $z^3y - zy^3$ est $2zz + 2zy + z^3y - zy^3$. Et mettant pour z sa valeur $\frac{2y}{xx - 2}$, elle sera $\frac{4yyx^4 - 8yyxx - 2y^4x^4 + 8y^4xx}{x^6 - 6x^4 + 12xx - 8}$. Et afin que cette somme soit un cube parfait; il suffira de faire en sorte que le numérateur en soit un, parceque le dénominateur est au juste le cube de $xx - 2$. Considérant donc attentivement le numérateur $4yyx^4 - 8yyxx - 2y^4x^4 + 8y^4xx$; on pourra supposer $8y^4xx - 8yyxx \propto 0$, ou $y^4 \propto yy$, & $y \propto 1$. Et alors tout le numérateur vaudra simplement $2x^4$. Si donc on le suppose égal à un cube

x^3v^3, on trouvera $2x \propto v^3$. Mais x ou sa valeur $\frac{v^3}{2}$ surpasse $\sqrt{2}$. Et v^3 surpasse $2\sqrt{2}$. Et tirant de part & d'autre la racine cubique, l'arbitraire v surpasse $\sqrt{2}$. Et parceque z ou sa valeur $\frac{8}{v^6 - 8}$ surpasse encore y ou l'unité; le numérateur 8 surpasse le dénominateur $v^6 - 8$. Et 16 surpasse v^6. Et 4 surpasse v^3. De sorte que l'arbitraire v, déja plus grande que $\sqrt{2}$, doit moins valoir que $\sqrt{C.4}$; ou se rencontrer par approximation entre $\frac{142}{100}$ & $\frac{158}{100}$.

Suppositions.

$$\begin{cases} \textit{Soûtendante } zz + yy.\ \textit{Perpendicule } zz - yy.\ \textit{Base } 2zy.\ \{ \textit{Aire } z^3y - zy^3. \\ \textit{Circonférence } 2zz + 2zy \propto zzxx.\ \{ 2zz + 2zy + z^3y - zy^3 \propto \frac{x^3v^3}{x^6 - 6x^4 + 12xx - 8}. \end{cases}$$

Résolution infinie.

$$\begin{cases} v \textit{ arbitraire. } z \propto \frac{8}{v^6 - 8}.\ y \propto 1.\ \{ \textit{Soûtendante } zz + yy \propto \frac{v^{12} - 16v^6 + 128}{v^{12} - 16v^6 + 64}. \\ \textit{Perpendicule } zz - yy \propto \frac{16v^6 - v^{12}}{v^{12} - 16v^6 + 64}.\ \textit{Base } 2zy \propto \frac{16v^6 - 128}{v^{12} - 16v^6 + 64}. \end{cases}$$

Exemple.

$$\begin{cases} v \propto \frac{3}{2}.\ z \propto \frac{512}{217}.\ y \propto 1.\ \{ \textit{Soûtendante } \frac{309233}{47089}.\ \textit{Perpendicule } \frac{215055}{47089}.\ \textit{Base } \frac{222208}{47089}. \\ \textit{Aire } \frac{110108160}{10218313}.\ \{ \textit{Circonférence } \frac{746496}{47089} \propto zzxx.\ \textit{Racine quarrée } zx \propto \frac{864}{217}. \\ \textit{L'aire \& la circonférence } \frac{110108160 + 161989632}{10218313} \propto \frac{272097792}{10218313}\ \textit{Cube de } \frac{648}{217}. \end{cases}$$

XIII QUESTION.

37. *Le problème de Diophante, que Monsieur Bachet, le plus habile de ses Commentateurs, a trouvé le plus beau & le plus ingénieux, est celuy où l'on demande un triangle rectangle, dont la circonférence soit un cube parfait, & tel qu'ayant ajoûté l'aire à ce même cube, la somme soit au juste un quarré.*

Pour résoudre cette question, on prendra z pour l'aire même du triangle rectangle, & un cube y^3 pour sa circonférence, & $2zx$ pour la base. Et alors le perpendicule sera $\frac{1}{x}$, puisque son produit par la moitié zx de la base fournit l'aire qu'on a nommée z. Et parceque la circonférence entiére, ou la somme de la soûtendante & des deux côtez est nommée y^3; si on en retranche la base $2zx$ & le perpendicule $\frac{1}{x}$, on aura la soûtendante $y^3 - 2zx - \frac{1}{x}$. Et son quarré $y^6 - 4zxy^3 + 4zzxx - \frac{2y^3}{x} + 4z + \frac{1}{xx}$ doit égaler les deux quarrez ensemble $4zzxx$ & $\frac{1}{xx}$ des deux côtez $2zx$

& $\frac{1}{x}$. Ce qui fournit une égalité $y^6 - 4zy^3x - \frac{2y^3}{x} + 4z \propto 0$. Ou $y^6x - 2y^3 + 4zx \propto 4zy^3xx$. D'où l'on tire une valeur $x \propto \frac{y^6 + 4z}{8zy^3} + \frac{1}{8zy^3}\sqrt{y^{12} - 24zy^6 + 16zz}$. Et par la seconde supposition ; la circonférence y^3 plus l'aire z doit donner un quarré. De sorte que les deux sommes $y^3 + z$ & $y^{12} - 24zy^6 + 16zz$ doivent nécessairement fournir l'une & l'autre un quarré parfait. Et pour résoudre avec facilité cette double égalité, il est à propos que le cube y^3 soit encore un quarré v^6, ou le côté y un quarré vv, afin qu'ayant mis pour y sa valeur vv, & multiplié par un quarré v^{18} la premiére somme $y^3 + z$ ou $v^6 + z$, on puisse avoir une double égalité $v^{24} + v^{18}z$ & $v^{24} - 24v^{12}z + 16zz$. Et rapportant sa résolution au cinquiéme cas de la question douziéme du quatriéme Livre, on trouvera le modéle qu'on expose ici. Mais $2zx$ ou $\frac{1}{x}$ surpasse toûjours v^6 dans cette résolution, qui par conséquent n'est jamais positive.

Suppositions.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Soûtendante } y^3 - 2zx - \frac{1}{x}.\ \textit{Base } 2zx.\ \textit{Perpendicule } \frac{1}{x}.\ \{\ \textit{Aire } 1z. \\ y^6 - 4zy^3x + 4zzxx - \frac{2y^3}{x} + 4z + \frac{1}{xx} \propto 4zzxx + \frac{1}{xx}.\ \{\ y^3 + z \propto rr. \end{array}\right.$$

Résolution infinie & négative.

$$\left\{\begin{array}{l} v \textit{ arbitraire. } z \propto \frac{512v^6 + 48v^{12} + v^{18}}{64}.\ x \propto \frac{v^6 + 32}{512 + 48v^6 + v^{12}}. \\ \textit{Soûtendante } v^6 - 2zx - \frac{1}{x}.\ \textit{Base } 2zx.\ \textit{Perpendicule } \frac{1}{x}.\ \{\ \textit{Aire } 1z. \end{array}\right.$$

Exemple négatif.

$$\left\{\begin{array}{l} v \propto 2.\ z \propto 7680.\ x \propto \frac{1}{80}.\ \{\ \textit{Base } 2zx \propto 192.\ \textit{Perpendicule } \frac{1}{x} \propto 80. \\ \textit{Soûtendante } v^6 - 2zx - \frac{1}{x} \propto -208.\ \{\ \textit{Circonférence } 64.\ \textit{Aire } 7680. \\ \textit{L'aire \& la circonférence } 7744 \propto v^6 + z \textit{ quarré de } 88. \end{array}\right.$$

AUTRE RESOLUTION POSITIVE ET JUSTE.

Comme donc la résolution précédente donne toûjours un des côtez plus grand que la circonférence entiére, ou une soûtendante qui vaut moins que rien ; il est visible qu'elle n'est pas utile au cas dont il s'agit, mais seulement dans celuy, où on demanderoit que l'excez des deux côtez ensemble sur la soûtendante fût un cube, auquel ajoûtant l'aire, la somme fût au juste un quarré. Il faudra donc pour rendre positive la résolution qu'on désire, rapporter la double égalité $v^{24} + v^{18}z$ & $v^{24} - 24v^{12}z + 16zz$ au troisiéme cas de la question treiziéme du quatriéme Livre. Et alors on en tirera le nouveau modéle qu'on expose ici. Et afin que z soit

$-2zs \propto 2ys + ss$. Et $z \propto \frac{2ys+ss}{12y-2s}$. Et l'arbitraire s vaut moins que $6y$. Et comme y surpasse t ou sa valeur $y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}s$; il faut que $2z$ ou sa valeur $\frac{2ys+ss}{6y-s}$ surpasse l'arbitraire s. Et les membres étant multipliez par s; le numérateur $2ys+ss$ surpasse le produit $6ys - ss$. Et l'arbitraire s surpasse $2y$.

Suppositions.

Côtez du 1er triangle. $zz+yy$. $zz+yy$. $4zy$. *Côtez du 2d triangle.* $xx+vv$. $xx+vv$. $4xv$. *Aires égales.* $2z^3y - 2zy^3 \propto 2x^3v - 2xv^3$.

Résolution infinie.

s. y. *arbitraires.* $z \propto \frac{2ys+ss}{12y-2s}$. $t \propto 1y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}s$. $x \propto z + t$. $v \propto y - t$.
Côtez du 1er triangle. $zz+yy$. $zz+yy$. $4zy$. *Du 2d.* $xx+vv$. $xx+vv$. $4xv$.

Exemple.

$s \propto 6$. $y \propto 2$. $z \propto 5$. $t \propto 1$. $x \propto 6$. $v \propto 1$. *Côtez du 1er triangle.* 29. 29. 40. *Circuit* 98. *Aire* 420. *Côtez du 2d triangle.* 37. 37. 24. *Circuit* 98. *Aire* 420.

XV QUESTION.

PREMIER CAS.

39. *Pour trouver deux triangles rectangles, tels que le plan des deux bases étant retranché du plan des deux perpendicules, le reste soit au juste un quarré.*

Ayant nommé z la soûtendante du premier des deux triangles rectangles, & y sa base, & x son perpendicule; & v la base du second, & t son perpendicule; & s le côté du quarré qu'on cherche. Le plan des perpendicules est tx, & celuy des bases est vy. Et si on ôte le plan vy du plan tx, le reste $tx - vy$ doit égaler le quarré ss. Ce qui fournit l'égalité $tx \propto ss + vy$. Ou $t \propto \frac{ss+vy}{x}$. Mais le quarré zz de la soûtendante z doit égaler les deux quarrez ensemble yy & xx des deux côtez y & x. Prenant donc $y + r$ pour z, on aura l'égalité $yy + 2yr + rr \propto yy + xx$. Et $2yr \propto xx - rr$. Et $y \propto \frac{xx-rr}{2r}$. Et la somme $vv + tt$ des côtez v & t doit encore fournir un quarré. Mettant donc pour t sa valeur $\frac{ss+vy}{x}$, la somme $vv + tt$ sera $\frac{vvxx + vvyy + 2vyss + s^4}{xx}$. Et mettant encore dans la même somme le quarré zz pour $xx+yy$, qui multiplie le quarré vv, la somme sera $\frac{vvzz + 2vyss + s^4}{xx}$. Et parce que le dénominateur xx est déja quarré, il suffira que le numérateur $vvzz + 2vyss + s^4$ soit au juste un quarré. On prendra donc $p - vz$ pour ſon côté, & on aura l'égalité $vvzz + 2vyss + s^4 \propto vvzz - 2pvz + pp$. Ou $2pvz + 2vyss \propto pp - s^4$. Et $v \propto \frac{pp - s^4}{2pz + 2yss}$. Et l'arbitraire x ſurpaſſe r. Et l'arbitraire p ſurpaſſe le quarré arbitraire ss.

Suppoſitions.

1z ſoûtendante du 1ᵉʳ triangle. 1y ſa baſe. 1x ſon perpendicule. { $zz \propto yy + xx$.
1q ſoûtendante du 2ᵈ triangle. 1v ſa baſe. 1t ſon perpendicule. { $qq \propto vv + tt$.
1xt plan des perpendicules. 1yv plan des baſes. { *Quarré* $1xt - 1yv \propto ss$.

Réſolution infinie.

{ $x.\ r.\ s.\ p.$ *arbitraires.* { $y \propto \frac{xx - rr}{2r}$. $z \propto \frac{xx + rr}{2r}$. $v \propto \frac{pp - s^4}{2pz + 2ssy}$. $t \propto \frac{ss + vy}{x}$.

Exemple.

$x \propto 12$. $r \propto 6$. $s \propto 9$. $p \propto 1701$. { $z \propto 15$. $y \propto 9$. $x \propto 12$. { $v \propto 55$. $t \propto 48$. $q \propto 73$.
$yy + xx \propto 144 + 81 \propto 225 \propto zz$. { $vv + tt \propto 3025 + 2304 \propto 5329 \propto qq$.
Quarré $1xt - 1yv \propto 576 - 495 \propto 81$. { *Côté* $9 \propto s$.

SECOND CAS.

40. *ET ſi le plan des baſes eſt ajoûté au plan des perpendicules; afin que la ſomme ſoit au juſte un quarré.*

On formera la réſolution en ſuivant le même ordre que dans la précédente. Et l'arbitraire x ſurpaſſera encore l'arbitraire r. Et l'arbitraire p ſera moindre ou plus grande que le quarré arbitraire ss. Mais pour avoir un perpendicule poſitif t ou $\frac{ss - vy}{x}$; il faut que le quarré ss ſurpaſſe le plan vy ou ſa valeur $\frac{ppxx - s^4xx - pprr + s^4rr}{2pxx + 2prr - 2ssxx + 2ssrr}$. Et multipliant de part & d'autre par le dénominateur, il faudra que le produit $2pxxss + 2prrss - 2s^4xx + 2s^4rr$ ſurpaſſe le numérateur $ppxx - s^4xx - pprr + s^4rr$. Et par tranſpoſition, $2pxxss + 2prrss - s^4xx + s^4rr$ ſurpaſſe $ppxx - pprr$. Et par conſéquent l'arbitraire p vaut moins que la grandeur $\frac{xxss + rrss + 2ssrx}{xx - rr}$, & ſurpaſſe $\frac{xxss + rrss - 2ssrx}{xx - rr} \propto \frac{xss - rss}{x + r}$. Comme dans l'exemple ſuivant, où on prend x pour 5, & r pour 1, & s pour 36; l'arbitraire p ſera priſe entre $\frac{xss - rss}{x + r} \propto 864$ & $\frac{xxss + rrss + 2ssxr}{xx - rr} \propto \frac{46656}{44} \propto 1944$.

Suppoſitions.

1z ſoûtendante du 1ᵉʳ triangle. 1y ſa baſe. 1x ſon perpendicule. { $zz \propto yy + xx$.
1q ſoûtendante du 2ᵈ triangle. 1v ſa baſe. 1t ſon perpendicule. { $qq \propto vv + tt$.
1xt plan des perpendicules. 1yv plan des baſes. { *Quarré* $1xt + 1yv \propto ss$.

Résolution infinie.

{ *x. r. ſ. p. arbitraires.* { $y \propto \frac{xx - rr}{2r}$. $z \propto \frac{xx + rr}{2r}$. $v \propto \frac{pp - s^4}{2pz - 2ssy}$. $t \propto \frac{ss - vy}{x}$.

Exemple.

{ $x \propto 5$. $r \propto 1$. $s \propto 36$. $p \propto 1344$. { $z \propto 13$. $y \propto 12$. $x \propto 5$. { $v \propto 33$. $t \propto 180$. $q \propto 183$.
$yy + xx \propto 144 + 25 \propto 169 \propto zz$. { $vv + tt \propto 1089 + 32400 \propto 33489 \propto qq$.
Quarré $1xt + 1yv \propto 900 + 396 \propto 1296 \propto ss$. { *Côté* $36 \propto s$.

XVI QUESTION.

41. *Pour trouver deux triangles rectangles, dont les aires ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.*

Ayant pris deux grandeurs différentes $z + y$ & $z - y$ & une grandeur
b. 2. x; on [b] formera l'un des triangles rectangles avec $z + y$ & x, & l'autre avec $z - y$ & x. Et la base du premier sera $zz + 2zy + yy - xx$, & son perpendicule $2zx + 2yx$. Et la base du second sera $zz - 2zy + yy - xx$, & son perpendicule $2zx - 2yx$. Et l'aire du premier sera $z^3x + 2zzyx + zyyx - zx^3 + zzyx + 2zyyx + y^3x - yx^3$, & celle du second $z^3x - 3zzyx + 3zyyx - zx^3 - y^3x + yx^3$. Et comme ces deux aires ont un même rapport que deux grandeurs connuës $a + b$ & $a - b$; si on prend d'une part le produit des extrêmes, & de l'autre le produit des moyens, on formera une égalité, laquelle étant ensuitte ordonnée, & divisée par x, donnera celle-ci $bz^3 + 3bzyy - bzxx \propto ay^3 + 3azzy - ayxx$. Et prenant alors $2y$ pour x, la même égalité sera $bz^3 - bzyy \propto 3ayzz - 3ay^3$. Et divisant de part & d'autre par $zz - yy$, on trouvera enfin $bz \propto 3ay$.

Suppositions.

{ $1t$ *soûtendante du* 1^er^ *triangle.* $1s$ *sa base.* $2r$ *son perpendicule.* { $tt \propto ss + 4rr$.
$1q$ *soûtendante du* 2^d^ *triangle.* $1p$ *sa base.* $2n$ *son perpendicule.* { $qq \propto pp + 4nn$.
Rapport des aires. { $ts.\ pn :: a + b.\ a - b.$ { $ats - bts \propto apn + bpn$.

Résolution infinie.

{ y *arbitraire.* $z \propto \frac{3ay}{b}$. { 1^ere^ *soûtendante* $1t \propto \frac{9aayy + 6abyy + 5bbyy}{bb}$.
Sa base $1s \propto \frac{9aayy + 6abyy - 3bbyy}{bb}$. *Son perpendicule* $2r \propto \frac{12abyy + 4bbyy}{bb}$.
Soûtendante du 2^d^ *triangle* $1q \propto \frac{9aayy - 6abyy + 5bbyy}{bb}$.
Sa base $1p \propto \frac{9aayy - 6abyy - 3bbyy}{bb}$. *Son perpendicule* $2n \propto \frac{12abyy - 4bbyy}{bb}$.

Exemple.

{ $a \propto 2$. $b \propto 1$. $y \propto 1$. $z \propto 6$. { 1^ere^ *soûtendante* 53. *Base* 45. *Perpendicule* 28.
Aire 630. { 2^e^ *soûtendante* 29. *Base* 21. *Perpendicule* 20. { *Aire* 210.
Rapport des deux aires { $630.\ 210 :: 2 + 1.\ 2 - 1 :: 3.\ 1.$

XVII

XVII QUESTION.

42. *Pour trouver un triangle rectangle, qui soit à tel autre qu'on voudra proposer, comme un quarré à un autre quarré.*

Si le triangle rectangle qu'on propose, a pour soûtendante une grandeur connuë $aa + bb$, & pour base une autre connuë $aa - bb$, & $2ab$ pour perpendicule. L'aire connuë sera $a^3b - ab^3$. Et si on veut, pour éviter les fractions, nommer la base de celuy qu'on cherche $2a^3bzz - 2ab^3zz$, & y le perpendicule ; l'aire nouvelle sera $a^3bzzy - ab^3zzy$. Et comme les deux aires $a^3b - ab^3$ & $a^3bzzy - ab^3zzy$ ont un même rapport que deux quarrez indéterminez ; si on divise l'une & l'autre par $a^3b - ab^3$; les exposans 1 & zzy auront encore un même rapport que deux quarrez. Et par conséquent $1y$ sera [b] au juste un quarré xx. Et mettant pour y sa valeur xx, les deux quarrez ensemble de la base $2a^3bzz - 2ab^3zz$ & du perpendicule y ou xx, ou la somme $4a^6bbz^4 - 8a^4b^4z^4 + 4aab^6z^4 + x^4$ doit former un quarré parfait de la soûtendante. Prenant donc pour z une valeur $2aa + 2bb$, & pour x une autre $a^4 - 6aabb + b^4$, la somme précédente sera au juste le quarré $a^{16} + 40a^{14}bb + 348a^{12}b^4 - 1000a^{10}b^6 + 1478a^8b^8 - 1000a^6b^{10} + 348a^4b^{12} + 40aab^{14} + b^{16}$, qui a pour côté la grandeur $a^8 + 20a^6bb - 26a^4b^4 + 20aab^6 + b^8$. Et cette soûtendante & les deux côtez étant multipliez par une grandeur arbitraire p, la question sera infiniment résoluë.

b. 1ere partie. 47. 8.

Suppositions.

Soûtendante connuë $aa + bb$. Base $aa - bb$. Perpendicule $2ab$. { Aire $a^3b - ab^3$.
Soûtendante inconnuë $1v$. Base $2t \infty 2a^3bzz - 2ab^3zz$. Perpendicule $1y \infty xx$.
Aire $txx \infty 1a^3bzzxx - 1ab^3zzxx$. { $a^3b - ab^3 . txx :: rr . ss$. { $4tt + x^4 \infty vv$.

Résolution infinie.

p arbitraire. { Soûtendante $vp \infty a^8p + 20a^6bbp - 26a^4b^4p + 20aab^6p + b^8p$.
Base $2tp \infty 8a^7bp + 8a^5b^3p - 8a^3b^5p - 8ab^7p$. Perpendicule $xxp \infty a^8p$
$- 12a^6bbp + 38a^4b^4p - 12aab^6p + b^8p$. { Aire $txxpp . a^3b - ab^3 :: sspp . rr$.

Exemple.

$a \infty 2$. $b \infty 1$. { Soûtendante $aa + bb \infty 5$. Base $aa - bb \infty 3$. Perpendicule $2ab \infty 4$.
Aire 6. { $p \infty 1$. { Soûtendante du nouveau triangle $vp \infty 1201$. Base $2tp \infty 1200$.
Perpendicule $xxp \infty 49$. Aire 29400. { 1ere Aire 6. 2e 29400 :: 1. 4900.

I COROLLAIRE ET QUESTION XVIII.

43. *Et si le triangle connu doit être à l'inconnu qu'on cherche, comme un quarré connu l'est à tel quarré qu'on voudra.*

Ayant pris la base $2tp$ de la résolution précédente, & la soûtendante vp, & le perpendicule xxp ; on aura un nouveau triangle, dont l'aire $txxpp$ est déja à l'aire $a^3b - ab^3$ qu'on propose, comme un quarré ss l'est à un quarré rr. De sorte que l'aire $a^3b - ab^3$ est égale à la grandeur $\frac{txxrrpp}{ff}$. Et comme on ſuppoſe que l'aire $a^3b - ab^3$ ou $\frac{txxrrpp}{ff}$ eſt à celle qu'on cherche, comme un quarré déterminé cc l'eſt à un quarré déterminé dd; la nouvelle aire que l'on veut découvrir, ſera $\frac{txxrrppdd}{ffcc}$. De ſorte que la baſe de cette aire ſera $\frac{2tprd}{fc}$, & le perpendicule $\frac{pxxrd}{fc}$. Si $a^4 + b^4$ étoit moindre que $6aabb$, on changeroit les ſignes du dénominateur de la baſe & du numérateur du perpendicule. On prend ici pour f la grandeur fp de la réſolution précédente.

Suppoſitions.

Soûtendante connuë $aa + bb$. *Baſe* $aa - bb$. *Perpendicule* $2ab$. *Aire* $a^3b - ab^3$.
Soûtendante inconnuë $1vp$. *Baſe* $2tp$. *Perpendicule* xxp. *Aire* $1txxpp$.
Rapport connu des aires $a^3b - ab^3.\ 1txxpp :: rr.ff :: cc.dd.$

Réſolution générale.

p *arbitraire.* $r \propto 1.\ f \propto 2a^6p - 10a^4bbp - 10aab^4p + 2b^6p.$

Soûtendante $\frac{vprd}{fc} \propto \frac{a^8d + 20a^6bbd - 26a^4b^4d + 20aab^6d + b^8d}{2a^6c - 10a^4bbc - 10aab^4c + 2b^6c}.$

Baſe $\frac{2tprd}{fc} \propto \frac{8a^7bd + 8a^5b^3d - 8a^3b^5d - 8ab^7d}{2a^6c - 10a^4bbc - 10aab^4c + 2b^6c} \propto \frac{4a^5bd - 4ab^5d}{a^4c - 6aabbc + b^4c}.$

Perpendicule $\frac{pxxrd}{fc} \propto \frac{a^8d - 12a^6bbd + 38a^4b^4d - 12aab^6d + b^8d}{2a^6c - 10a^4bbc - 10aab^4c + 2b^6c} \propto \frac{a^4d - 6aabbd + b^4d}{2aac + 2bbc}.$

Premier exemple.

$a \propto 2.\ b \propto 1.\ c \propto 1.\ d \propto 1.$ 1^{ere} *ſoûtendante* $aa + bb \propto 5$. *Baſe* $aa - bb \propto 3$.
Perpendicule $2ab \propto 4$. *Aire* 6. 2^{e} *ſoûtendante* $\frac{vprd}{fc} \propto \frac{1201}{70}$.
Baſe $\frac{2tprd}{fc} \propto \frac{1200}{70} \propto \frac{120}{7}$. *Perpendicule* $\frac{pxxrd}{fc} \propto \frac{49}{70} \propto \frac{7}{10}$. *Aire* 6.

Second exemple.

$a \propto 2.\ b \propto 1.\ c \propto 3.\ d \propto 2.$ 1^{ere} *ſoûtendante* $aa + bb \propto 5$. *Baſe* $aa - bb \propto 3$.
Perpendicule $2ab \propto 4$. *Aire* 6. 2^{e} *ſoûtendante* $\frac{vprd}{fc} \propto \frac{2402}{210}$. *Baſe* $\frac{2tprd}{fc}$.
$\propto \frac{2400}{210} \propto \frac{80}{7}$. *Perpendicule* $\frac{pxxrd}{fc} \propto \frac{98}{210} \propto \frac{7}{15}$. 2^{e} *Aire* $\frac{8}{3}$. 1^{ere} $6 :: 8.\ 18 :: 4.\ 9.$

II COROLLAIRE ET QUESTION XIX.

44. *Pour trouver autant qu'on voudra de triangles rectangles, tels que chacune de leurs aires ſoit à celle d'un triangle connu, comme un quarré connu à un quarré connu.*

Si celuy qu'on propoſe a pour ſoûtendante une grandeur $aa + bb$, & pour baſe une autre $aa - bb$, & $2ab$ pour perpendicule; afin que ſon aire $a^3b - ab^3$ ſoit à l'une des aires que l'on cherche, comme un quarré connu cc eſt à un connu dd; on cherchera par la réſolution précédente un triangle rectangle qui doit résoudre la question. Et nommant sa soûtendante q, & sa base z, & son perpendicule y; on cherchera par la même résolution un triangle rectangle, dont l'aire soit égale à la précédente $\frac{1}{2}zy$. Et on en cherchera ensuitte un nouveau, dont l'aire sera encore égale à la précédente. Et ainsi de suitte jusques à l'infini. De sorte que la résolution, qui n'étoit simplement que générale, pourra successivement devenir infinie. Si n surpassoit m; on prendroit n pour m, & m pour n, comme dans l'éxemple qu'on expose ici.

Suppositions.

$$\{ a^3b - ab^3.\ 1txxpp :: rr.\ ff :: 1.\ ff :: cc.\ dd.\ \{ vvpp \propto 4ttpp + x^4pp.$$

Premiére des résolutions infinies.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soûtendante } q \propto \dfrac{a^8d + 20a^6bbd - 26a^4b^4d + 20aab^6d + b^8d}{2a^6c - 10a^4bbc - 10aab^4c + 2b^6c}. \\ \text{Base } z \propto \dfrac{4a^5bd - 4ab^5d}{a^4c - 6aabbc + b^4c}.\ \text{Perpendicule } y \propto \dfrac{a^4d - 6aabbd + b^4d}{2aac + 2bbc}. \end{array} \right.$$

Seconde des résolutions infinies.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soûtendante } \dfrac{z^4 + 6zzyy + y^4}{2zz\sqrt{zz+yy} - 2yy\sqrt{zz+yy}}.\ \text{Base } \dfrac{4z^3y + 4zy^3}{2zz\sqrt{zz+yy} - 2yy\sqrt{zz+yy}} \\ \propto m.\ \text{Perpendicule } \dfrac{z^4 - 2zzyy + y^4}{2zz\sqrt{zz+yy} - 2yy\sqrt{zz+yy}} \propto n.\ \text{Aire } \frac{1}{2}mn. \end{array} \right.$$

Troisiéme des résolutions infinies.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soûtendante } \dfrac{m^4 + 6mmnn + n^4}{2mm\sqrt{mm+nn} - 2nn\sqrt{mm+nn}}.\ \text{Base } \dfrac{4m^3n + 4mn^3}{2mm\sqrt{mm+nn} - 2nn\sqrt{mm+nn}} \\ \propto l.\ \text{Perpendicule } \dfrac{m^4 - 2mmnn + n^4}{2mm\sqrt{mm+nn} - 2nn\sqrt{mm+nn}} \propto k.\ \ \text{Aire } \frac{1}{2}kl.\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \propto 2.\ b \propto 1 \propto c \propto d.\ \text{Base } 3.\ \text{Perpendicule } 4.\ \text{Aire } 6.\ \{ z \propto \dfrac{120}{7}.\ y \propto \dfrac{7}{10}.\ \text{Aire } 6. \\ \text{Perpendicule } m \propto \dfrac{2066690884801}{241717895860}.\ \text{Base } n \propto \dfrac{339252715200}{241717895860}. \\ \text{Aire } \frac{1}{2}mn \propto \dfrac{350565247073914830837600}{58427541128985805139600} \propto 6 \propto \frac{1}{2}zy.\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

XX QUESTION.

45. *ET pour trouver trois triangles rectangles égaux par une Analyse plus simple & moins déterminée que la précédente.*

Ayant nommé $zz - yy$ la première base, & $2zy$ son perpendicule; & $zz - xx$ la seconde base, & $2zx$ son perpendicule; & $vv - zz$ la troisié-

me baſe, & $2vz$ ſon perpendicule ; l'aire du premier ſera $z^3y - zy^3$, & celle du ſecond $z^3x - zx^3$. Et parce qu'elles ſont égales, on aura par tranſpoſition $z^3y - z^3x \propto zy^3 - zx^3$. Et diviſant de part & d'autre par $zy - zx$, on aura le quarré $zz \propto yy + yx + xx$. Et prenant $t - y$ pour z ; le même quarré zz ſera $yy - 2ty + tt \propto yy + yx + xx$. Et $2ty + yx \propto tt - xx$. Et $y \propto \frac{tt - xx}{2t + x}$. Et ſuppoſant $t \propto p + q$, & $x \propto p - q$, la même valeur $y \propto \frac{4pq}{3p + q}$. Mais la ſeconde égalité eſt $z^3y - zy^3 \propto v^3z - vz^3$. Ou $z^3y + vz^3 \propto zy^3 + zv^3$. Et diviſant de part & d'autre par $zy + vz$, on trouvera de la même ſorte un quarré $zz \propto yy - vy + vv$. Et ſi on prend $ſ - y$ ou $y - ſ$ pour côté du quarré ; l'égalité ſera encore $yy - vy + vv \propto yy - 2ſy + ſſ$. Et $y \propto \frac{ſſ - vv}{2ſ - v}$. Et ſuppoſant $ſ \propto m + n$, & $v \propto m - n$; on aura encore une même valeur $y \propto \frac{4mn}{m + 3n} \propto \frac{4pq}{3p + q}$. Et les deux membres étant multipliez par chacun des dénominateurs $m + 3n$ & $3p + q$, pour ôter les fractions, on aura cette autre égalité $4mpq + 12npq \propto 12mnp + 4mnq$. Ou $4mpq + 12npq - 12mnp \propto 4mnq$. Et $p \propto \frac{mnq}{mq + 3nq - 3mn}$. &c. Et ſi on veut joindre la réſolution précédente avec celle-ci ; on en découvrira tant d'autres qu'on voudra, dont les aires ſeront toûjours égales aux trois qu'on vient de découvrir. Mais quoi que les grandeurs m, n, q, ſoient arbitraires ; il faut que z ou ſa valeur $\frac{mm + 3nn}{m + 3n}$ ſurpaſſe y ou ſa valeur $\frac{4mn}{m + 3n}$, ou que
b. 23. 1. le numérateur $mm + 3nn$ ſurpaſſe l'autre $4mn$. De ſorte [b] que l'arbitraire m ſurpaſſe $3n$. Et afin que p ou ſa valeur $\frac{mnq}{mq + 3nq - 3mn}$ ſurpaſſe q ; ſi on multiplie de part & d'autre par le dénominateur ; il faudra que le numérateur mnq ſurpaſſe le produit $mqq + 3nqq - 3mnq$, ou que $4mn$ ſurpaſſe $mq + 3nq$. Et ainſi l'arbitraire q vaut moins que $\frac{4mn}{m + 3n}$. Et parceque z ou ſa valeur $\frac{mm + 3nn}{m + 3n}$ ſurpaſſe $p - q$ ou ſa valeur $\frac{4mnq - mqq - 3nqq}{mq + 3nq - 3mn}$; ſi on multiplie de part & d'autre par chacun des dénominateurs, le produit $m^3q + 3mmnq - 3m^3n + 3mnnq + 3n^3q - 9mn^3$ ſurpaſſe le produit $4mmnq - mmqq - 3mnqq + 12mnnq - 3mnqq - 9nnqq$. Et par tranſpoſition, $mmqq + 6mnqq + 9nnqq$ ſurpaſſera $1mmnq + 9mnnq - m^3q$
c. 21. 1. $- 3n^3q + 3m^3n + 9mn^3$. Et par conſéquent [c] l'arbitraire q ſurpaſſe $\frac{1mmn + 9mnn - m^3 - 3n^3}{2mm + 12mn + 18nn} + \frac{1}{2mm + 12mn + 18nn}\sqrt{m^4nn + 162m^3n^3 + 291mmn^4 + 10m^5n + 270mn^5 + 9n^6}$. Et enfin comme v ou ſa valeur $m - n$ ſurpaſſe z ou ſa valeur $\frac{mm + 3nn}{m + 3n}$; ſi on multiplie par $m + 3n$ de part & d'autre ; le produit $mm + 2mn - 3nn$ ſurpaſſera le numé-

rateur $mm + 3nn$. Et $2mn$ surpassera $6nn$. Et l'arbitraire m surpassera $3n$, comme on l'avoit déja remarqué, en comparant z & y.

Suppositions.

1ere base $zz - yy$. *Perpendicule* $2zy$. *2e base* $zz - xx$. *Perpendicule* $2zx$. *3e base* $vv - zz$. *Perpendicule* $2vz$. *Les trois aires égales.*

Résolution infinie.

m. n. q. *arbitraires.* $p \propto \frac{mnq}{mq + 3nq - 3mn}$. $y \propto \frac{4mn}{m + 3n}$. $z \propto \frac{mm + 3nn}{m + 3n}$.
1ere base $zz - yy$. *Perpendicule* $2zy$. *2e base* $zz - pp + 2pq - qq$. *Perpendicule* $2pz - 2qz$. *3e base* $mm - 2mn + nn - zz$. *Perpendicule* $2mz - 2nz$.

Exemple.

$m \propto 9$. $n \propto 1$. $q \propto \frac{5}{2}$. $p \propto \frac{15}{2}$. $y \propto 3$. $z \propto 7$. *1ere base* 40. *Perpendicule* 42. *Soûtendante* 58. *2e base* 24. *Perpendicule* 70. *Soûtendante* 74. *3e base* 15. *Perpendicule* 112. *Soûtendante* 113. *Chacune des aires* 840.

Trois autres triangles rectangles tirez des précédens.

1ere base $\frac{48720}{41}$. *Perpendicule* $\frac{41}{29}$. *Soûtendante* $\frac{1412881}{1189}$. *Aire* 840.
2e base $\frac{124320}{5837}$. *Perpendicule* $\frac{5837}{74}$. *Aire* $\frac{62160}{74} \propto 840$.
3e base $\frac{379680}{12319}$. *Perpendicule* $\frac{12319}{226}$. *Aire* $\frac{189340}{226} \propto 840$. &c.

XXI QUESTION.

46. *Pour trouver tant de grandeurs qu'on voudra, telles que leur somme étant ajoûtée au quarré de chacune, ou retranchée du même quarré; les sommes & les restes soient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la somme des grandeurs, & y la première, & x la seconde, & v la troisiéme, & ainsi du reste, s'il y en a encore d'autres; & $t + s$ le côté du premier quarré $yy + z$, & $t - s$ le côté du second $yy - z$. La première égalité sera $yy + z \propto tt + 2ts + ss$. Et la seconde $yy - z \propto tt - 2ts + ss$. Et ajoûtant ensemble ces deux égalitez, on aura $2yy \propto 2tt + 2ss$. Ou $yy \propto tt + ss$. Et si on ôte la seconde de la première, on aura une valeur $z \propto 2ts$. Et si on nomme de la même sorte $r + q$ le côté du troisiéme quarré $xx + z$, & $r - q$ le côté du quatriéme $xx - z$; la première égalité $xx + z \propto rr + 2rq + qq$ & l'autre $xx - z \propto rr - 2rq + qq$ étant comparées comme les deux précédentes, fourniront un quarré $xx \propto rr + qq$, & valeur $z \propto 2rq$. Et si on nomme encore $p + n$ le côté du cinquiéme quarré $vv + z$, & $p - n$ le côté du sixiéme $vv - z$; on trouvera, en suivant une semblable méthode, un quarré $vv \propto pp + nn$, & une valeur $z \propto 2pn$. De sorte que les trois valeurs égales de la même z sont $2ts$, $2rq$, $2pn$. Et les quarts $\frac{1}{2}ts$, $\frac{1}{2}rq$, $\frac{1}{2}pn$, de ces mêmes valeurs, ſont les aires égales de trois triangles rectangles, puiſque $tt + ss$ eſt un quarré, & $rr + qq$ un autre, & $pp + nn$ un autre. Il faut donc pour achever la réſolution, qu'on prenne trois triangles rectangles égaux, ou autant qu'on voudra. C'eſt pourquoi nommant $mmg + llg$ le côté y, & $mmg - llg$ le côté t, & $2mlg$ le côté s; & prenant de la même ſorte $mmg + kkg$ pour x, & $mmg - kkg$ pour r, & $2mkg$ pour q; & $iig + mmg$ pour v, & $iig - mmg$ pour p, & $2img$ pour n; les grandeurs m, l, k, i, ſeront déterminées enſuitte par la réſolution précédente. Et alors il ne reſtera plus qu'à égaler la ſomme z ou $y + x + v \propto 3mmg + llg + kkg + iig$ & ſa valeur $2ts \propto 4m^3lgg - 4ml^3gg$. D'où l'on tirera enfin une valeur $g \propto \frac{3mm + ll + kk + ii}{4m^3l - 4ml^3}$. &c. L'arbitraire f ſurpaſſera l'arbitraire h.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} z \propto y + x + v.\ \left\{ yy + z \propto tt + 2ts + ss.\quad yy - z \propto tt - 2ts + ss. \right. \\ \qquad xx + z \propto rr + 2rq + qq.\ xx - z \propto rr - 2rq + qq. \\ \qquad vv + z \propto pp + 2pn + nn.\ vv - z \propto pp - 2pn + nn. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} f.\ h.\ \textit{arbitraires.}\ m \propto ff + fh + hh.\ l \propto ff - hh.\ k \propto 2fh + hh.\ i \propto ff + 2fh. \\ g \propto \frac{3mm + ll + kk + ii}{4m^3l - 4ml^3}.\ \left\{ y \propto mmg + llg.\ x \propto mmg + kkg.\ v \propto iig + mmg. \right. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} f \propto 2.\ h \propto 1.\ \left\{ m \propto 7.\ l \propto 3.\ k \propto 5.\ i \propto 8.\ g \propto \frac{7}{96}.\ \left\{ y \propto \frac{406}{96}.\ x \propto \frac{518}{96}.\ v \propto \frac{791}{96}. \right.\right. \\ \quad y + x + v \propto z \propto \frac{1715}{96} \propto \frac{164640}{9216}.\ \left\{ yy + z \propto \frac{329476}{9216}.\ yy - z \propto \frac{196}{9216}. \right. \\ xx + z \propto \frac{432964}{9216}.\ xx - z \propto \frac{103684}{9216}.\ \left\{ vv + z \propto \frac{790321}{9216}.\ vv - z \propto \frac{461041}{9216}. \right. \\ \quad \textit{Côtez des ſix quarrez.}\ \frac{574}{96}.\ \frac{14}{96}.\ \frac{658}{96}.\ \frac{322}{96}.\ \frac{889}{96}.\ \frac{679}{96}. \end{array}\right.$$

XXII QUESTION.

47. *Pour trouver trois grandeurs, telles que leur ſomme étant ajoûtée à chacun des plans alternatifs, ou retranchée de chacun de ces mêmes plans, les ſommes & les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z la ſomme des trois grandeurs, & y la premiére, & x la ſeconde, & v la troiſiéme; & $t + s$ le côté du premier quarré $yx + z$, & $t - s$ le côté du ſecond $yx - z$. La premiére égalité ſera $yx + z \propto tt + 2ts + ss$. Et la ſeconde $yx - z \propto tt - 2ts + ss$. Et la ſomme de ces deux égalitez en fournira une autre $2yx \propto 2tt + 2ss$. Ou $yx \propto tt + ss$. Et leur différence donnera celle-ci $2z \propto 4ts$. Ou $z \propto 2ts$. Et ſi on nomme de la même ſorte $r + q$ le côté du troiſiéme quarré $yv + z$, & $r - q$ le côté du quatriéme $yv - z$; on trouvera les deux égalitez $yv + z \propto rr + 2rq + qq$, & $yv - z \propto rr - 2rq + qq$. Et leur ſomme fournira celle-ci $2yv \propto 2rr + 2qq$. Ou $yv \propto rr + qq$. Et leur différence cette autre $2z \propto 4rq$. Ou $z \propto 2rq$. Et ſi on nomme encore $p + n$ le cinquiéme quarré $xv + z$, & $p - n$ le côté du ſixiéme $xv - z$; on aura de la même ſorte $xv \propto pp + nn$, & $z \propto 2pn$. Mais les égalitez $yx \propto tt + ss$ & $yv \propto rr + qq$ donnent une valeur $y \propto \frac{tt + ss}{x} \propto \frac{rr + qq}{v}$. Et $ttv + ssv \propto xrr + xqq$. D'où l'on tirera une valeur $x \propto \frac{ttv + ssv}{rr + qq}$. Et l'égalité $xv \propto pp + nn$ fournit auſſi une valeur $x \propto \frac{pp + nn}{v} \propto \frac{ttv + ssv}{rr + qq}$. Et multipliant en croix par les dénominateurs ; on formera l'égalité $pprr + ppqq + nnrr + nnqq \propto ttvv + ssvv$. D'où l'on tirera une valeur $vv \propto \frac{pprr + ppqq + nnrr + nnqq}{tt + ss}$. Et ſi le dénominateur $tt + ss$ eſt un quarré ; le numérateur qui eſt un produit de $pp + nn$ par $rr + qq$ eſt au juſte un quarré. Et par conſéquent ſi chacune des grandeurs $pp + nn$ & $rr + qq$ eſt un quarré parfait ; il faudra, pour achever la réſolution, trouver trois triangles, dont les aires $\frac{1}{2}pn$, $\frac{1}{2}rq$, $\frac{1}{2}ts$, ſoient égales. Nommant donc $mmg - llg$ le côté t, & $2mlg$ le côté s ; & $mmg - kkg$ le côté r, & $2mkg$ le côté q ; & $iig - mmg$ le côté p, & $2img$ le côté n ; les grandeurs m, l, k, i, ſeront déterminées par la réſolution de la queſtion vintiéme. Et alors les grandeurs ſeront $y \propto \frac{m^4g + mmkkg + mmllg + kkllg}{ii + mm}$, & $x \propto \frac{m^4g + iimmg + iillg + mmllg}{mm + kk}$, & $v \propto \frac{m^4g + iimmg + iikkg + mmkkg}{mm + ll}$. Ou ſi on veut abbréger ; on prendra c pour $mm + kk$, & d pour $mm + ll$, & e pour $ii + mm$. Et on aura une valeur $y \propto \frac{cdg}{e}$, & une autre $x \propto \frac{deg}{c}$, & une troiſiéme $v \propto \frac{ceg}{d}$. Et la ſomme $y + x + v$ ou $z \propto 2ts \propto 4m^3llgg - 4ml^3gg \propto \frac{ccddg + cceeg + ddeeg}{ced}$. Et multipliant le tout par ced, & diviſant les produits égaux par g ; on aura cette égalité $4m^3lcdeg - 4ml^3cdeg \propto ccdd + ccee + ddee$. Et on en tirera enfin une derniére valeur $g \propto \frac{ccdd + ccee + ddee}{4m^3lced - 4ml^3ced}$. &c. L'opération de l'exemple qu'on propoſe eſt un peu long & difficile, lors qu'on veut donner un commun dénominateur aux parties qu'on doit ajoûter & retrancher.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{er} \text{ quarré } yx + z \propto tt + 2ts + ss. \quad 2^{d}\ yx - z \propto tt - 2ts + ss. \\ 3^{e} \text{ quarré } yv + z \propto rr + 2rq + qq. \quad 4^{e}\ yv - z \propto rr - 2rq + qq. \\ 5^{e}\ xv + z \propto pp + 2pn + nn. \quad 6^{e}\ xv - z \propto pp - 2pn + nn. \end{array}\right. \left\{ z \propto y + x + v. \right.$$

Résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} f.\ h.\ \textit{arbitraires}.\ m \propto ff + fh + hh.\ l \propto ff - hh.\ k \propto 2fh + hh.\ i \propto ff + 2fh. \\ c \propto mm + kk.\ d \propto mm + ll.\ e \propto ii + mm.\ g \propto \frac{ccdd + ccee + ddee}{4m^3lcde - 4ml^3cde}. \\ y \propto \frac{cdg}{e}.\ x \propto \frac{deg}{c}.\ v \propto \frac{ceg}{d}.\ \left\{ y + x + v \propto \frac{ccddg + cceeg + ddeeg}{ced}. \right. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} f \propto 2.\ h \propto 1.\ m \propto 7.\ l \propto 3.\ k \propto 5.\ i \propto 8.\ \{ c \propto 74.\ d \propto 58.\ e \propto 113.\ g \propto \frac{32824806}{407396640} \\ \propto \frac{781543}{9699920}.\ \left\{ 1^{ere}\ y \propto \frac{781543}{255380}.\ 2^{e}\ x \propto \frac{781543}{109520}.\ 3^{e}\ v \propto \frac{781543}{67280}. \right. \\ Ou\ y \propto \frac{2879401986070 40}{94088448006400}.\ x \propto \frac{6714222783077 60}{94088448006400}. \\ v \propto \frac{1092957311537840}{94088448006400}.\ \left\{ y + x + v \propto z \propto \frac{2052319788452640}{94088448006400}. \right. \\ yx \propto \frac{2054763026296036}{94088448006400}.\ yv \propto \frac{3344792607609124}{94088448006400}. \\ xv \propto \frac{7799426005580881}{94088448006400}. \\ yx + z \propto \frac{4107082814748676}{94088448006400}.\ yx - z \propto \frac{2443237843396}{94088448006400}. \\ yv + z \propto \frac{5397112396061764}{94068448006400}.\ yv - z \propto \frac{1292472819156484}{94088448006400}. \\ xv + z \propto \frac{9851745794033521}{94088448006400}.\ xv - z \propto \frac{5747106217128241}{94088448006400}. \\ \textit{Côtez}.\ \frac{64086526}{9699920}.\ \frac{1563086}{9699920}.\ \frac{73465042}{9699920}.\ \frac{35950978}{9699920}.\ \frac{99255961}{9699920}.\ \frac{75809671}{9699920}. \end{array}\right.$$

XXIII QUESTION.

PREMIER CAS.

48. *Pour trouver trois quarrez, tels qu'ayant ajoûté chacun au ſolide des trois, les ſommes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z le côté du quarré égal au ſolide des trois, & zy le côté du premier quarré, & zx le côté du ſecond, & zv le côté du troiſiéme ; les trois ſommes $zz + zzyy$, $zz + zzxx$, $zz + zzvv$ doivent être au juſte des quarrez. Et ſi on les diviſe par le quarré zz ; les expoſans $1 + yy$, $1 + xx$, $1 + vv$, ſont encore des quarrez. Et pour former les côtez avec plus d'étenduë, on pourra multiplier le premier $1 + yy$ par un quarré indéterminé tt, & le ſecond $1 + xx$ par un quarré indéterminé $ſſ$, & le troiſiéme $1 + vv$ par un autre rr. Et les produits $1tt + ttyy$, $1ſſ + ſſxx$, $1rr + rrvv$, ſeront des quarrez parfaits. Et on prendra $q - ty$ pour côté du premier, & $p - ſx$ pour côté du ſecond, & $n - rv$ pour côté du troiſiéme. Et la premiére égalité $1tt + ttyy \propto ttyy - 2qty + qq$, ou $2qty \propto qq - tt$, fournira une valeur $y \propto \frac{qq - tt}{2qt}$. Et la ſeconde $1ſſ$

$+ ſſxx$

$+ssxx \propto ssxx - 2psx + pp$, ou $2psx \propto pp - ss$ en fournira une autre $x \propto \frac{pp - ss}{2ps}$. Et la troisiéme $1rr + rrvv \propto rrvv - 2nrv + nn$, ou $2nrv \propto nn - rr$ en fournira de la même sorte une $v \propto \frac{nn - rr}{2nr}$. Où l'on peut déja remarquer que les trois grandeurs y, x, v, sont des fractions, qui ont chacune pour numérateur la base d'un [b] triangle rectangle, & son perpendicule pour dénominateur. Et parceque le solide $1zz$ des trois quarrez $zzyy$, $zzxx$, $zzvv$, est $z^6yyxxvv$; si on divise de part & d'autre par z^6, on aura l'égalité $\frac{1}{z^4} \propto yyxxvv$. Ou $\frac{1}{zz} \propto yxv$. Et par conséquent on ne peut achever la résolution, qu'en trouvant trois triangles rectangles, tels que le solide des bases $qq - tt$, $pp - ss$, $nn - rr$, soit à celuy des perpendicules $2qt$, $2ps$, $2nr$, comme un quarré à un autre quarré. b. 7. 1.

Et pour résoudre ce nouveau problême, on ne changera rien dans la valeur $\frac{qq - tt}{2qt}$ de l'inconnuë y. Et pour la valeur $\frac{pp - ss}{2ps}$ de l'inconnuë x, si on y met qq pour p, & tt pour s; la même x sera $\frac{q^4 - t^4}{2qqtt}$. Et le produit yx sera déja un produit du quarré $\frac{q^4 - 2qqtt + t^4}{4qqtt}$ par $\frac{qq + tt}{qt}$. Et si on prend un produit $q^3t + qt^3$ du numérateur $qq + tt$ par qt, & qu'on le multiplie par un quarré mm pour en faire la base ou le numérateur de la valeur $v \propto \frac{nn - rr}{2nr}$; il faudra nécessairement que le dénominateur soit un [c] quarré ll. Et la somme des quarrez de ces nouveaux côtez $q^3tmm + qt^3mm$ & ll est $q^6ttm^4 + 2q^4t^4m^4 + qqt^6mm + l^4$, qui doit [d] être un quarré. Et si on veut prendre $qq - tt$ pour l; ce même quarré sera $t^8 - 4qqt^6 + 6q^4t^4 - 4q^6tt + q^8 + q^6ttm^4 + 2q^4t^4m^4 + qqt^6m^4$. Et nommant enfin son côté $t^4 - 2qqtt + q^4 + \frac{1}{2}qqttm^4$; on formera l'égalité $t^8 - 4qqt^6 + 6q^4t^4 - 4q^6tt + q^8 + q^6ttm^4 + 2q^4t^4m^4 + qqt^6m^4 \propto t^8 - 4qqt^6 + 6q^4t^4 - 4q^6tt + q^8 + qqt^6m^4 + q^6ttm^4 - 2q^4t^4m^4 + \frac{1}{4}q^4t^4m^8$. Et par transposition $4q^4t^4m^4 \propto \frac{1}{4}q^4t^4m^8$. Et chaque membre étant divisé par $q^4t^4m^4$, & multiplié par 4, on trouvera enfin $16 \propto m^4$. Et $4 \propto mm$. Et $2 \propto m$. On pourra varier les résolutions, en transposant les termes de celles des fractions y, x, v, que l'on voudra. L'arbitraire q surpasse l'autre t. La troisiéme des résolutions infinies qu'on expose ajoûte cette nouvelle condition à celles de Diophante, que le solide est au juste un quarré de quarré g^4. c. 47. 8. de la 1ere partie. d. 1. 7.

Suppositions.

$$\left\{ \begin{array}{l} zz + zzyy \propto \frac{qqzz - 2qtyzz + ttyyzz}{tt}. \quad \{ zz + zzxx \propto \frac{ppzz - 2psxzz + ssxxzz}{ss}. \\ zz + zzvv \propto \frac{nnzz - 2nrvzz + rrvvzz}{rr}. \quad \{ \textit{Solide } 1zz \propto z^6yyxxvv \propto g^4. \end{array} \right.$$

Premiére résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} q.\ t.\ \textit{arbitraires}.\ \{\ y \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ x \propto \frac{q^4 - t^4}{2qqtt}.\ v \propto \frac{4q^3t + 4qt^3}{q^4 - 2qqtt + t^4}. \\ z \propto \frac{qt}{qq + tt}.\ \{\ zy \propto \frac{qq - tt}{2qq + 2tt}.\ zx \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ zv \propto \frac{4qqtt}{q^4 - 2qqtt + t^4}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{\ z \propto \frac{2}{5}.\ zy \propto \frac{3}{10}.\ zx \propto \frac{3}{4}.\ zv \propto \frac{16}{9}.\ \{\ \textit{Solide}\ z^6yyxxvv \propto \frac{4}{25}. \\ zz + zzyy \propto \frac{25}{100}.\ zz + zzxx \propto \frac{289}{400}.\ zz + zzvv \propto \frac{6724}{2025}.\ \{\ \textit{Côtez}.\ \frac{5}{10}.\ \frac{17}{20}.\ \frac{82}{45}. \end{array}\right.$$

Seconde résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} q.\ t.\ \textit{arbitraires}.\ \{\ y \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ x \propto \frac{2qqtt}{q^4 - t^4}.\ v \propto \frac{q^4 - 2qqtt + t^4}{4q^3t + 4qt^3}. \\ z \propto \frac{2qq + 2tt}{qq - tt}.\ \{\ zy \propto \frac{qq + tt}{qt}.\ zx \propto \frac{4qqtt}{q^4 - 2qqtt + t^4}.\ zv \propto \frac{qq - tt}{2qt}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{\ z \propto \frac{10}{3}.\ zy \propto \frac{5}{2}.\ zx \propto \frac{16}{9}.\ zv \propto \frac{3}{4}.\ \{\ \textit{Solide}\ z^6yyxxvv \propto \frac{100}{9}. \\ zz + zzyy \propto \frac{625}{36}.\ zz + zzxx \propto \frac{1156}{81}.\ zz + zzvv \propto \frac{1681}{144}.\ \{\ \textit{Côtez}.\ \frac{25}{6}.\ \frac{34}{9}.\ \frac{41}{12}. \end{array}\right.$$

Troisiéme résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} q.\ t.\ \textit{arbitraires}.\ \{\ y \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ x \propto \frac{q^4 - t^4}{2qqtt}.\ v \propto \frac{q^4 - 2qqtt + t^4}{4q^3t + 4qt^3}.\ \{\ z \propto gg \propto \frac{1}{yy}. \\ z \propto \frac{4qqtt}{q^4 - 2qqtt + t^4}.\ \{\ zy \propto \frac{2qt}{qq - tt}.\ zx \propto \frac{2qq + 2tt}{qq - tt}.\ zv \propto \frac{qt}{qq + tt}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{\ z \propto \frac{16}{9} \propto pp.\ zy \propto \frac{4}{3}.\ zx \propto \frac{10}{3}.\ zv \propto \frac{2}{5}.\ \{\ \textit{Solide}\ z^6yyxxvv \propto \frac{256}{81}. \\ zz + zzyy \propto \frac{400}{9}.\ zz + zzxx \propto \frac{1156}{9}.\ zz + zzvv \propto \frac{6724}{2025}.\ \{\ \textit{Côtez}.\ \frac{20}{3}.\ \frac{34}{3}.\ \frac{82}{45}. \end{array}\right.$$

Quatriéme résolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} q.\ t.\ \textit{arbitraires}.\ \{\ y \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ x \propto \frac{2qqtt}{q^4 - t^4}.\ v \propto \frac{4q^3t + 4qt^3}{q^4 - 2qqtt + t^4}. \\ z \propto \frac{qq - tt}{2qt}.\ \{\ zy \propto \frac{q^4 - 2qqtt + t^4}{4qqtt}.\ zx \propto \frac{qt}{qq + tt}.\ zv \propto \frac{2qq + 2tt}{qq - tt}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{\ z \propto \frac{3}{4}.\ zy \propto \frac{9}{16}.\ zx \propto \frac{2}{5}.\ zv \propto \frac{10}{3}.\ \{\ \textit{Solide}\ z^6yyxxvv \propto \frac{9}{16}. \\ zz + zzyy \propto \frac{225}{256}.\ zz + zzxx \propto \frac{289}{400}.\ zz + zzvv \propto \frac{1681}{144}.\ \{\ \textit{Côtez}.\ \frac{15}{16}.\ \frac{17}{20}.\ \frac{41}{12}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

49. *ET ſi chacun des quarrez eſt retranché du ſolide des trois ; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Ayant nommé z le côté du quarré égal au ſolide des trois, & zy le côté du premier, & zx le côté du ſecond, & zv le côté du troiſiéme ; & $\frac{tz - qzy}{t}$ le côté du premier reſte $zz - zzyy$, & $\frac{sz - pxz}{s}$ le côté du ſecond $zz - zzxx$, & $\frac{rz - nvz}{r}$ le côté du troiſiéme $zz - zzvv$. On formera une premiére égalité $zz - zzyy \propto \frac{ttzz - 2qtzzy + qqzzyy}{tt}$, laquelle étant multipliée par tt, & diviſée par zz, donnera celle-ci $tt - ttyy \propto tt - 2qty + qqyy$. Ou $qqy + tty \propto 2qt$. Et $y \propto \frac{2qt}{qq + tt}$. Et on trouvera de la même ſorte une valeur $x \propto \frac{2ps}{pp + ss}$, & enſuitte une autre valeur $v \propto \frac{2nr}{nn + rr}$. Et parceque le ſolide $1zz$ des trois quarrez $zzyy$, $zzxx$, $zzvv$, eſt $z^6yyxxvv$; ſi on diviſe de part & d'autre par z^6, on trouvera $\frac{1}{z^4} \propto yyxxvv$, & enſuitte $\frac{1}{zz} \propto yxv$. De ſorte que pour achever la réſolution, il faut trois fractions y, x, v, telles que chacune ait pour numérateur la baſe d'un triangle rectangle, & ſa ſoûtendante pour dénominateur, & en ſorte que le ſolide des trois baſes ſoit à celuy des trois ſoûtendantes, comme un quarré à un autre quarré.

Et pour réſoudre ce nouveau problême, on ne changera rien dans la valeur $\frac{2ts}{tt + ss}$ de la grandeur y. Et ſuppoſant $x \propto \frac{2t^3s - 2ts^3}{l}$; il faudra déja que le quarré du dénominateur ou de la ſoûtendante l, moins celuy du numérateur ou de la baſe $2t^3s - 2ts^3$ donne un quarré $ll - 4t^6ss + 8t^4s^4 - 4tts^6$. Et cela eſt facile, en prenant $t^4 - ttss + s^4$ pour l, puiſque le reſte précédent forme alors au juſte le quarré $t^8 - 6t^6ss + 9t^4s^4 + 2t^4s^4 - 6tts^6 + s^8$, qui a pour côté la grandeur $t^4 - 3ttss + s^4$. Et par conſéquent x ou ſa valeur $\frac{2t^3s - 2ts^3}{l}$ ſera $\frac{2t^3s - 2ts^3}{t^4 - ttss + s^4}$. Et le produit yv des grandeurs y & v, ou celuy de leurs valeurs, eſt un produit du quarré $4ttss$ par $\frac{tt - ss}{t^6 + s^6}$. Et laiſſant à part [b] le quarré $4ttss$; il faudra que le produit de la fraction v par $\frac{tt - ss}{t^6 + s^6}$ ſoit au juſte un quarré, avec cette condition que le numérateur de la fraction v ſera la baſe d'un triangle rectangle, dont le dénominateur ſera la ſoûtendante. Et cette derniére condition ſeroit remplie, ſi on prenoit $\frac{2t^3s^3}{t^6 + s^6}$ pour v. Et le produit des dénominateurs $t^6 + s^6$ & $t^6 + s^6$ ſeroit un quarré, & le numérateur $2t^3s^3$ étant diviſé par le quarré $ttss$, il faudroit que l'expoſant $2ts$ étant multiplié par la baſe $tt - ss$ fournît au juſte un quarré. Et comme cela n'arrive pas, on peut conſidérer que $tt - ss$ eſt le perpendicule du

b. 47. 8. *de la 1ere partie.*

triangle rectangle, dont on avoit pris $2ts$ pour la baſe. Et ſi on vouloit changer en prenant $2ts$ pour le perpendicule, & $tt - ss$ pour la baſe; la grandeur y, qui étoit $\frac{2ts}{tt + ss}$ ſeroit $\frac{tt - ss}{tt + ss}$. Et tous les raiſonnemens que nous avons ſuivi, ſeroient conſervez, en mettant le quarré $t^4 - 2ttss + s^4$ pour le quarré $4ttss$, & $2ts$ pour le numérateur $tt - ss$ de la fraction qui devoit multiplier v & fournir un quarré. C'eſt pourquoi cette fraction ſera $\frac{2ts}{t^6 + s^6}$. Et ſon produit par v ou par ſa valeur $\frac{2t^3s^3}{t^6 + s^6}$ eſt au juſte un quarré. Retournant donc d'où l'on étoit parti, on ſubſtituëra les valeurs comme à l'ordinaire. Et la réſolution ſera juſte.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - zzyy \propto \frac{ttzz - 2qtyzz + qqyyzz}{tt}. \ \{ zz - zzxx \propto \frac{sszz - 2pxszz + ppxxzz}{ss}. \\ zz - zzvv \propto \frac{rrzz - 2nrvzz + nnvvzz}{rr}. \ \{ \text{Solide } 1zz \propto z^6yyxxvv. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} t.\ s.\ \text{arbitraires.} \ \{ y \propto \frac{tt - ss}{tt + ss}.\ x \propto \frac{2t^3s - 2ts^3}{t^4 - ttss + s^4}.\ v \propto \frac{2t^3s^3}{t^6 + s^6}. \\ z \propto \frac{t^6 + s^6}{2t^4ss - 2tts^4}. \ \{ zy \propto \frac{t^4 - ttss + s^4}{2ttss}.\ zx \propto \frac{tt + ss}{ts}.\ zv \propto \frac{ts}{tt - ss}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} t \propto 2.\ s \propto 1. \ \{ z \propto \frac{65}{24}.\ zy \propto \frac{13}{8}.\ zx \propto \frac{5}{2}.\ zv \propto \frac{2}{3}. \ \{ \text{Solide } z^6yyxxvv \propto \frac{4225}{576}. \\ zz - zzyy \propto \frac{169}{36}.\ zz - zzxx \propto \frac{625}{576}.\ zz - zzvv \propto \frac{441}{64}. \ \{ \text{Côtez. } \frac{13}{6}.\ \frac{25}{24}.\ \frac{21}{8}. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

50. *ET ſi on retranche le ſolide des trois de chacun de ces mêmes quarrez; afin que les reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

On trouvera la réſolution à peu prés comme la précédente. Et il ne faudra que changer les numérateurs en dénominateurs, & les dénominateurs en numérateurs.

Suppoſitions.

$$\left\{\begin{array}{l} zzyy - zz \propto \frac{qqzz - 2qtyzz + ttyyzz}{tt}. \ \{ zzxx - zz \propto \frac{ppzz - 2psxzz + ssxxzz}{ss}. \\ zzvv - zz \propto \frac{nnzz - 2nrvzz + rrvvzz}{rr}. \ \{ \text{Solide } 1zz \propto z^6yyxxvv. \end{array}\right.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{\begin{array}{l} t.\ s.\ \text{arbitraires.} \ \{ y \propto \frac{tt + ss}{tt - ss}.\ x \propto \frac{t^4 - ttss + s^4}{2t^3s - 2ts^3}.\ v \propto \frac{t^6 + s^6}{2t^3s^3}. \\ z \propto \frac{2t^4ss - 2tts^4}{t^6 + s^6}. \ \{ zy \propto \frac{2ttss}{t^4 - ttss + s^4}.\ zx \propto \frac{ts}{tt + ss}.\ zv \propto \frac{tt - ss}{ts}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{ z \propto \frac{4}{3}.\ y \propto \frac{10}{3}.\ x \propto \frac{2}{5}.\ \{ zz \propto \frac{16}{9}.\ yy \propto \frac{100}{9}.\ xx \propto \frac{4}{25}. \\ zzyy + 1 \propto \frac{1681}{81}.\ zzxx + 1 \propto \frac{289}{225}.\ yyxx + 1 \propto \frac{25}{9}.\ \{ \textit{Côtez.}\ \frac{41}{9}.\ \frac{17}{15}.\ \frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Quatriéme résolution infinie.

$$\{ q.\ t.\ \textit{arbitraires.}\ \{ z \propto \frac{q^4 - 2qqtt + t^4}{4qqtt}.\ y \propto \frac{qt}{qq + tt}.\ x \propto \frac{2qq + 2tt}{qq - tt}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} q \propto 2.\ t \propto 1.\ \{ z \propto \frac{9}{16}.\ y \propto \frac{2}{5}.\ x \propto \frac{10}{3}.\ \{ zz \propto \frac{81}{256}.\ yy \propto \frac{4}{25}.\ xx \propto \frac{100}{9}. \\ zzyy + 1 \propto \frac{1681}{1600}.\ zzxx \propto \frac{289}{64}.\ yyxx + 1 \propto \frac{25}{9}.\ \{ \textit{Côtez.}\ \frac{41}{40}.\ \frac{17}{8}.\ \frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

52. *ET si on ôte l'unité de chacun des produits alternatifs des trois quarrez; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Les trois restes $zzyy - 1$, $zzxx - 1$, $yyxx - 1$, étant encore multipliez, le premier par xx, & le second par yy, & le troisiéme par zz; les produits $zzyyxx - 1xx$, $zzyyxx - 1yy$, $zzyyxx - 1zz$, doivent être des quarrez. Et par conséquent la question se rapporte à l'autre, où l'on demande [b] trois quarrez, tels que chacun étant retranché du solide des
b. 49. trois, les trois restes soient des quarrez parfaits.

Suppositions.

$$\{ 1^{er}\ \textit{quarré}\ zzyy - 1.\ \{ 2^{d}\ \textit{quarré}\ zzxx - 1.\ \{ 3^{e}\ \textit{quarré}\ yyxx - 1.$$

Résolution infinie.

$$\{ t.s.\ \textit{arbitraires.}\ \{ z \propto \frac{t^4 - ttss + s^4}{2ttss}.\ y \propto \frac{tt + ss}{ts}.\ x \propto \frac{ts}{tt - ss}.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} t \propto 2.\ s \propto 1.\ \{ z \propto \frac{13}{8}.\ y \propto \frac{5}{2}.\ x \propto \frac{2}{3}.\ \{ zz \propto \frac{169}{64}.\ yy \propto \frac{25}{4}.\ xx \propto \frac{4}{9}. \\ zzyy - 1 \propto \frac{3969}{256}.\ zzxx - 1 \propto \frac{25}{144}.\ yyxx - 1 \propto \frac{16}{9}.\ \{ \textit{Côtez.}\ \frac{63}{16}.\ \frac{5}{12}.\ \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

53. *ET si chacun des plans alternatifs des trois quarrez est retranché de l'unité même; afin que les restes soient des quarrez parfaits.*

Lorsque les trois restes $1 - zzyy$, $1 - zzxx$, $1 - yyxx$, auront été multipliez, le premier par xx, & le second par yy, & le troisiéme par zz; il faudra que les trois produits $1xx - zzyyxx$, $1yy - zzyyxx$,

$1zz - zzyyxx$, ſoient des quarrez parfaits. De ſorte que la queſtion ſera réſoluë par celle, où l'on demande[b] trois quarrez, tels que leur ſolide b. 50.
étant retranché de chacun des trois, les reſtes ſoient des quarrez parfaits.

Suppoſitions.

{1er *quarré* $1 - zzyy$. {2d *quarré* $1 - zzxx$. {3e *quarré* $1 - yyxx$.

Réſolution infinie.

{t. s. *arbitraires.* {$z \propto \frac{2ttss}{t^4 - 2ttss + s^4}$. $y \propto \frac{ts}{tt + ss}$. $x \propto \frac{tt - ss}{ts}$.

Exemple.

$$\begin{cases} t \propto 2.\ s \propto 1.\ \{z \propto \frac{8}{13}.\ y \propto \frac{2}{5}.\ x \propto \frac{3}{2}.\ \{zz \propto \frac{64}{169}.\ yy \propto \frac{4}{25}.\ xx \propto \frac{9}{4}. \\ 1 - zzyy \propto \frac{3969}{4225}.\ 1 - zzxx \propto \frac{25}{169}.\ 1 - yyxx \propto \frac{16}{25}.\ \{\text{Côtez.}\ \frac{63}{65}.\ \frac{5}{13}.\ \frac{4}{5}. \end{cases}$$

XIII QUESTION.

54. *Pour trouver un triangle rectangle, tel qu'un des angles aigus étant couppé par la moitié; ou ce qui revient[b] au même, comme on le prouve en Géométrie, tel que la baſe étant couppée en deux parties proportionelles aux côtez terminez ſur elles; la couppante ſoit commenſurable.* b. 40. 3. *de ma Géométrie.*

Ayant pris $zyy + zxx$ pour[a] la couppante AC, & $2zyx$ pour le perpendicule AD; la partie CD de la baſe BD, compriſe entre la couppante AC & le perpendicule AD, ſera[c] néceſſairement $zyy - zxx$. Et ſi la baſe entiére BD eſt nommée v; ſon autre partie BC ſera $v - zyy + zxx$. Et comme on ſuppoſe que les parties DC & CB ont un même rapport, que le perpendicule AD & la ſoûtendante AB; ſi on met la valeur des trois premiers termes, il y aura un même rapport entre $zyy - zxx$ & $v - zyy + zxx$, &[d] entre $2zyx$ & AB. Et par conſéquent la ſoûtendante AB aura une[e] valeur $\frac{2yxv - 2zy^3x + 2zyx^3}{yy - xx}$. Et ſon quarré $\frac{4yyxxvv - 8zy^4xxv + 4zzy^6xx + 8zyyx^4v - 8zzy^4x^4 + 4zzyyx^6}{y^4 - 2yyxx + x^4}$ égalera les deux quarrez enſemble vv & $4zzyyxx$ de la baſe entiére v & du perpendicule $2zyx$. Et multipliant de part & d'autre par le dénominateur $y^4 - 2yyxx + x^4$; on formera l'égalité $4yyxxvv - 8zy^4xxv + 4zzy^6xx + 8zyyx^4v - 8zzy^4x^4 + 4zzyyx^6 \propto y^4vv - 2yyxxvv + x^4vv + 4zzy^6xx - 8zzy^4x^4 + 4zzyyx^6$. Ou $6yyxxvv - y^4vv + x^4vv \propto 8y^4xxvz - 8yyx^4vz$. Et enfin $z \propto \frac{6yyxxv - y^4v - x^4v}{8y^4xx - 8yyx^4}$. Et lorſqu'on voudra réſoûdre la queſtion par entiers, on donnera aux grandeurs un même dénominateur. Et les numérateurs réſoûdront alors la queſtion.

a. 1ere *figure.*
c. 1. 7.
d. *ſuppoſition.*
e. 2. 11. *de la 1ere partie.*

Suppositions.

{ *Angles égaux* CAD. CAB. { *Proportion* CD. CB : : AD. AB. { *Angle droit* D.
{ *Couppante* AC $\propto zyy + zxx$. *Perpendicule* AD $\propto 2zyx$. *Base* BD $\propto v$.

Résolution infinie.

{ *Arbitraires* { *Soûtendante* AB *Perpendicule* AD. *Base* BD. $\propto v$.
{ $y.\ x.\ v.$ { $\dfrac{2yyxxv + y\,v + x^4v}{4y^3x - 4yx^3}$. $\dfrac{6yyxxv - y^4v - x^4v}{4y^3x - 4yx^3}$. $\dfrac{4y^3xv - 4yx^3v}{4y^3x - 4yx^3}$.
{ *Couppante* AC $\propto \dfrac{5y^4xxv - y^6v + 5yyx^4v - x^6v}{8y^4xx - 8yyx^4}$. CD $\propto \dfrac{6yyxxv - y^4v - x^4v}{8yyxx}$.

Exemple.

{ $y \propto 2.\ x \propto 1.\ v \propto 3.$ { AB $\propto \frac{100}{32}$. AD $\propto \frac{28}{32}$. BD $\propto \frac{96}{32}$. *Couppante* AC $\propto \frac{35}{32}$.
{ *Parties* DC $\propto \frac{21}{32}$. CB $\propto \frac{75}{32}$. { *Proportion* $\frac{21}{32}.\ \frac{75}{32} : : \frac{28}{32}.\ \frac{100}{32} : : 7.\ 25.$

Résolution infinie par entiers.

{ $y.\ x.\ v.$ *arbitraires.* { *Soûtendante* AB $\propto 4y^3x^3v + 2y^5xv + 2yx^5v$.
{ *Perpendicule* AD $\propto 12y^3x^3v - 2y^5xv - 2yx^5v$. *Base* BD $\propto 8y^4xxv - 8yyx^4v$.
{ *Couppante* AC $\propto 5y^4xxv - y^6v + 5yyx^4v - x^6v$. 1^{ere} *partie* CD $\propto 7y^4xxv$
{ $- y^6v - 7yyx^4v + x^6v$. 2^{e} *partie* BC $\propto 1y^4xxv - 1yyx^4v + y^6v - x^6v$.

Exemple.

{ $y \propto 2.\ x \propto 1.\ v$ *arbitraire.* { *Soûtendante* AB $\propto 100v$. *Perpendicule* AD $\propto 28v$.
{ *Base* BD $\propto 96v$. *Couppante* AC $\propto 35v$. 1^{ere} *partie* CD $\propto 21v$. 2^{e} BC $\propto 75v$. &c.

DE LA METHODE DE DIOPHANTE.

SA méthode ne fournit point ordinairement de modéle pour les résolutions générales des questions déterminées, ni pour les résolutions infinies de celles qui sont entiérement indéterminées. On y voit seulement certains exemples, & comme des vestiges de l'Analyse que l'on peut imiter & suivre, pour trouver en particulier chaque résolution, lors qu'une question est toute déterminée ; ou pour trouver successivement diverses résolutions, lors que la question est indéterminée. Il suffira d'en fournir quelques exemples, & de les proposer à sa mode.

PREMIER EXEMPLE.

55. *TRois nombres quarrez étant donnez, on peut trouver trois nombres, lesquels étant multipliez deux par deux l'un par l'autre, fournissent pour produits ces mêmes quarrez.*

Car si on propose les quarrez 4, 9, 16; & que nous mettions 1N pour un de ceux qu'on cherche : l'un des deux autres sera $\frac{4}{1N}$, & le troisiéme $\frac{9}{1N}$. Il reste à faire que le produit du second par le troisiéme soit 16. Mais ce produit est $\frac{36}{1Q}$. Ce qu'on doit égaler à 16. Et on trouve $1\frac{1}{2}$ pour 1N. Retournant donc aux positions, le premier est $1\frac{1}{2}$, le second $\frac{8}{3}$, le troisiéme 6. &c. La résolution générale selon nôtre méthode seroit celle-ci.

Suppositions. *Résolution générale.*

$\{zy \propto aa.\ zx \propto bb.\ yx \propto cc.\ \{z \propto \frac{aa}{y} \propto \frac{bb}{x}.\ y \propto \frac{aax}{bb} \propto \frac{cc}{x}.\ \{x \propto \frac{bc}{a}.\ y \propto \frac{ac}{b}.\ z \propto \frac{ab}{c}.$

Exemple.

$\{aa \propto 4.\ bb \propto 9.\ cc \propto 16.\ \{z \propto \frac{3}{2}.\ y \propto \frac{8}{3}.\ x \propto 6.\ \{zy \propto 4.\ zx \propto 9.\ yx \propto 16.$

SECOND EXEMPLE.

56. *Pour trouver deux nombres tels, que la différence de leurs quarrez surpasse d'un certain nombre la différence des deux nombres, & qu'elle ait encore un certain rapport avec elle.*

Soit éxigé que l'intervalle des quarrez soit triple de l'intervalle des deux nombres, & qu'il le surpasse encore de 10 unitez. Il est nécessaire que le quarré de l'intervalle des nombres soit moindre que la somme du triple de ce même intervalle, & des 10 unitez que l'on détermine. Soit posé 2 pour l'intervalle des nombres, & 1N pour le moindre, & par conséquent 1N + 2 pour le plus grand. Il faut donc que 4N + 4 soit triple de 2, & qu'il lui donne encore 10 unitez. Donc 3 fois 2 recevant 10 unitez égaleront 4N + 4. Ce qui donne 3 pour 1N. Le moindre des deux nombres sera donc 3, & le plus grand 5. Et ils résolvent la question.

AUTRE RESOLUTION.

La même question peut s'énoncer plus généralement & avec moins d'équivoque en ces termes. Trouver deux grandeurs telles, qu'ayant ajoûté une grandeur connuë au plan de leur différence par une grandeur connuë ; la somme soit égale au produit de la différence des quarrez inconnus par une grandeur connuë.

Soit z la moindre des grandeurs inconnuës, & $z + y$ la plus grande, & b la connuë qui doit multiplier la différence y, & a la connuë qu'on doit ajoûter au plan by, & c la connuë qui doit multiplier la différence

Supposition. *Résolution infinie.*

$\{czz + 2czy + cyy - czz \propto bz + by - bz + a.\ \{y \text{ arbitraire}.\ z \propto \frac{by + a - cyy}{2cy}.$

Exemple.

$\{a \propto 10.\ b \propto 3.\ c \propto 1.\ y \propto 2.\ \{z \propto 3.\ z + y \propto 5.\ \{2czy + cyy \propto by + a \propto 16.$

$2zy + yy$ des quarrez inconnus zz & $zz + 2zy + yy$. On aura donc par la ſuppoſition l'égalité $by + a \propto 2czy + cyy$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \frac{by + a - cyy}{2cy}$. Et la grandeur y eſt arbitraire. Mais afin que z ſoit poſitive ; il faut que l'arbitraire y ſoit moindre que $\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{bb - 4ac}{4cc}}$; puiſque $by + a$ doit ſurpaſſer cyy. Ce qui s'accorde avec la condition qu'éxige Diophante.

TROISIEME EXEMPLE.

57. *Deux nombres étant donnez, ſi quelque quarré eſt multiplié par l'un des deux, & que l'autre ſoit ôté du produit, & qu'il reſte un quarré ; on trouvera un autre quarré plus grand que celuy qu'on avoit pris d'abord, qui fera le même effet.*

Soient donnez les deux nombres 3 & 11, & qu'un certain quarré comme 25 étant multiplié par 3, on ôte 11 du produit 75, en ſorte que le reſte 64 ſoit un quarré. Et qu'il faille trouver un autre quarré plus grand que 25 qui faſſe le même effet. Si ſon côté eſt 1N + 5, le quarré ſera 1Q + 10N + 25, dont le triple moins 11 donnera 3Q + 30N + 64, qui doit être encore un quarré. Soit 8 — 2N ſon côté, & on trouvera 62 pour 1N. Le côté 1N + 5 qu'on cherche eſt donc 67, & ſon quarré 4489 ſatisfait à ce qu'on a demandé.

QUATRIEME EXEMPLE.

58. *Pour trouver un triangle rectangle, tel que le nombre de l'aire avec celuy de la ſoûtendante faſſe un quarré, & que la circonférence ſoit un nombre cubique.*

Qu'on prenne 1N pour le nombre de l'aire, & pour l'hypotenuſe un certain quarré moins 1N comme 16 — 1N. Puiſque nous avons pris 1N pour l'aire ; le plan des deux côtez eſt 2N. Mais 2N eſt un produit de 2 par 1N. Si donc l'un des côtez de l'angle droit eſt 2 ; l'autre ſera 1N, & la circonférence vaudra 18, ce qui n'eſt point un cube. Or 18 eſt provenu d'un certain quarré 16, qui a receu 2 unitez. Il faut donc trouver un quarré à qui 2 étant ajoûté, la ſomme ſoit un cube, de ſorte que le cube ſurpaſſe le quarré de 2. Qu'on mette donc 1N + 1 pour le côté du quarré, & 1N — 1 pour le côté du cube ; & on aura le quarré 1Q + 2N + 1, & le cube 1C + 3N — 3Q — 1. Et comme je veux que le cube ſurpaſſe le quarré de 2 unitez ; il faudra que le quarré plus 2, ou que 1Q + 2N + 3 ſoit égal à 1C + 3N — 3Q — 1. Ce qui donne 1C + 1N — 4Q — 4 $\propto$ 0, qu'on peut diviſer par 1N — 4 $\propto$ 0. De ſorte que l'on trouve une valeur 4 pour 1N. Le côté du quarré eſt donc 5, & 3 celuy du cube, le quarré 25, & le cube 27. Je change donc le triangle, & mettant 1N pour l'aire, je prens 25 — 1N pour la ſoûtendante, & je laiſſe 2 pour la baſe, & 1N pour le perpendicule. Et il reſte à faire que le quarré de l'hypotenuſe ſoit égal aux quarrez des côtez de l'angle droit.

té ſurprenante. Quand pluſieurs même agiroient de concert, il ne ſeroit jamais en leur pouvoir d'expliquer tout le menu détail, ni de remplir leur projet dans une étenduë parfaite & entiére, ſur tout dans un ſujet auſſi vaſte & inépuiſable que l'eſt l'Analyſe.

Je ne ſçai quelles ſont les difficultez, auſquelles on veut croire que des gens ſi habiles ont été forcez de ſe rendre, quoi que leurs principes en fourniſſent aiſément la réſolution, s'il eſt permis d'en juger par celle qu'on donne pour éxemple, & dont il eſt parlé tres-amplement dans une lettre inſérée parmi les extraits de la Bibliothéque univerſelle, où l'on rapporte que Meſſieurs Bachet & Fermat n'ont point réſolu la queſtion, parce qu'elle leur a paru trop difficile. Cela ſeroit bon, ſi leurs écrits fourniſſoient des preuves qu'ils ſe fuſſent appliquez ſérieuſement à la recherche de ces ſortes de réſolutions, qu'on ſe perſuade avoir été comme au deſſus de leurs forces. On n'eſt pas en droit de conclurre qu'un homme a eü trop de peine à faire une choſe qui eſt facile à d'autres, parce qu'il a négligé de s'y appliquer, ou que peut-être il n'a point tourné ſur elle ſa penſée, ou plûtôt parce qu'il a reconnu que c'étoit une ſuitte naturelle & facile des principes qu'il avoit établis. La queſtion eſt celle qui ſuit.

XXXIV QUESTION.

60. *Pour trouver deux nombres, tels qu'ôtant de chacun le quarré de l'autre, les deux reſtes ſoient des quarrez parfaits.*

Il auroit été facile à Meſſieurs De Fermat & Bachet, & à Diophante, & aux moindres de ſes Commentateurs, de juger d'abord que les nombres qui doivent ſatisfaire, ne peuvent être entiers; & qu'ainſi on a la liberté de leur donner un dénominateur commun. Prenant donc z, comme ils l'auroient pû faire, pour numérateur du premier des deux nombres, & y pour numérateur du ſecond, & x pour leur commun dénominateur; le premier nombre ſera $\frac{z}{x}$, & le ſecond $\frac{y}{x}$. Et il faudra pour remplir les ſuppoſitions que les deux différences $\frac{z}{x} - \frac{yy}{xx}$ & $\frac{y}{x} - \frac{zz}{xx}$, ou $\frac{zx - yy}{xx}$ & $\frac{yx - zz}{xx}$ ſoient des quarrez parfaits. Et parce que le commun dénominateur xx eſt au juſte un quarré; il ſuffira que les numérateurs $zx - yy$ & $yx - zz$ ſoient au juſte des quarrez. Ce qui eſt une double égalité, dont Diophante & ſes Commentateurs n'auroient pas été fort embarraſſez. Il eſt aiſé de rapporter la reſolution comme on le fait ici, au ſecond cas de la ſeconde des queſtions du quatriéme Livre, en prenant pour $\frac{z}{y}$ un quarré $\frac{tt}{yy}$, ou pour zy un quarré tt. On pourroit encore réſoûdre la queſtion en diverſes maniéres. Je ne m'arrête pas à celle qu'on a expliquée dans la lettre, où l'on détache des égalitez, parce qu'elle n'a rien d'extraordinaire, & qui ne ſoit commun parmi les analyſtes, lors qu'ils ſuppoſent dans leurs égalitez que certaines parties priſes enſemble ſont égales à rien. Et ſans parler de M. O. même, qui en touche quelque choſe dans ſon Traitté des lignes,

& à qui par conſéquent on devoit rendre un peu plus de juſtice, quand d'autres raiſons n'auroient pas éxigé qu'on le traitât plus favorablement; on trouvera, ſi l'on remonte juſques à Diophante, que ſes réſolutions pourroient bien en fournir quelque éxemple.

Suppoſitions. *Comparaiſons.*

$$\left\{ 1^{ere}\ \frac{zx - yy}{xx} \propto \frac{vv}{xx}.\quad 2^{e}\ \frac{yx - zz}{xx} \propto \frac{qq}{xx}. \right. \quad \left\{ \text{Donc } x \propto \frac{vv + yy}{z} \propto \frac{qq + zz}{y}. \right.$$

$$\text{Donc } vvy + y^3 \propto zqq + z^3.\ \text{Et } qq \propto \frac{vvyz + y^3z - z^4}{zz} \propto \frac{vvtt + y^3z - z^4}{zz}.\ \text{Et } z \propto \frac{tt}{y}.$$

$$\text{Donc } vvtt + y^3z - z^4 \propto \frac{vvtty^4 + y^6tt - t^8}{y^4}.\ \text{Et } vvy^4 + y^6 - t^6 \propto vvy^4 - 2yytr + ttrr.\ \&c.$$

Réſolution infinie.

$$\left\{ y.\ t.\ r.\ \text{arbitraires}. \right. \left\{ v \propto \frac{yyttrr - y^6 + t^6}{2try^3}.\ x \propto \frac{yvv + y^3}{tt}. \right. \left\{ 1^{ere}\ \text{grandeur}\ \frac{z}{x} \propto \frac{tt}{yx}.\ 2^{e}\ \frac{y}{x}. \right.$$

Exemple analytique.

$$\left\{ y \propto 1.\ t \propto \frac{m}{n}.\ r \propto \frac{m^3 + n^3}{mnn}. \right. \left\{ z \propto \frac{m^6 + n^6}{mmn^4}. \right. \left\{ \frac{z}{x} \propto \frac{m^4nn}{m^6 + n^6}.\ \frac{y}{x} \propto \frac{mmn^4}{m^6 + n^6}. \right.$$

Exemple numérique.

$$\left\{ \begin{array}{l} y \propto 1.\ t \propto 2.\ r \propto \frac{9}{2}. \left\{ v \propto 8.\ x \propto \frac{65}{4}. \right. \left\{ 1^{er}\ \text{nombre}\ \frac{z}{x} \propto \frac{16}{65}.\ 2^{d}\ y \propto \frac{4}{65}. \right. \\ 1^{er}\ \text{quarré}\ \frac{z}{x} - \frac{yy}{xx} \propto \frac{1024}{4225}.\ 2^{d}\ \text{quarré}\ \frac{y}{x} - \frac{zz}{xx} \propto \frac{4}{4225}. \end{array} \right.$$

AUTRE AVERTISSEMENT.

61. LA remarque précedente me donne occaſion ſans ſortir du ſujet d'en ajoûter une autre ſur une régle de Monſieur Bachet que Monſieur De Fermat blâme trop fortement, & qu'il eût facilement approuvée en y changeant un mot, s'il en eût mieux compris l'étenduë. Cette régle eſt la ſeconde des deux que propoſe l'Auteur, en éclairciſſant la queſtion 45^e » du 4^e Livre de Diophante. Il veut pour l'ob- » ſerver que la différence des deux nombres, » qu'on doit égaler chacun à un quarré, puiſ- » ſe être multipliée ou diviſée en telle ſorte par » un certain nombre, que le produit ou l'expo- » ſant étant ôté du moindre de ces deux nom- » bres, (*ou plûtôt de l'un des deux, pour éten-* » *dre au double l'uſage de ſa régle,*) le reſte » ſoit au multiplicateur ou au diviſeur, comme » un nombre quarré à un nombre quarré.

Il n'eſt pas néceſſaire de rapporter ſa régle, puis qu'on a expliqué d'une maniere plus claire la réſolution de ces doubles égalitez dans [b] le quatriéme Livre. Nous nous con-

Secundus caſus eſt, cum numerorum quadrato æquandorum intervallum tale eſt, ut eo per aliquem unitatum numerum multiplicato vel diviſo, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto, (*ſeu potius ab alterutro, ut ejus regula duplo plura complectatur & expediat;*) deficiat unitatum numerus ſolus, qui ad multiplicatorem vel diviſorem rationem habeat quadrati ad quadratum.

b. 9. 4. &c.

Observatio D. P. Fermatii.

Sed proponatur, si placet, hæc duplicata æqualitas, nempe $2z + 5$ & $6z + 3$ æquandi quadrato. Quadratus æquandus $2z + 5$ erit 16, & quadratus æquandus $6z + 3$ erit 36. Et invenientur alii in infinitum quæstioni satisfacientes; nec difficile est regulam generalem ad hujusmodi quæstionum solutionem proponere: ut vix ista limitatio Bacheri sit tanto viro digna. Cum ad infinitos extendi, quod in duobus tantum adinvenit facillimè possit, imo & ad casus omnes possibiles.

tenterons seulement de rapporter & d'examiner l'observation de Mr De Fermat.

" Qu'on propose, dit-il, si on le veut bien permettre, la double égalité où il faut égaler à un quarré parfait chacun de ces deux nombres $2z + 5$ & $6z + 3$. Le premier qu'on doit égaler à $2z + 5$ sera 16, & l'autre qu'on doit égaler à $6z + 3$ sera 36. Et on en trouvera une infinité d'autres qui peuvent satisfaire, sans qu'il soit même difficile de donner une régle générale pour résoudre ces sortes de questions; en sorte que la régle ainsi limitée de Mr Bachet mérite à peine de paroître sous le nom d'un si grand homme. Car on peut tres-facilement étendre à une infinité de cas, & même à tous les cas possibles, ce qu'il n'a trouvé que pour deux. "

Cette observation ne me paroît pas juste. Car Mr Bachet proposant les deux régles qui servent simplement à résoûdre deux diverses espêces des doubles égalitez, ne prétend pas dans ce même endroit toucher aux autres espêces, ni se dispenser d'en parler dans la suitte, comme l'observation le donne à penser. Il se réserve à expliquer selon les rencontres toutes celles dont son Auteur se sert: & même il a soin de les rassembler sur la fin du sixiéme Livre aprés l'éclaircissement de la 24e question. Et l'on y peut observer en passant, que la troisiéme revient entiérement à celle que l'Auteur de la lettre croit être fort nouvelle. Et si Mr De Fermat entend dans son observation, comme on le croiroit presque, qu'on peut trouver une régle générale, qui embrasse & résolue elle seule toutes les diverses espêces des doubles égalitez qui se peuvent résoudre; on peut dire hardiment qu'il s'avance trop, ou plûtôt on peut dire que c'est une de ces premiéres pensées, qui nous frappent vivement d'abord d'une fausse lueur, & qui s'effacent ensuitte aisément, lors qu'en nous approchant nous en voulons chercher le fond & la solidité. Et je ne doute pas qu'il n'eût effacé, ou qu'il n'eût au moins un peu modifié cet article, s'il eût pris soin luy-même de faire imprimer ses observations. Il est facile au reste de rapporter sa double égalité à cette régle qu'il veut rejetter comme trop limitée, pourvû qu'on ait égard au changement que j'y fais d'un mot.
b. 9. 4. Car elle fournira [b] la résolution qu'il en donne luy-même, & autant d'autres qu'on voudra jusques à l'infini; puis que la double égalité comprend les conditions que la régle suppose. Car les deux nombres sont $2z + 5$ & $6z + 3$. Et si leur différence $4z - 2$ est multipliée par $\frac{3}{2}$, & qu'ensuitte le produit $6z - 3$ soit retranché du second & du plus grand des deux nombres, qui est $6z + 3$; le reste 6 & le multiplicateur $\frac{3}{2}$ ont un

même rapport que deux nombres quarrez 9 & 1, comme on l'éxige pour pouvoir appliquer la régle. Il eſt vrai qu'on doit accorder à Mr de Fermat, qu'il y a pluſieurs eſpêces un peu trop diſtinguées chez Mr Bachet, & qu'on peut rappeller à une ſeule régle ou à un même ordre de réſolutions, ainſi que nous l'avons fait au quatriéme Livre.

Cette remarque peut être utile à ceux qui ſont verſez dans la lecture de Mr Bachet & des anciens Analyſtes, & qui réglent encore leurs recherches à la vieille mode. Et elle peut prouver en même temps que Meſſieurs Bachet & Fermat avoient aſſez de lumiéres, & qu'ils ne manquoient pas de moyens pour découvrir la réſolution qu'on a expliquée dans la remarque précédente.

DE LA METHODE DE MONSIEUR VIETE.

SA méthode a beaucoup plus d'étenduë que celle de Diophante; parce qu'elle réſoût infiniment les queſtions indéterminées, ſans qu'on ſoit obligé de reïtérer ſes opérations: mais elle eſt moins dégagée que celle de Monſieur Deſcartes. On y remarque même un défaut aſſez conſidérable, en ce qu'elle n'eſt pas aſſez analytique, ſuppoſant ſouvent bien des choſes parfaitement connuës par la voye ſyntethique, qui ne paroiſſent pas tout-à-fait claires & développées parmi celles qu'on accorde, quoi qu'elles en dépendent comme des conſéquences. Je me contenterai d'en donner des éxemples, & de les propoſer à peu prés comme il les propoſe.

Premier exemple.

62. *Connoiſſant le plan de deux grandeurs, & leur rapport; pour trouver les grandeurs.*

Soit B le plan des deux grandeurs, & que la plus grande qu'il appelle A, ſoit à la moindre comme S eſt à R; il prend les conſones pour dénommer les grandeurs connuës, & les voyelles pour dénommer les grandeurs inconnuës. Comme donc S eſt à R comme A eſt à $\frac{\text{R en A}}{\text{S}}$; le moindre côté eſt $\frac{\text{R en A}}{\text{S}}$. Et le plan des côtez $\frac{\text{R en A quarré}}{\text{S}}$ qui eſt égal au plan B. Que tout ſoit multiplié par S, & on aura R en A quarré égal au plan S en B. Et l'égalité étant réduite à une proportion, on trouvera que S eſt à R, comme le plan B eſt au quarré de l'inconnuë A. &c.

Second exemple.

63. *Connoiſſant la ſomme des quarrez de trois grandeurs proportionellement géométriques, & la ſomme des extrêmes, on connoît les extrêmes.*

Car le quarré de la ſomme des extrêmes étant diminué de la ſomme des quarrez des trois, donne le quarré de la moyenne. Et connoiſſant la ſomme des extrêmes, & la moyenne, on connoît chaque extrême. &c.

TROISIEME EXEMPLE.

64. *Pour trouver deux triangles rectangles ſemblables, dont les hypotenuſes ſoient déterminées, & tels que la baſe d'un troiſiéme triangle, qu'on en tirera, étant compoſée du perpendicule du premier & de la baſe du ſecond, ſoit celle qu'on voudra. Mais il faudra que cette baſe ainſi déterminée ſoit plus grande que l'hypotenuſe du premier triangle.*

Figures 2.3.4. Soit B l'hypotenuſe du premier triangle, & D celle du ſecond qui doit être ſemblable au premier, & qu'il faille tirer de ces deux triangles un troiſiéme, dont la baſe N ſoit compoſée du perpendicule du premier & de la baſe du ſecond. Que le quarré de B plus le quarré de D moins le quarré de N ſoit égalé au quarré de M. Donc la baſe du ſecond triangle ſemblable au premier ſera $\frac{\text{D en A}}{\text{B}}$, & le perpendicule du premier ſera $\text{N} - \frac{\text{D en A}}{\text{B}}$. Et le perpendicule du ſecond ſera A + M ou A — M, en ſorte que M ſera la différence qui ſe trouve entre la baſe du premier, & le perpendicule du ſecond. Suppoſant donc comme au premier cas que ce ſoit A + M; & on aura un même rapport entre B & D, & entre $\text{N} - \frac{\text{D en A}}{\text{B}}$ & A + M. Et la proportion étant réſoluë, & toutes choſes diſpoſées par ordre, on trouvera que $\frac{\text{D en N en B}, - \text{B en M en B}}{\text{B quarré} + \text{D quarré}}$ eſt égale à A. Ou, l'égalité étant réduite à une proportion, que B quarré + D quarré eſt à D en N moins B en M comme B eſt à A.

Et dans le ſecond cas, ſoit A — M le perpendicule du ſecond triangle. Donc B eſt à D comme $\text{N} - \frac{\text{D en A}}{\text{B}}$ eſt à A — M. Et la proportion étant réſoluë, & toutes choſes diſpoſées par ordre comme auparavant, on trouvera $\frac{\text{D en N en B}, + \text{B en M en B}}{\text{B quarré} + \text{D quarré}}$ pour A. Ou réduiſant l'égalité à une proportion, que B quarré + D quarré eſt à D en N + B en M comme B eſt à l'inconnuë A.

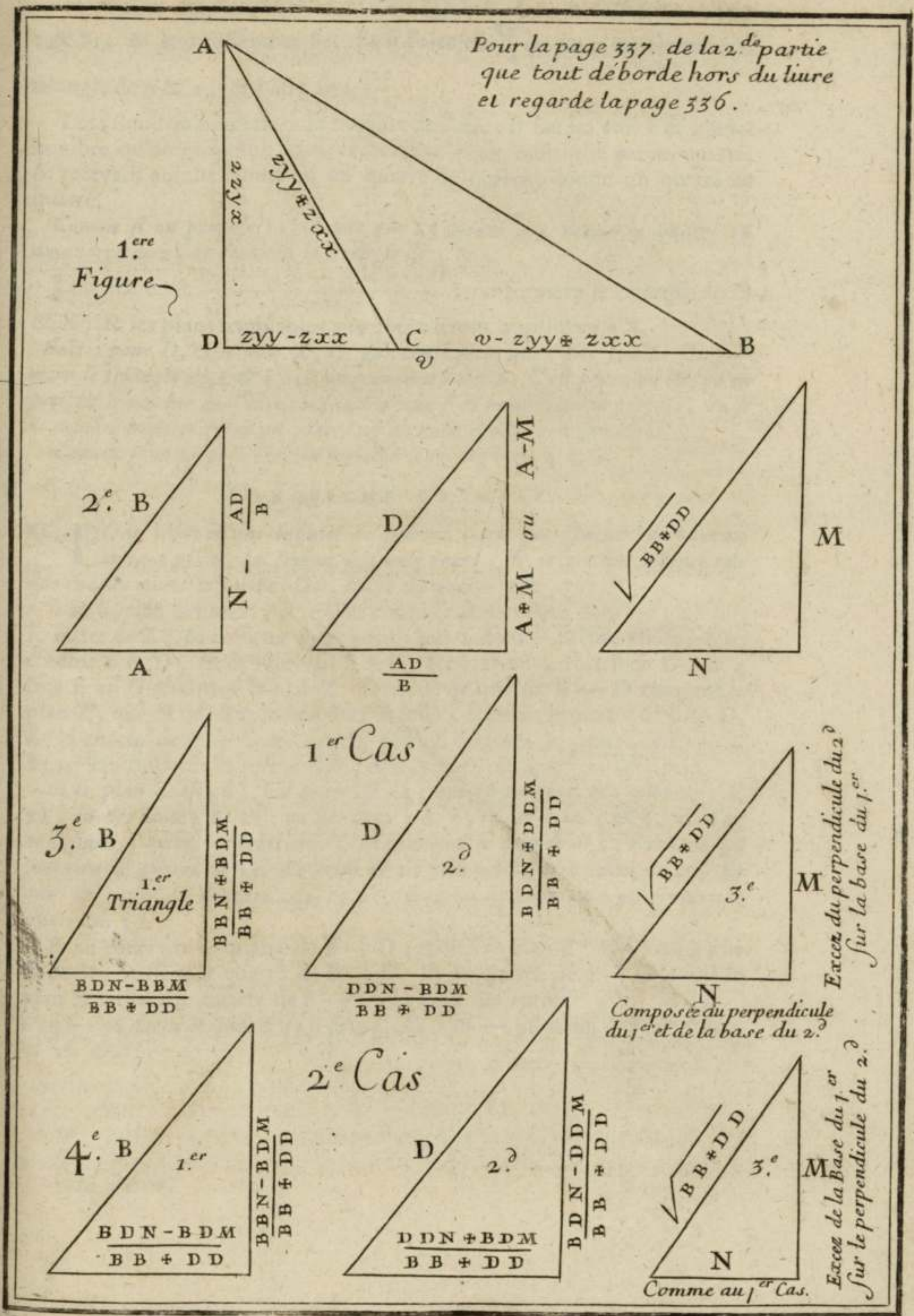
On voit que le premier cas a lieu, lors que D en N ſurpaſſe M, & que c'eſt le ſecond, lors que B en N ſurpaſſe D en M.

QUATRIEME EXEMPLE.

65. *Pour trouver un triangle rectangle, dont l'aire ſoit celle qu'on voudra à certaines conditions.*

Comme ſi on vouloit que l'aire fût $\frac{\text{Bqq} - \text{Xqq}}{\text{D quarré}}$; on prendra Bq & Xq pour former le triangle. Et les plans des plans ſemblables aux côtez ſeront appliquez à X en D en B.

Soit 3 pour B, & 2 pour D. Donc les deux quarrez de quarrez ſeront 1 & 81,



Pour la page 337. de la 2.de partie
que tout déborde hors du livre
et regarde la page 336.
1.ere Figure
A
D
C
B
v
zyx
zyy+zxx
zyy-zxx
v-zyy+zxx
2.e B
A
N - AD/B
D
A+M ou A-M
AD/B
√BB+DD
M
N
1.er Cas
3.e B
1.er Triangle
BBN+BDM / BB+DD
BDN-BBM / BB+DD
D
2.d
BDN+DDM / BB+DD
DDN-BDM / BB+DD
√BB+DD
3.e
M
N
Composée du perpendicule du 1.er et de la base du 2.d
Excez du perpendicule du 2.d sur la base du 1.er
2.e Cas
4.e B
1.er
BBN-BDM / BB+DD
BDN-BDM / BB+DD
D
2.d
BDN-DDM / BB+DD
DDN+BDM / BB+DD
√BB+DD
3.e
M
N
Comme au 1.er Cas.
Excez de la Base du 1.er sur le perpendicule du 2.d

1 & 81, & leur différence 80. Et si l'aire est $\frac{80}{4}$ ou 20; on formera le triangle de 9 & 1, & l'aire sera $\frac{720}{36}$.

Lors donc qu'on prescrit le nombre de l'aire; il faudra voir si ce même nombre qu'on propose, ou si ce nombre étant multiplié par un quarré, & recevant ensuite l'unité ou un quarré de quarré, donne un quarré de quarré.

Comme si on propose 15. Parce que 15 ajoûté à 1 donne le quarré 16 du quarré de 2; on formera le triangle de 4 & 1.

Et si l'aire est $\frac{\text{D cube en X} - \text{X cube en D}}{\text{X quarré}}$; on formera le triangle de D & X, & les plans semblables aux côtez seront appliquez à X.

Soit 2 pour D, & 1 pour X, & par conséquent que l'aire soit 6. On formera le triangle de 2 & 1, & on trouvera l'aire 6. C'est pourquoi lorsqu'on prescrit le nombre de l'aire; il faudra voir si ce nombre qu'on propose, ou si ce nombre multiplié par un quarré est un cube diminué de son côté.

Comme si on propose 60; on formera le triangle de 4 & 1.

Cinquieme exemple.

66. *Pour trouver une infinité de quarrez, tels que chacun recevant un certain plan, la somme soit un quarré, & encore une infinité tels que chacun moins le même plan, laisse un quarré pour reste.*

Soit le plan connu Z, & qu'on choisisse deux côtez dont le plan soit le quart de Z, & ensuitte deux autres qui fassent la même chose, &c; comme B & D, & de nouveau F & G, &c; Donc 4 fois B en D, ou 4 fois F en G rendront le plan Z. Donc le quarré de B — D recevant le plan Z, qui est quadruple des côtez B & D, donnera le quarré de B + D, Et le quarré de F — G recevant le plan Z donnera le quarré de F + G. Et ce sera toûjours la même chose des deux côtez que l'on aura pris.

Si le plan Z est 96; son quart est 24, qui est un plan des nombres 1 & 24, ou des deux 2 & 12, ou des deux 3 & 8, ou des deux 4 & 6, & d'une infinité d'autres en fractions. C'est pourquoi le quarré de 23 recevant 96 fournira le quarré de 25. Et celui de 10 plus 96 donnera celui de 14. Et celui de 5 plus 96 donnera celui de 11. Et celui de 2 recevant 96 donnera le quarré de 10.

Et au contraire le quarré de B + D, moins le plan Z, qui vaut 4 fois B & D, laissera le quarré de B + D. Et le quarré de F + G moins le plan Z laissera le quarré de F — G. Et ainsi des autres.

625 — 96 donne le quarré 529 de 23. Et 196 — 96 donne le quarré 100 de 10. &c.

DE LA METHODE DE MONSIEUR DESCARTES

POUR TROUVER LES NOMBRES AMIABLES.

67. Lorsque deux nombres sont tels que les aliquotes du plus grand sont égales toutes ensemble au moindre, & celles du moindre toutes ensemble égales au plus grand ; on dit que ces nombres sont *amiables*. Et voici l'analyse dont Schooten se sert pour les découvrir, & qu'il peut bien avoir empruntée, ou tout au moins imitée de celle de Monsieur Descartes.

Si on met $4x$ pour l'un des deux nombres, & $4yz$ pour l'autre, & que chacun des nombres x, y, z, soit un nombre premier, toutes les parties aliquotes de $4x$ seront, $1, 2, 4, x, 2x$. D'où l'on tirera une égalité $7 + 3x \propto 4yz$, ou $x \propto \frac{4yz - 7}{3}$. Et toutes les aliquotes de $4yz$ sont $1, 2, 4, y, 4y, z, 2z, 4z, yz, 2yz$. D'où l'on tirera une nouvelle égalité $4x \propto 7 + 7y + 7z + 3yz \propto \frac{16yz - 28}{3}$. Et $z \propto \frac{3y + 7}{y - 3}$, ou $z \propto 3 + \frac{16}{y - 3}$. De sorte que prenant 5 pour y, afin que la fraction $\frac{16}{y - 3}$ soit un nombre entier, on trouvera 11 pour z, & ensuite 71 pour x. Et le premier nombre $4x$ sera 284, & le second $4yz$ sera 220.

Si on eût pris $2x$ pour le premier des deux nombres, & $2zy$ pour le second ; l'analyse n'eût rien fourni de propre. Et on n'eût pas mieux reüssi, si l'on eût supposé $2x$ pour le premier, & yz pour l'autre ; ni si l'on eût fait quelque autre supposition plus simple que celle qu'on a faite d'abord. De sorte que les nombres 284 & 220 sont les moindres qui puissent être amiables.

Et si l'on en veut trouver deux autres plus grands ; ayant pris $8x$ pour l'un, & $8yz$ pour l'autre ; on formera comme auparavant une premiére égalité $x \propto \frac{8yz - 15}{7}$, & ensuitte une autre $z \propto 7 + \frac{64}{y - 7}$. Où si l'on met 11 pour y ; on trouvera 23 pour z, & 287 pour x, qui n'est pas propre, parce qu'il est composé. Et si on met 23 pour y, ou quelqu'autre nombre premier ; on ne trouvera jamais deux nombres z & x, qui puissent satisfaire. De sorte que les suppositions ne peuvent rien fournir.

On supposera donc de nouveau $16x$ pour l'un, & $16yz$ pour l'autre. Et les égalitez fourniront $x \propto \frac{16yz - 31}{15}$ & $z \propto 15 - \frac{256}{y - 15}$. Et si l'on prend le nombre premier 47 pour z, on trouvera 23 pour y, & le nombre premier 1151 pour x. De sorte que les nombres amiables seront l'un $16x \propto 18416$, & l'autre $16yz \propto 17296$.

Et si on vouloit supposer $32x$ pour le premier des deux nombres, &

$32yz$ pour l'autre ; on verroit que les valeurs des inconnuës ne pourroient jamais ſatisfaire. Et ſi l'on prend $64x$ pour l'un, & $64yz$ pour l'autre ; on ne trouve rien de plus.

Mais ſi l'on prend $128x$ pour le premier, & $128yz$ pour le ſecond ; on trouvera une valeur $x \propto \frac{128yz - 255}{127}$, & une autre $z \propto 127 + \frac{16384}{y - 127}$. Et mettant 197 pour y ; le nombre z ſera 383, & le nombre x ſera 73727. Et les nombres amiables $128x$ & $128yz$ ſeront 9437056 & 9363584. Et on pourra continuer juſques où l'on voudra de la même ſorte. D'où l'on formera la régle même de Monſieur Deſcartes que Schooten rapporte.

Régle générale.

Si on prend le nombre 2, ou quelqu'autre qui ne ſoit formé que par la multiplication du même nombre 2, & qui ſoit tel, que ſi on ôte l'unité de ſon triple, le reſte ſoit un nombre premier. Et ſi on ôte l'unité de ſon ſextuple, que le reſte ſoit un nombre premier. Et enfin ſi on l'ôte de 8 fois ſon quarré, & que le reſte ſoit un nombre premier ; lorſque ce dernier nombre ſera multiplié par le double de celui qu'on avoit pris d'abord ; on trouvera un nombre, dont les parties aliquotes en formeront un, qui aura auſſi toutes ſes parties aliquotes égales enſemble à cet autre nombre.

DE LA MANIERE DE TROUVER LES NOMBRES, *leſquels étant diviſez par ceux qu'on voudra, laiſſent certains reſtes.*

68. CEtte méthode que Schooten explique, peut être fort utile en Chrônologie, lorſqu'on veut ſçavoir les années de la période Julienne, qui répondent en même temps à certains nombres des cicles ſolaires, & des cicles lunaires, & de l'indiction Romaine.

PREMIER EXEMPLE.

LE premier exemple qu'il apporte de ces ſortes de diviſions, & ſur un ſujet différent de la chrônologie, eſt cette queſtion. Trouver un nombre lequel étant diviſé par 2, ou par 3, ou par 5, laiſſe toûjours 1 pour reſte; & qui ne laiſſe rien, ſi on le diviſe par 7.

Les conditions qu'on exige ſeront exprimées dans cette analyſe tres-ſimple ; $2z + 1 \propto 3y + 1 \propto 5x + 1 \propto 7v$. Ou $7v - 1 \propto 2z \propto 3y \propto 5x$. Ce qui fait voir, que pour achever la réſolution, il eſt néceſſaire de chercher un nombre diviſible par chacun des nombres 2, 3, 5, & qui ſoit moindre de l'unité qu'un autre diviſible par 7. Or le plus ſimple dont 2, 3, 5, peuvent être diviſeurs eſt 30, où 7 eſt compris 4 fois avec un reſte 2. Comme donc 3 fois 2 font 1 fois 7 — 1 ; on prendra 3 fois 30,

& le produit 90 avec l'unité fournira le moindre nombre 91, qui peut résoûdre la question. Et avec celui-là on en trouvera tant d'autres qu'on voudra. Car ayant pris le moindre 210 que 2, 3, 5, 7, divisent sans reste; si on le répéte autant de fois qu'on voudra, & qu'on ajoûte toûjours 1 fois 91; on trouvera toûjours de nouvelles résolutions. Il faut remarquer que le nombre 7 doit être premier à l'égard de chacun des nombres, 2, 3, 5.

91.	91.	91.	91.	91.	91.	91.	91.	91.
	210.	420.	630.	840.	1050.	1260.	1470.	1680.
91.	301.	511.	721.	931.	1141.	1351.	1561.	1771.

Second exemple.

Le second exemple qu'il propose est celuy-ci. Trouver un nombre, lequel étant divisé par 7 laisse 2, & par 11 il laisse 1, & par 13 il laisse 9.

Tout est exprimé par cette égalité $7z + 2 \propto 11y + 1 \propto 13x + 9$, ou $7z + 1 \propto 11y \propto 13x + 8$. Où l'on voit, que pour achever la résolution, il faut prendre 11, ou l'un de ses multiples, tel qu'en ayant retranché 1 & 8, les restes soient divisibles par 7 & par 13. Comme donc 11 vaut 1 fois 7 avec un reste 4, & que 2 fois le même reste 4 vaut 1 fois 7 + 1; si l'on prend 2 fois 11, on aura 22 qui peut déja satisfaire à l'une des conditions. Ensuitte comme 22 vaut 1 fois 13 avec un reste 9 qui surpasse 8 de l'unité, si l'on prend 7 fois 11 avec les 22 qu'on avoit déja, on aura un nombre 99 divisible par 11, & qui laissera 1 si on le divise par 7, & qui laissera encore 8 si on le divise par 13. Et ce même nombre 99 recevant l'unité donnera 100 qui résout la question. Et si on ajoûte au nombre 100 le plus petit 1001 que les trois 7, 11, 13, peuvent diviser, ou l'un de ses multiples; on trouvera de nouveaux nombres, qui résoûdront toûjours la question.

	1001.	2002.	3003.	4004.	5005.	6006.	7007.	8008.	9009.
100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.
100.	1101.	2102.	3103.	4104.	5105.	6106.	7107.	8108.	9109.

Regle abbregée rapportée par le même.

69. Le même Auteur dont je viens de parler, donne une régle d'un de ses amis nommé Nicolas Huberti Sieur de Persin qui est ingénieuse, pour ces sortes de résolutions.

Comme pour résoûdre la premiére question; aprés avoir pris le plus petit nombre 210 que les quatre 2, 3, 5, 7, peuvent diviser au juste; il le divise deux fois par chacun, & considére ce qui reste. Et il prend le reste 1 & l'exposant 105 pour côtez d'un produit, & ensuitte l'autre reste 1 & l'exposant 70 pour côtez d'un nouveau produit. Mais parce que l'exposant 42 laisse un reste 2; il prend 42 autant de fois qu'il est nécessaire pour laisser 1 pour reste lors qu'on l'a divisé par 5, c'est-à-dire 3 fois, puisque 3 fois 2 font $6 \propto 5 + 1$. Et il choisit le troisiéme reste 1 & le produit

126 pour côtez d'un troisiéme produit. Et enfin le reste 0 & 4 fois 30 ou 120 sont les côtez d'un quatriéme produit 0. Et la somme entiére 301 des quatre produits 105, 70, 126, 0, étant divisée par 210 laisse un reste 91 qui est le plus simple de tous ceux qu'on cherche.

```
   1                 11              2.           2
210 ( 105 ( 52.   210 ( 70 ( 23.   210 ( 42.   210 ( 30 ( 4.
 2     2           3    3          5    5.      7    7
```

Divi-seurs.	Res-tes.	Multipli-cateurs.		
2.	1.	105.	105.	*Diviser* 301 (1. *par* 210 — *Le reste* 91 *satisfait.*
3.	1.	70.	70.	
5.	1.	126.	126.	
7.	0.	120.	0.	
			301 *somme.*	

TROISIEME EXEMPLE.

Aprés qu'on a trouvé au second exemple le moindre nombre 1001 qui peut être divisé sans reste par chacun des nombres 7, 11, 13, & qu'on l'a divisé deux fois par chacun ; dans la division qui se fait par 7, & qui laisse un reste 3, on prend 3 autant de fois qu'il est nécessaire pour laisser un reste 1 aprés une division par 7, c'est-à-dire 5 fois: & on multiplie l'exposant 143 par 5, & le produit 715 sert de multiplicateur. Et dans la seconde division que l'on fait par 11, on prend aussi le reste 3 autant de fois qu'il le faut pour laisser un reste 1 aprés une division par 11, c'est-à-dire 4 fois; & on multiplie l'exposant 91 par 4, & le produit 364 sert de multiplicateur. Et dans la division qui se fait par 13, & qui laisse un reste 12, on prend le reste 12 autant de fois qu'il le faut pour laisser un reste 1 aprés une division par 13, c'est-à-dire 12 fois, & on multiplie l'exposant 77 par 12, & le produit 924 sert de multiplicateur. Et les autres multiplicateurs sont les mêmes 2, 1, 9, qu'on avoit d'abord supposé devoir se rencontrer aprés les divisions.

```
 32                  1    13       9     12
1001 ( 143 ( 20.  1001 ( 91 ( 8.  1001 ( 77 ( 5.
  7     7           11              13    13
```

Divi-seurs.	Res-tes.	Multipli-cateurs.	Produits.	
7.	2.	715.	1430.	*Diviser* 10110 (10. *par* 1001 — *Le reste* 100 *satisfait.*
11.	1.	364.	364.	
13.	9.	924.	8316.	
			10110 *somme.*	

QUATRIEME EXEMPLE.

Pour trouver dans qu'elle année de la période Julienne le cicle Solaire est 18, & le lunaire 5, & 8 celuy de l'indiction Romaine. Ou ce qui revient au même, pour trouver le nombre le plus simple, lequel étant divisé par 28 laisse un reste 18, & par 19 il laisse 5, & par 15 il laisse 8.

Tout est exprimé dans cette égalité $28z + 18 \propto 19y + 5 \propto 15x + 8$, ou $28z + 13 \propto 19y \propto 15x + 3$, qu'on peut résoûdre comme les précédentes. Ou si on aime mieux suivre les régles que l'on vient d'observer, on prendra le nombre entier 7980 de la période de Julienne, qui est le plus petit que 28, 19, 15, puissent diviser sans reste. Et on achevera le reste comme aux éxemples précédens; c'est-à-dire qu'on prendra autant de fois qu'il sera nécessaire le reste 5, afin que la division par 28 puisse laisser 1 pour reste, c'est-à-dire 17 fois, & on multipliera l'exposant 285 par 17, & le produit 4845 servira de multiplicateur. On prendra aussi le reste 2 au juste 10 fois; afin que le produit 20 étant divisé par 19 puisse laisser un reste 1. Et on multipliera l'exposant 420 par 10, & le produit 4200 sera encore un multiplicateur. Et en troisiéme lieu on prendra le reste 7 au juste 13 fois, afin que le produit 91 étant divisé par 15 puisse laisser un reste 1. Et on multipliera l'exposant 532 par 3, & le produit 6916 servira de multiplicateur. Enfin on multipliera 4845 par le reste 18 que l'on doit laisser pour le cicle Solaire, & 4200 par le reste 5 qu'on doit laisser aussi pour le cicle Lunaire, & 6916 par le reste 8 qu'on doit encore laisser pour l'Indiction Romaine. Et rassemblant les trois produits 87210, 21000, 55328, en une somme 163538; la même somme sera divisée par la période entiére 7980, & sans avoir aucun égard à l'exposant 2, le reste 3938 sera l'année de la période Julienne qu'on cherche, & qui résoût entiéremennt la question.

$\cancel{7}\cancel{9}8\cancel{0}$ (285 ((10. $\cancel{7}\cancel{9}8\cancel{0}$ ($\overset{2}{\cancel{4}20}$ (22. 7980 ($\overset{7}{\cancel{5}\cancel{3}2}$ (35.
28 28 19 19 15

Diviseurs.	Restes.	Multiplicateurs.	Produits.		
28.	18.	4845.	87210.	Diviser 163538 (20. par 7980	Le reste 3938 satisfait.
19.	5.	4200.	21000.		
15.	8.	6916.	55328.		
			163538 somme.		

DE CERTAINES RESOLUTIONS PAR ENTIERS.

Il arrive assez souvent que parmi les résolutions infinies d'une même question, on s'arrête seulement à celles que l'on peut donner par entiers. Ce qui demande quelquesfois une analyse un peu forte & laborieuse, comme cette question de Monsieur De Fermat, qui a tant donné d'exercice à Messieurs Frenicle & Wallis, & encore à d'autres.

QUESTION PROPOSE'E PAR Mr DE FERMAT.

Connoissant un nombre non quarré, le multiplier en telle sorte par un nombre quarré, que le produit recevant l'unité donne encore un quarré.

Soit a le nombre non quarré qu'on connoît, & z le côté du quarré entier qui le doit multiplier, en telle sorte que $azz + 1$ soit un quarré entier yy. Il est déja clair par la supposition que le côté y n'est pas moindre que $1z + 1$. C'est pourquoy si on suppose $\frac{xz}{v} + 1$ pour y, afin de réduire z au linéaire, & de conserver toute l'étenduë de la résolution; le nombre $\frac{x}{v}$ ne sera pas moindre que l'unité, ni par conséquent le numérateur x moindre que le dénominateur v. Et lorsqu'on aura formé l'égalité $yy \propto azz + 1 \propto \frac{xxzz}{vv} + \frac{2xz}{v} + 1$, on en tirera une valeur $z \propto \frac{2vx}{avv - 1xx}$. où v & x seront arbitraires. Le nombre x, qui ne peut pas valoir moins que le nombre v, vaudra moins nécessairement que le nombre vva. De sorte que quand on aura pris quelque nombre pour x, les justes limites de l'arbitraire v seront déterminées; ce qu'il est important de bien remarquer, si l'on veut chercher successivement quels nombres v & x peuvent fournir un nombre z entier.

Supposition.	*Resolution infinie.*
$\{ yy \propto azz + 1 \propto \frac{xxzz}{vv} + \frac{2xz}{v} + 1.$	$\{ v, x,$ *arbitraires*. $z \propto \frac{2vx}{avv - xx}.$

Exemple.

$$\{ a \propto 3. \quad \begin{array}{l} x \propto 1.\ v \propto 1.\ z \propto 1.\ (azz + 1 \propto 4. \\ x \propto 3.\ v \propto 2.\ z \propto 4.\ (azz + 1 \propto 49. \end{array}$$

Et si la recherche de ces nombres v & x paroît trop longue, ou tentée un peu trop au hazard; on pourra se servir de la méthode de Monsieur Wallis, qui ne laisse pas d'être ingénieuse, quoy que l'analyse n'en soit pas générale, & qu'elle dépende de chaque question qu'on propose en particulier. Je n'en fournirai qu'un éxemple, où j'aurai soin d'expliquer ou de démontrer naturellement certaines choses, qu'il prouve par des raisonnemens peu simples.

PREMIER EXEMPLE.

Pour multiplier 13 par un nombre entier & quarré, tel qu'ayant ajoûté 1 au produit, la somme soit un quarré entier.

Par la supposition $13zz + 1$ est un quarré entier. Et le côté de ce quarré surpasse $3z$. C'est pourquoy si on nomme ce même côté $3z + y$; on formera l'égalité $13zz + 1 \propto 9zz + 6zy + yy$, ou $4zz + 1 \propto 6zy + yy$. & on en tirera une valeur $y \propto - 3z + \sqrt{13zz}$, qui sera moindre que $1z$, & plus grande que $\frac{1}{2}z$. Ainsi on pourra supposer $z \propto y + x$, & substituer pour z sa nouvelle valeur dans l'égalité $4zz + 1 = 6zy + yy$. Ce qui fournira celle-ci $2yx + 4xx + 1 = 3yy$. D'où l'on peut tirer une valeur y qui doit surpasser x, & valoir moins que $2x$. Supposant donc $y = x + v$, & substituant pour y sa valeur dans la derniére égalité qu'on avoit trouvée, on en formera une autre $3xx + 1 = 4xv + 3vv$. Et on continuëra toûjours de la même sorte, jusques à ce qu'on soit enfin arrivé à l'unité. Aprés quoy on trouvera, en substituant les valeurs dans un ordre rétrograde, un nombre z entier qui résoudra la question.

{$y = x + v$. ($3xx + 1 = 4xv + 3vv$. {$x = v + t$. ($2vt + 3tt + 1 = 4vv$.
{$v = t + s$. ($tt + 1 = 6ts + 4ss$. {$t = 6s + r$. ($6sr + rr + 1 = 4ss$.
{$s = r + q$. ($3rr + 1 = 2rq + 4qq$. {$r = q + p$. ($4qp + 3pp + 1 = 3qq$.
{$p = 1$. $q = 2$. $r = 3$. $s = 5$. $t = 33$. $v = 38$. $x = 71$. $y = 109$. $z = 180$.
{$13zz + 1 = mm = 421201$. $m = 649$. &c.

Second exemple.

Le même Auteur suivant cette méthode, trouve en rétrogradant toutes ces valeurs successives pour le quarré entier $109zz + 1$, qui doit comprendre jusques à 29 chiffres.

$b = 1$. $c = 2b = 2$. $d = 4c + b = 9$. $e = 3d - c = 25$. $f = 5e + d = 134$.
$g = 7f - e = 913$. $h = 7g + f = 6525$. $i = 5h - g = 31712$.
$k = 3i + h = 101661$. $l = 4k - i = 374932$. $m = 2l + k = 851525$.
$n = 20m + l = 17405432$. $o = 2n + m = 35662389$. $p = 40 + n = 1600054988$.
$q = 3p - o = 4444502575$. $r = 5q + p = 23825678863$.
$s = 7r - q = 162334724466$. $t = 7s + r = 1160168751125$.
$v = 5t - s = 5638509031159$. $x = 3v + t = 18075695846602$.
$y = 4x - v = 66664274354249$. $z = 2y + x = 151404244555100$.

Troisieme exemple.

Et il trouve aussi pour $149zz + 1$ que la valeur de z est 2113761020, & que le quarré entier $149zz + 1$ est 665729861801044619601, dont le côté est 25801741449.

RESOLUTION INFINIE.

Et lors qu'on aura trouvé ou par cette méthode, ou par la précédente, ou en quelqu'autre maniére que ce puisse être, une résolution, elle servira en cette sorte pour en trouver un autre. Si le nombre a non quarré est entier, & que le nombre $azz + 1$ soit un quarré entier yy; le nombre $4azzyy + 1$ sera encore un quarré entier xx, comme il est aisé de le démontrer en mettant pour z & pour y leurs valeurs dans la premiére résolution que nous avons formée. Et on trouvera de la même sorte que le nouveau nombre $16azzyyxx + 1$ sera encore un quarré entier vv. Et ainsi de suite jusques à l'infini.

NOUVEAUX

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE HUITIEME.

DE L'ANALYSE COMPOSE'E EN GENERAL.

OU DE LA RESOLUTION EN GENERAL DES PROBLEMES ET DES EGALITEZ DE PLUSIEURS DEGREZ.

AXIOME GENERAL, OU PREMIER PRINCIPE ET DEFINITION *Des égalitez du second degré.*

1. *Deux grandeurs étant proposées ; le quarré de celle qu'on voudra moins le même quarré, moins encore le plan de ces deux grandeurs plus ce même plan, est au juste égal à zéro ou ne donne rien.*

Pour donner une expression abbrégée de cet axiôme général, si a & b sont les deux grandeurs qu'on propose ; on prendra une inconnuë z, pour dénommer indifferemment l'une ou l'autre de ces deux grandeurs, & pour marquer cette mutuation réciproque qu'elles font entr'elles, & qu'on vient d'énoncer. Et alors au lieu de dire : le quarré de celle qu'on voudra des grandeurs a & b ; on écrira ou on dira simplement zz. Et ensuitte au lieu de dire : moins le même quarré de la grandeur a ou de la grandeur b, moins encore le plan de ces deux grandeurs ; on écrira ou on dira simplement — az — bz. Car z marquant indifféremment l'une ou l'autre, la grandeur a ou b ſera multipliée néceſſairement par ſoi-même & par l'autre. De ſorte que l'expreſſion — az — bz ſignifiera moins le quarré de celle qu'on voudra des deux, moins encore le plan de l'une par l'autre. Et enfin on ajoûtera ce même plan ab. Et toute cette expreſſion ſenſible $zz - az - bz + ab \propto 0$ ſera l'expreſſion abbrégée de l'axiome.

Et cela même paroîtra viſiblement aux yeux ; puiſque ſi on met a pour z dans l'expreſſion ou dans l'égalité $zz - az - bz + ab \propto 0$; elle ſera transformée en celle-ci $aa - aa - ba + ab \propto 0$, où les parties ſe détruiſent les unes les autres. Et ſi on met b pour z dans la même égalité $zz - az - bz + ab \propto 0$; elle ſera transformée en cette autre $bb - ab - bb + ab \propto 0$, où les parties ſe détruiſent encore.

COROLLAIRE.

2. Cette égalité $zz - az - bz + ab \propto 0$ eſt la même qu'on auroit formée, en multipliant la ſimple $z - a \propto 0$ par la ſimple $z - b \propto 0$. D'où il eſt évident que les deux grandeurs a & b ſont telles, que tout ce qui eſt énoncé dans l'axiome précédent, leur doit parfaitement convenir.

AXIOME GENERAL
OU PREMIER PRINCIPE ET DEFINITION
DES EGALITEZ DU TROISIEME DEGRÉ.

3. *Trois égalitez étant propoſées ; le cube de celle qu'on voudra des trois moins ce même cube, moins encore les ſolides du quarré de la grandeur que l'on aura priſe par chacune des deux autres, plus ces mêmes ſolides, plus un ſolide des trois, moins ce même ſolide, eſt au juſte égal à zéro ou ne donne rien.*

Pour exprimer cet axiome général d'une maniére abbrégée, ſi les grandeurs propoſées ſont les trois a, b, c ; on prendra une inconnuë z pour dénommer indifféremment celle qu'on voudra des trois a, b, c. Et alors au lieu de dire ou d'écrire : le cube de celle qu'on voudra des grandeurs a, b, c ; on dira ou on écrira ſimplement le cube z^3. Et enſuitte, au lieu de dire ou d'écrire : moins le même cube, moins les ſolides du quarré de la grandeur que l'on aura priſe par les deux qui reſtent ; on dira ou on écrira — azz — bzz — czz, parceque z marquant indifféremment celle qu'on voudra des trois, le quarré zz de celle qu'on aura priſe, ſera multiplié par la même grandeur, & de plus par les deux autres. Et aprés cela, au lieu de dire ou d'écrire : plus les deux ſolides du quarré de la grandeur, qu'on aura voulu prendre, par les deux qui reſtent, plus encore le ſolide des trois ; on dira ou on écrira + abz + acz + bcz, parceque z étant multipliée par les plans alternatifs ab, ac, bc, des grandeurs propoſées a, b, c ; le quarré de celle que z répréſente, ſe trouvera multiplié par chacune des deux grandeurs qui reſtent, & cette grandeur que

z répréſente ſe trouvera encore multipliée par le plan des deux autres. Et enfin au lieu de dire ou d'écrire : moins le même ſolide des trois que l'on propoſe ; on dira ou on écrira $-abc$. Et l'expreſſion ſenſible $z^3 - azz - bzz - czz + abz + acz + bcz - abc \propto 0$ exprimera d'une maniére abbrégée tout ce que l'axiôme énonce avec plus d'étenduë.

Et cela ſera ſenſible, ſi on met pour z dans la même expreſſion chacune des grandeurs a, b, c ; parceque cette expreſſion ou cette égalité ſera transformée dans une autre, où toutes les parties s'effaceront par des ſignes contraires, comme on l'obſerve ici.

Expreſſion de l'axiome. *1ere équivalente.*

$$\left\{\begin{array}{l} \quad -azz + abz \\ z^3 - bzz + acz - abc \propto 0. \\ \quad -czz + bcz \end{array}\right. \quad \{ z \propto a. \quad \left\{\begin{array}{l} \quad -a^3 + aba \\ a^3 - baa + aca - abc \propto 0. \\ \quad -caa + bca \end{array}\right.$$

2e équivalente. *3e équivalente.*

$$z \propto b. \left\{\begin{array}{l} \quad -abb + abb \\ b^3 - b^3 + acb - abc \propto 0. \\ \quad -cbb + bcb \end{array}\right. \quad \{ z \propto c. \left\{\begin{array}{l} \quad -acc + abc \\ c^3 - bcc + acc - abc \propto 0. \\ \quad -c^3 + bcc \end{array}\right.$$

COROLLAIRE.

4. L'Egalité précédente $\begin{array}{l} \quad -azz + abz \\ z^3 - bzz + acz - abc \\ \quad -czz + bcz \end{array} \propto 0$ eſt la même qu'on auroit formée, en multipliant l'égalité plane $zz \begin{array}{l} -az \\ -bz \end{array} + ab \propto 0$ par l'égalité ſimple ou linéaire $z - c \propto 0$; ou la même qu'auroit pû former le ſolide des trois ſimples $z - a \propto 0$, $z - b \propto 0$, $z - c \propto 0$; ou encore la même qu'auroit pû former le produit de la plane $zz \begin{array}{l} -az \\ -cz \end{array} + ac \propto 0$ par la ſimple $z - b \propto 0$; ou celuy de la plane $zz \begin{array}{l} -bc \\ -cz \end{array} + bc \propto 0$ par la ſimple $z - a \propto 0$. Et les trois grandeurs a, b, c, ſont telles que tout ce qui eſt énoncé dans l'axiome, convient parfaitement à chacune.

AXIOME GENERAL,

OU PREMIER PRINCIPE ET DEFINITION

DES EGALITEZ DU QUATRIEME DEGRE'.

5. *QUatre grandeurs étant propoſées ; la quatriéme puiſſance de celle qu'on voudra, moins la même puiſſance, moins les ſurſolides de ſon cube par les grandeurs qui reſtent, plus les mêmes ſurſolides, plus les nouveaux ſurſolides du quarré de la même grandeur par les plans alternatifs des trois autres, moins ces trois ſurſolides, moins un ſurſolide des quatre grandeurs, plus ce même ſurſolide, eſt au juſte égal à zéro.*

Pour exprimer cet axiome général, on nommera a, b, c, d, les quatre grandeurs qu'on propose. Et une inconnuë z exprimera indifféremment celle qu'on voudra de ces quatre grandeurs. Et tout le discours énoncé dans l'axiome sera au juste exprimé dans l'égalité

$$z^4 \begin{array}{l} \\ -az^3 \\ -bz^3 \\ -cz^3 \\ -dz^3 \\ \end{array} \begin{array}{l} +abzz \\ +aczz \\ +adzz \\ +bczz \\ +bdzz \\ +cdzz \end{array} \begin{array}{l} \\ -abcz \\ -abdz \\ -acdz \\ -bcdz \\ \end{array} +abcd \propto 0$$

Et cela sera sensible, si on met dans la même égalité chacune des grandeurs a, b, c, d, pour z; parcequ'elle sera transformée dans une autre égalité, où toutes les parties s'effaceront par des signes contraires. Ce qu'il est aisé d'observer ici.

Premiére équivalente.

$$\left\{ a^4 \begin{array}{l} \\ -a^4 \\ -ba^3 \\ -ca^3 \\ -da^3 \\ \end{array} \begin{array}{l} +abaa \\ +acaa \\ +adaa \\ +bcaa \\ +bdaa \\ +cdaa \end{array} \begin{array}{l} \\ -abca \\ -abda \\ -acda \\ -bcda \\ \end{array} \right. +abcd \propto 0.$$

Seconde équivalente.

$$\left\{ b^4 \begin{array}{l} \\ -ab^3 \\ -b^4 \\ -cb^3 \\ -db^3 \\ \end{array} \begin{array}{l} +ab^3 \\ +acbb \\ +adbb \\ +bcbb \\ +bdbb \\ +cdbb \end{array} \begin{array}{l} \\ -abcb \\ -abdb \\ -acdb \\ -bcdb \\ \end{array} \right. +abcd \propto 0.$$

Troisiéme équivalente.

$$\left\{ c^4 \begin{array}{l} \\ -ac^3 \\ -bc^3 \\ -c^4 \\ -dc^3 \\ \end{array} \begin{array}{l} +abcc \\ +ac^3 \\ +adcc \\ +bc^3 \\ +bdcc \\ +cdcc \end{array} \begin{array}{l} \\ -abcc \\ -abdc \\ -acdc \\ -bcdc \\ \end{array} \right. +abcd \propto 0.$$

Quatriéme équivalente.

$$\left\{ d^4 \begin{array}{l} \\ -ad^3 \\ -bd^3 \\ -cd^3 \\ -d^4 \\ \end{array} \begin{array}{l} +abdd \\ +acdd \\ +ad^3 \\ +bcdd \\ +bd^3 \\ +cd^3 \end{array} \begin{array}{l} \\ -abcd \\ -abdd \\ -acdd \\ -bcdd \\ \end{array} \right. +abcd \propto 0.$$

COROLLAIRE.

6. L'Egalité ou l'expression que l'on vient de former, est la même qu'on auroit formée en multipliant l'égalité solide $z^3 \begin{array}{l} -azz \\ -bzz \\ -czz \end{array} \begin{array}{l} +abz \\ +acz \\ +bcz \end{array} -abc \propto 0$ par la simple $z - d \propto 0$; ou la même qu'auroit formé le sursolide des quatre égalitez simples $z - a \propto 0$, $z - b \propto 0$, $z - c \propto 0$, $z - d \propto 0$; ou le produit des deux planes $zz \begin{array}{l} -az \\ -bz \end{array} +ab \propto 0$ & $zz \begin{array}{l} -cz \\ -dz \end{array} +cd \propto 0$. Et les grandeurs a, b, c, d, sont telles, que tout ce qui est énoncé dans l'axiome convient parfaitement à chacune.

I COROLLAIRE GENERAL.

Pour former la Table des egalitez.

1ere Table des égalitez.

7. Si l'expression ou l'égalité précédente est multipliée par l'égalité simple ou linéaire $z - e$; le produit sera l'expression d'un nou-

veau principe des égalitez du cinquiéme degré. Et ainsi de suitte jusques à l'infini.

$$\text{Principe du } 5^e \text{ degré.} \left\{ z^5 \begin{array}{l} -az^4 \\ -bz^4 \\ -cz^4 \\ -dz^4 \\ -ez^4 \end{array} \begin{array}{l} +abz^3 \\ +acz^3 \\ +adz^3 \\ +aez^3 \\ +bcz^3 \\ +bdz^3 \\ +bez^3 \\ +cdz^3 \\ +cez^3 \\ +dez^3 \end{array} \begin{array}{l} -abczz \\ -abdzz \\ -abezz \\ -acdzz \\ -acezz \\ -adezz \\ -bcdzz \\ -bcezz \\ -bdezz \\ -cdezz \end{array} \begin{array}{l} +abcdz \\ +abcez \\ +abdez \\ +acdez \\ +bcdez \end{array} -abcde \propto 0. \right.$$

Lorsqu'on veut disposer par ordre tous les termes d'une égalité, on écrit une seule fois dans chaque terme le degré de l'inconnuë qui est propre à ce terme.

Par éxemple on écrit $1z^3 \begin{array}{l} -a \\ -b \\ -c \end{array} zz \begin{array}{l} +ab \\ +ac \\ +bc \end{array} z - abc \propto 0$ pour $1z^3 \begin{array}{l} -azz \\ -bzz \\ -czz \end{array} \begin{array}{l} +abz \\ +acz \\ +bcz \end{array} -abc \propto 0.$

La premiére Table, que nous avons nommée Table des égalitez, renferme dans ses rangs paralléles, les divers axiômes dont on vient d'exposer les idées: au premier $1a$, l'expression d'une grandeur absoluë qui n'est comparée qu'avec elle-même; & au second l'expression $z - a \propto 0$ des égalitez linéaires ou simples, où l'inconnu z est tout au premier terme sans aucun mélange du connu, & le connu a entiérement au second sans aucun mélange de l'inconnu. Et le troisiéme rang renferme dans ses trois cellules les trois termes de l'égalité $zz \begin{array}{l} -az \\ -bz \end{array} +ab \propto 0$ du second degré. Et le quatriéme dans ses quatre cellules les quatre termes de l'égalité du troisiéme degré. Et ainsi du reste. Et cette Table peut être continuée jusques où l'on voudra.

DEFINITIONS.

8. Chacune des valeurs de l'inconnuë z ou chacune des grandeurs qui luy peuvent être égales dans une égalité de plusieurs degrez, est nommée *racine* de cette égalité; comme les grandeurs a, b, c, dans les égalitez précédentes. Et les racines sont *vraies* ou *réelles*, lorsqu'elles sont positives, ou surpassent zéro; & *fausses* ou *négatives*, lorsqu'elles sont moindres que zéro; & *absurdes* ou *imaginaires*, lorsqu'elles supposent des contradictions ou des absurditez.

DES RACINES FAUSSES.

9. Toute égalité linéaire $z - a \propto 0$, ou $z \propto a$, marque que la valeur a connuë de l'inconnuë z est une vraie racine. Et toute égalité linéaire $z + b \propto 0$, ou $z \propto -b$ signifie au contraire que la valeur négative $-b$ de l'inconnuë z est une racine fausse. De sorte que l'éga-

lité plane $zz - az + bz - ab \propto 0$, que forme le produit des deux linéaires $z - a \propto 0$ & $z + b \propto 0$, doit avoir deux racines ; une vraie qui est a, & une autre fausse qui est $-b$. Et les égalitez plus élévées peuvent avoir de la même sorte diverses racines, les unes vraies, & les autres fausses, lorsque les simples qui les forment, ont leurs inconnuës plus grandes ou plus petites que zéro. Et même si chacune des valeurs de l'inconnuë est moindre que zéro dans toutes les égalitez linéaires; la composée n'aura que des racines fausses. C'est ce qu'on peut aisément reconnoître dans la Table des égalitez, en y changeant tous les signes — en +.

Egalitez linéaires.	*La plane qu'elles forment.*
$z - a \propto 0.\ z + b \propto 0.$	$zz - az + bz - ab \propto 0.$
$z - 5 \propto 0.\ z + 3 \propto 0.$	$zz \quad - 2z - 15 \propto 0.$

Equivalentes de l'égalité plane.

$z \propto a.$	$aa - aa + ba - ab \propto 0.$	$z \propto -b.$	$bb + ab - bb - ab \propto 0.$
$z \propto 5.$	$25 \quad - 10 \quad - 15 \propto 0.$	$z \propto -3.$	$9 \quad + 6 \quad - 15 \propto 0.$

II COROLLAIRE GENERAL.

10. DAns chaque rang de la Table des égalitez, où la premiére cellule ne renferme rien de connu que la seule unité ; la seconde cellule comprend toûjours une somme connuë de toutes les racines, & la troisiéme une somme connuë de tous leurs plans alternatifs, & la quatriéme de tous les sursolides alternatifs. Et ainsi des autres, lorsqu'il y a un plus grand nombre de cellules. Et si les racines sont toutes égales ; la Table des égalitez sera la Table même des puissances.

III COROLLAIRE.

b. 9. 11. SI toutes les racines d'une égalité composée sont vraies ; leur somme au [b] second terme aura le signe —. Et aucune n'en sera retranchée par un signe contraire.

Egalitez linéaires. $z - 3 \propto 0.\ z - 1 \propto 0.\ z - 2 \propto 0.\ z - 4 \propto 0.\ z - 6 \propto 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^5 - 16z^4 + 95z^3 - 260zz + 324z - 144 \propto 0.$
Second terme $- 16z^4$. *Somme des vraies racines.* $16 \propto 3 + 1 + 2 + 4 + 6.$

Et si elles sont toutes fausses ; leur somme aura le signe +. Et aucune n'y sera retranchée par le signe —.

Egalitez linéaires. $z + 3 \propto 0.\ z + 1 \propto 0.\ z + 2 \propto 0.\ z + 4 \propto 0.\ z + 6 \propto 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^5 + 16z^4 + 95z^3 + 260zz + 324z + 144 \propto 0.$
Second terme $+ 16z^4$. *Somme des racines fausses.* $- 3 - 1 - 2 - 4 - 6 \propto - 16.$

Et si les unes sont vraies, & les autres fausses ; & que la somme des vraies soit égale à la somme des fausses ; leur somme au second terme sera nulle. De sorte que ce terme sera évanoüi ou nul.

Egalitez linéaires. $z - 3 \infty 0.\ z - 1 \infty 0.\ z - 4 \infty 0.\ z + 2 \infty 0.\ z + 6 \infty 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^5 * - 33z^3 + 44zz + 132z - 144 \infty 0.$
Second terme $* \infty 0z^4$. {*Somme des racines.* $+3 + 1 + 4 - 2 - 6 \infty 0.$

Et si toutes les vraies sont plus grandes ensemble que toutes les fausses; leur somme au second terme aura le signe —.

Egalitez linéaires. $z - 3 \infty 0.\ z - 2 \infty 0.\ z + 1 \infty 0.\ z - 4 \infty 0.\ z + 6 \infty 0.$
Egalité formée de leur produit. $z - 2z^4 - 31z^3 + 104zz - 12z - 144 \infty 0.$
Second terme $- 2z^4$. {*Somme des racines.* $3 + 2 + 4 - 1 - 6 \infty 2.$

Mais elle aura le signe +, si les vraies sont moindres ensemble que toutes les fausses.

Egalitez linéaires. $z + 3 \infty 0.\ z + 2 \infty 0.\ z + 4 \infty 0.\ z - 1 \infty 0.\ z - 6 \infty 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^5 + 2z^4 - 31z^3 - 104zz - 12z + 144 \infty 0.$
Second terme $+ 2z^4$. {*Sommes des racines.* $- 3 - 2 - 4 + 1 + 6 \infty - 2.$

IV COROLLAIRE.

12. SI les signes + & — sont changez au second terme d'une égalité, & ensuitte au quatriéme, & au sixiéme, & dans tous les autres dont le nombre est pair; les vraies racines de l'égalité seront changées en fausses; & les fausses en vraies. C'est une suitte naturelle de la multiplication des égalitez simples, dont le produit forme les égalitez composées. Car l'inconnuë z, qui a toûjours +, & chacune des racines réelles, qui a toûjours —, multipliant alternativement une troisiéme grandeur, distribuent nécessairement aux termes de l'égalité composée un alternatif des signes + & —. Et au contraire, l'inconnuë z qui a toûjours +, & chacune des fausses racines, qui a le même signe +, multipliant alternativement une troisiéme grandeur; elles distribuent deux fois de suitte dans les termes de l'égalité composée, un même signe +, si la grandeur multipliée a +; ou un même signe —, si cette grandeur a le signe —.

Exemple.

Egalitez simples. $z - 2 \infty 0.\ z - 3 \infty 0.\ z - 4 \infty 0.\ z + 5 \infty 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^4 - 4z^3 - 19zz + 106z - 120 \infty 0.$

Egalitez simples. $z + 2 \infty 0.\ z + 3 \infty 0.\ z + 4 \infty 0.\ z - 5 \infty 0.$
Egalité formée de leur produit. $z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 \infty 0.$

DES RACINES ABSURDES OU IMAGINAIRES.

13. LA contradiction ou l'absurdité de ces racines qu'on nomme imaginaires, consiste en ce qu'elles ne peuvent être ni vraies ni fausses, & qu'elles supposent qu'on puisse tirer une racine quarrée d'une grandeur négative; ou ce qui revient au même, en ce qu'elles supposent

qu'une grandeur multipliée par elle-même peut fournir un produit négatif. Ce qui ne peut [b] jamais être. Et pour concevoir encore plus distinctement la cause des absurditez ; il suffit de s'imaginer que telle égalité plane $zz - az + b \propto 0$, ou $zz \propto az - b$, qu'on voudra proposer,

b. 1ere partie. 7. 3.

c. 17. 1. renferme [c] deux racines ou deux valeurs de z; l'une $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$, & l'autre $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$. De sorte que si $\frac{1}{4}aa$ surpasse b; ces deux racines sont réelles. Mais si b surpasse $\frac{1}{4}aa$; elles sont imaginaires, puisque la partie $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$ comprend sous le signe $\sqrt{}$ une grandeur qui vaut moins que rien. De sorte que le quarré $\frac{1}{4}aa - b$ suppose une absurdité manifeste, nulle grandeur réelle ou négative multipliée par soi-même ne pouvant former un quarré négatif. Et de plus, on ne peut jamais trouver deux égalitez simples, où les valeurs des inconnuës, soient réelles ou fausses, dont le produit puisse former l'égalité plane $zz - az + b \propto 0$, où

d. 10. $\frac{1}{4}aa$ est moindre que b. Car a seroit [d] la somme des deux valeurs de z, & b seroit [d] leur plan. Et par conséquent le quarré $\frac{1}{4}aa$ de la moitié $\frac{1}{2}a$ de la somme $1a$ surpasseroit le plan b de ces mêmes valeurs. Ce qui renver-

e. 15. 1. seroit [e] la supposition. Et on ne doit pas s'étonner au reste de ces absurditez, puisqu'il peut arriver dans une infinité de diverses rencontres, qu'on éxige ou qu'on cherche certains rapports entre les nombres & entre les grandeurs, qu'on ne peut jamais y découvrir & qui n'y peuvent être.

Il est vrai qu'à proprement parler, les racines fausses doivent passer pour imaginaires, pour le moins lorsqu'elles ne peuvent remplir entiérement toutes les conditions du problême; parcequ'on suppose alors des absurditez. Par éxemple, si on demande deux nombres, dont la différence soit 12, & tels que la différence des quarrez soit 96. On nommera le plus grand z, & le moindre y. Et on formera la premiére égalité $z - y \propto 12$. Ou $z \propto 12 + 1y$. Et la seconde $zz - yy \propto 96$. Ou $zz \propto 96 + yy$. Et $z \propto \sqrt{96 + yy} \propto 12 + 1y$. Et $96 + yy \propto 144 + 24y + yy$. Et $96 \propto 144 + 24y$. Et divisant par 24, on aura l'égalité $4 \propto 6 + 1y$. Ou $1y \propto - 2$. Et $z \propto 12 + 1y \propto 10$. De sorte que la grandeur négative $1y$ ou -2 suppose une absurdité, & marque qu'il est absolument impossible de trouver deux nombres réels, tels que leur différence soit 12, & que celle des quarrez soit 96. Au contraire comme la différence $z - y$ ou $10 + 2$ est une somme des nombres 10 & 2, & non pas une différence ; la résolution négative de la question qu'on vient de proposer, satisfait positivement pour une autre, où on demanderoit deux nombres, tels que leur somme fust 12, & que la différence des quarrez fût 96. Car le plus grand z seroit 10, & le moindre y seroit le nombre positif 2.

Ainsi

Ainsi l'absurdité des racines fausses consiste en ce qu'elles substituent des soustractions véritables à la place des additions réelles qu'on veut supposer, & des additions positives à la place des soustractions. Ou ce qui revient au même, cette absurdité des racines fausses consiste au changement qu'elles font d'un problême réel dans une autre où il y a quelque cas différent. Et c'est apparemment pour cette raison que Monsieur Descartes nomme *réelles* aussi bien les racines fausses que les racines vraies, & qu'il a voulu les distinguer des imaginaires, qui supposent un quarré négatif. Mais quoique les Sçavans se soient accordez à donner comme luy le nom de réelles aux racines fausses & aux grandeurs fausses, je n'ai pas crû les devoir toûjours imiter ; & je n'ai attribué ordinairement le nom de réelles qu'aux grandeurs positives ou vraies, pour mieux conserver la propriété du langage commun, qui ne nomme point réel ce qui vaut moins que rien.

Les absurditez des racines fausses peuvent être considérées comme simples ou linéaires, & les autres comme planes ou du second degré. La racine y ou -2 de la question précédente est une racine imaginaire linéaire ou simple. Mais $\sqrt{-6}$ est une imaginaire, dont la contradiction est plane, parcequ'il faut tirer une racine d'un quarré négatif -16. Et en effet, si on demande deux nombres z & y, tels que leur somme $z+y$ soit 12, & que la somme des quarrez soit 20 ; la premiére égalité $z+y \propto 12$ fournira une valeur $z \propto 12-y$. Et la seconde $zz+yy \propto 20$, ou $zz \propto 20-yy$ en fournira une autre $z \propto \sqrt{20-yy} \propto 12-y$. Et quarrant chaque membre, on aura cette autre égalité $40-yy \propto 144 - 24y + yy$. Ou $24y - 104 \propto 2yy$. Et $1yy \propto 12y - 52$. D'où on tire [b] une valeur $y \propto 6 + \sqrt{-16}$, & une autre $y \propto 6 - \sqrt{-16}$. Et ces racines sont deux imaginaires, où les contradictions sont planes. Car l'égalité plane $yy \propto 12y - 52$, ou $yy - 12y + 52 \propto 0$, comprend déja deux racines, dont la somme [c] est $+12$, & le plan $+52$. Mais cela suppose évidemment une contradiction plane, puisque le plan 52 de deux nombres ne doit jamais surpasser le quarré 36 de la moitié de leur somme 12. Ainsi la partie imaginaire $\sqrt{-16}$ est une contradiction compliquée qui en comprend deux autres ; la premiére est l'excez 16, dont le plan 52 des nombres supposez surpasse le quarré 36 de leur demie-somme 12 ; & la seconde est qu'on veut encore tirer la racine quarrée du nombre négatif -16.

b. 17. 1.

c. 10.

V COROLLAIRE ET PROBLEME I.

14. *Pour tenter la résolution d'une égalité composée ; ou pour chercher une ou plusieurs grandeurs, qui puissent satisfaire au problême qu'elle exprime ; lorsqu'elle est toute commensurable & sans fraction.*

D'abord on pourra feindre ou s'imaginer que l'égalité proposée renferme autant de racines qu'elle a de dimensions ; & qu'entre ces racines il y en a autant de vraies, qu'il y a de variations des signes + & — dans les termes ; & autant de fausses, qu'on y trouve de fois deux mêmes signes +, ou deux mêmes signes —, qui s'entre-suivent immédiatement. Et pour trouver quelqu'une des racines ; on cherchera [b] tous les diviseurs du dernier terme, & on verra successivement si l'inconnuë plus ou moins l'un de ces diviseurs peut diviser au juste ou sans reste l'égalité proposée. Que si quelqu'une de ces divisions se peut faire sans reste ; l'égalité linéaire qui l'aura pû faire, fournira une des racines de l'égalité composée. Et cette égalité s'abbaissera d'un degré. Mais si nulle des divisions ne peut être sans reste ; on pourra s'assurer que nulle des racines de l'égalité composée n'est commensurable. Divers éxemples éclairciront & fixeront ces régles.

b. 1ere partie. 30 & 32. 6.

Premier exemple.

Pour résoudre l'égalité composée $z^3 - 8zz - 124z - 64 \propto 0$. On chercheraᵇ tous les diviseurs 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, du dernier terme 64. Et on verra ensuitte si l'égalité qu'on propose, peut être au juste divisée par quelqu'une des égalitez linéaires $z - 1 \propto 0$, $z + 1 \propto 0$, $z - 2 \propto 0$, $z + 2 \propto 0$, $z - 4 \propto 0$, $z + 4 \propto 0$, $z - 16 \propto 0$. Et parceque la division se peut faire sans reste par l'égalité supposée $z - 16 \propto 0$; on ne passera pas plus loin. Et $z - 16 \propto 0$ marquera que 16 est une vraie racine ou une valeur positive de z dans l'égalité proposée. Et l'exposant $zz + 8z + 4 \propto 0$ renferme les deux autres fausses $z \propto -4 + \sqrt{12}$ & $z \propto -4 - \sqrt{12}$. De sorte qu'on a la résolution pleine & entiére qu'on vouloit découvrir.

b. 1ere partie. 30. 6.

Second exemple.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité $z^4 - 3z^3 + 1zz + 3z - 2 \propto 0$. On prendra les deux diviseurs 1 & 2 du dernier terme 2. Et on verra si l'égalité qu'on propose peut être divisée sans reste par une linéaire $z - 1 \propto 0$. Et parceque la division est juste ; l'égalité $z - 1 \propto 0$ fournira une vraie racine 1 de l'égalité qu'on vouloit résoudre. Et l'exposant $z^3 - 2zz - 1z + 2 \propto 0$ étant divisé de la même sorte par $z - 2 \propto 0$ donnera encore une vraie racine 2 de l'égalité proposée. Et l'exposant nouveau $zz - 1 \propto 0$ comprendra les deux autres racines $z \propto 1$, & $z \propto -1$; parcequ'on le peut diviser par une égalité linéaire $z - 1 \propto 0$, & que l'exposant est $z + 1 \propto 0$. De sorte que l'égalité proposée est pleinement résoluë.

Troisieme exemple.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité $z^4 - 4z^3 - 19zz + 106z - 120 \propto 0$. On prendra [b] tous les diviseurs du dernier terme 120. Et on verra ensuitte si l'égalité peut être divisée sans reste par une simple $z - 1 \propto 0$, ou $z - 2 \propto 0$. Et parceque la division est juste par $z - 2 \propto 0$, on aura déja une vraie racine 2. Et l'exposant $z^3 - 2zz - 23z + 60 \propto 0$ étant divisé de la même sorte par $z - 3 \propto 0$ fournira encore une vraie racine 3. Et l'exposant nouveau $zz + 1z - 20 \propto 0$ aura deux autres [c] racines, la

b. 1ere partie. 30. 6.

c. 15. 1.

SEPTIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^3 \begin{array}{l}-3czz\\ -2azz\\ +3bzz\end{array} \begin{array}{l}+abz\\ +6acz\\ -9bcz\end{array} \begin{array}{l}-2aab\\ +3abb\end{array} \propto 0$. On formera une égalité feinte $abz - 2aab + 3abb \propto 0$ de toutes les parties où ab se rencontre. Et on la divisera par ab; ce qui fournira une égalité linéaire $z - 2a + 3b \propto 0$. Comme donc la valeur $2a - 3b$ de z dans cette égalité supposée est au juste un diviseur du dernier terme $2aab - 3abb$; l'égalité proposée sera divisée par la simple $z - 2a + 3b \propto 0$. Et parceque la division est juste, on aura une racine $2a - 3b$ de la proposée. Et l'exposant $zz - 3cz + ab \propto 0$ comprendra les deux autres $\frac{3c}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}6c - ab}$ & $\frac{3c}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}cc - ab}$. Ces sortes de fictions servent à trouver d'une maniére plus courte les diviseurs du dernier terme qui peuvent être utiles, à l'exclusion des autres.

HUITIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'galité $z^3 \begin{array}{l}-2azz\\ -2bzz\end{array} \begin{array}{l}+60aaz\\ +70abz\end{array} \begin{array}{l}-120a^3\\ -132abb\end{array} \propto 0$. On pourra feindre une égalité $70abz - 132abb \propto 0$ des parties où ab se rencontre. Mais parce qu'on ne peut la diviser sans fraction par $70ab$; on feindra une autre égalité $60aaz - 120a^3 \propto 0$ des parties où aa se rencontre. Et la divisant par $60aa$, l'exposant sera $z - 2a \propto 0$. Et parceque 2 est diviseur du dernier terme; la proposée sera divisée par $z - 2a \propto 0$. Et comme la division est juste, on aura déja une vraie racine 2. Et l'exposant $zz - 2bz \begin{array}{l}+60aa\\ +66ab\end{array} \propto 0$ comprendra les deux autres $b + \sqrt{bb - 66ab - 60aa}$ & $b - \sqrt{bb - 66ab - 60aa}$. Mais ces racines seront imaginaires, si b vaut moins que $33a + \sqrt{1149aa}$. Et si b vaut plus, elles seront vraies.

NEUVIEME EXEMPLE.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité $z^4 \begin{array}{l}-2az^3\\ +bz^3\end{array} \begin{array}{l}+aazz\\ -abzz\end{array} + a^3z \begin{array}{l}-a^4\\ +a^3b\end{array} \propto 0$. On formera une égalité feinte $a^3z - a^4 + a^3b \propto 0$ des parties où a^3 se rencontre. Et la divisant par a^3, comme l'exposant est $z - a + b \propto 0$, où la valeur $a - b$ de z est un diviseur du dernier terme $a^4 - a^3b$; on divisera la proposée par l'égalité simple $z - a + b \propto 0$. Et la division qui est juste, donnera déja une racine $a - b$. Et l'exposant $z^3 - azz * + a^3 \propto 0$ comprendra les trois autres. Mais aucune de ces trois racines ne sera commensurable, puisque $z - a \propto 0$ & $z + a \propto 0$ ne peuvent diviser au juste l'exposant $z^3 - azz * + a^3 \propto 0$.

DIXIEME EXEMPLE.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité

$$\begin{array}{llll} & & -3aaz & \\ & -1zz\sqrt{zz+aa} & +2cz\sqrt{zz+aa} & -a\sqrt{3cc+aa}\,+aa\sqrt{zz+aa} \\ z^3 & -2czz & +az\sqrt{zz+aa} & +3aa\sqrt{3cc+aa} \\ & +2azz & +az\sqrt{3cc+aa} & \\ & & -6acz & \end{array} \propto 0,$$

on supposera une égalité feinte $az\sqrt{3cc+aa} - a\sqrt{3cc+aa}\sqrt{zz+aa} + 3aa\sqrt{3cc+aa} \propto 0$ des parties où $\sqrt{3cc+aa}$ se rencontre. Et la divisant par $a\sqrt{3cc+aa}$; comme l'exposant $z+3a-\sqrt{zz+aa} \propto 0$ comprend un diviseur $-3a+\sqrt{zz+aa}$ du dernier terme de la proposée; on divisera cette égalité par la simple $z+3a-\sqrt{zz+aa} \propto 0$. Et la division qui est juste, fournira une valeur $-3a+\sqrt{zz+aa}$ de l'inconnuë z. Et l'exposant $zz \begin{array}{l} -az \\ -2cz \end{array} + a\sqrt{3cc+aa}$ comprendra les deux [b] autres $c+\frac{1}{2}a+\sqrt{cc+ac+\frac{1}{4}aa-a\sqrt{3cc+aa}}$ & $c+\frac{1}{2}a-\sqrt{cc+ac+\frac{1}{4}aa-a\sqrt{3cc+aa}}$. Et ces deux valeurs de z sont entiérement connuës, au lieu que la premiére $-3a+\sqrt{zz+aa}$ comprend encore l'inconnu zz. Et si on vouloit dégager l'inconnu du connu dans cette égalité $z \propto -3a+\sqrt{zz+aa}$, on auroit par transposition $z+3a \propto \sqrt{zz+aa}$. Et quarrant de part & d'autre, on formeroit l'égalité $zz+6az+9aa \propto zz+aa$. Ou $6az \propto -8aa$. Et $z \propto -\frac{4a}{3}$. De sorte que l'égalité proposée est pleinement résoluë. b. 17. 1.

ONZIEME EXEMPLE.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité $z^3 \begin{array}{l} +bzz \\ -1zz\sqrt{ab+3bb} \end{array} + 2bz\sqrt{ab+3bb} \begin{array}{l} -6bb\sqrt{ab+3bb} \\ +18b^3 \end{array} \propto 0$. Comme on ne peut former une égalité feinte, où la valeur de z soit un des diviseurs $1, 2, 3, b, bb, 2b, 2bb, 3b, 3bb, 6b, 6bb, -3b+\sqrt{ab+3bb}$, &c, du dernier terme. On pourra diviser la proposée successivement par $z-b \propto 0$, par $z+b \propto 0$, &c, jusques à ce que la division soit juste ou sans reste; par exemple jusques à l'égalité simple $z+3b-\sqrt{ab+3bb} \propto 0$ qui fait la division sans reste, & qui fournit par conséquent une valeur $-3b+\sqrt{ab+3bb}$ de z. Et l'exposant $zz-2bz+6bb \propto 0$ comprend les deux autres qui sont imaginaires. On auroit pû feindre une égalité plane $-zz\sqrt{ab+3bb}+2bz\sqrt{ab+3bb}-6bb\sqrt{ab+3bb} \propto 0$ de toutes les parties où $\sqrt{ab+3bb}$ se rencontre, & la diviser ensuitte par $\sqrt{ab+3bb}$, & choisir l'exposant $-zz+2bz-6bb \propto 0$ ou $zz-2bz+6bb \propto 0$

pour diviser d'abord l'égalité proposée. Ce qui auroit fourni au juste l'exposant ou l'égalité simple $z + 3b - \sqrt{ab + 3bb} \propto 0$, qui ne se trouvoit pas si facilement, en parcourant tous les diviseurs du dernier terme. On pourra néanmoins remarquer qu'il suffit le plus souvent dans les égalitez littérales de parcourir les diviseurs linéaires.

Douzieme exemple.

Pour trouver une ou plusieurs des valeurs de l'inconnuë z dans l'égalité $z^4 - 6az^3 \begin{matrix} + 16aazz \\ + 4abzz \\ + 4aczz \\ + 4bczz \end{matrix} \begin{matrix} - 16aacz \\ - 8aabz \\ - 16abcz \\ - 16a^3z \end{matrix} \begin{matrix} + 16abbc \\ + 48aabc \\ + 32a^3c \end{matrix} \propto 0$. Comme on ne pourra feindre aucune linéaire qui la puisse diviser au juste & sans reste; il sera facile de conclurre que nulle de ses racines n'est commensurable. Et si on vouloit feindre une égalité $\begin{matrix} + 4bczz \\ + 4aczz \end{matrix} \begin{matrix} - 16abcz \\ - 16aacz \end{matrix} \begin{matrix} + 16abbc \\ + 48aabc \\ + 32a^3c \end{matrix} \propto 0$ des parties où c linéaire se rencontre. On la pourroit diviser ensuitte par $4ac + 4bc$ qui multiplie zz au premier terme, & voir ensuitte si l'exposant $zz - 4az \begin{matrix} + 4ab \\ + 8aa \end{matrix} \propto 0$ peut diviser au juste l'égalité qu'on vouloit résoudre. Et comme on trouve la division juste; on est certain que les deux racines imaginaires du diviseur $zz - 4az \begin{matrix} + 4ab \\ + 8aa \end{matrix} \propto 0$ sont deux racines imaginaires de la proposée. Et l'exposant ou l'égalité plane $zz - 2az \begin{matrix} + 4ac \\ + 4bc \end{matrix} \propto 0$ que fournit la division, renferme les deux autres racines, qui sont $a + \sqrt{aa - 4ac - 4bc}$ & $a - \sqrt{aa - 4ac - 4bc}$. Et ces racines seront encore imaginaires, si a vaut moins que $2c + 2\sqrt{cc + bc}$.

VI COROLLAIRE ET PROBLEME II.

15. *Pour trouver une racine, ou pour diminuer les degrez d'une égalité littérale, lorsqu'elle peut être un produit de deux égalitez, dont l'une renferme quelque grandeur qui n'est point dans l'autre.*

On supposera chaque lettre à son tour comme égale à zéro. Et on feindra une égalité de toutes les parties où la lettre qu'on prend ne se trouve point. Et alors on verra si l'égalité feinte & la proposée [b] peuvent avoir un diviseur commun. Ce qui reüssira toûjours. On peut souvent trouver la même chose avec moins de peine par des fictions semblables à celle des exemples précédens. Mais la régle qu'on expose ici a beaucoup plus d'étenduë.

b. 1ere *partie.* 39. 9.

Premier exemple.

Pour trouver quelques racines, ou pour diminuer les degrez de l'égalité $z^5 * \begin{array}{l} +4abz^3 \\ +bbz^3 \\ +\frac{a^4}{bb}z^3 \end{array} \begin{array}{l} +30b^3zz \\ -10abbzz \\ -\frac{2a^4}{b}zz. \end{array} \begin{array}{l} \\ +34ab^3z \\ +7a^4z \end{array} \begin{array}{l} \\ +20ab^4 \\ +10a^4b \end{array} \propto 0$. On pourra ſuppoſer une égalité feinte des parties où a ne ſe rencontre point, en la regardant comme nulle. Et cette égalité $z^5 * + bbz^3 + 30b^3zz \propto 0$ étant diviſée par zz donnera celle-ci $z^3 * + bbz + 30b^3 \propto 0$, qui ne peut diviſer la propoſée. Mais cherchant le plus grand diviſeur commun de cette égalité & de la propoſée; on trouvera [b] l'égalité plane $zz - 3bz + 10bb \propto$, qui donne d'une part l'expoſant $z + 3b \propto 0$, & de l'autre l'expoſant $z^3 + 3bzz \begin{array}{l} +4abz \\ +\frac{a^4}{bb}z \end{array} \begin{array}{l} +2abb \\ +\frac{a^4}{b} \end{array} \propto 0$. b. 1ere partie. 39. 9.

Et l'égalité plane $zz - 3bz + 10bb \propto 0$ renfermera deux racines imaginaires de la propoſée.

SECOND EXEMPLE PAR UNE VOIE PLUS COURTE.

Pour trouver quelques racines, ou pour diminuer les degrez de l'égalité $x^4 \begin{array}{l} -ax^3 \\ -\frac{1}{2}bx^3 \end{array} \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aaxx \\ +\frac{3}{2}abxx \\ -\frac{1}{4}bbxx \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{4}aabx \\ -\frac{1}{4}abbx \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{8}aabb \\ -\frac{1}{4}ab^3 \end{array} \propto 0$. On pourra feindre une égalité de toutes les parties où a linéaire ſe trouve. Mais parceque cette égalité $-ax^3 + \frac{3}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \propto 0$ étant diviſée par $-a$, donne $x^3 - \frac{3}{2}bxx + \frac{1}{4}bbx + \frac{1}{4}b^3 \propto 0$, qui ne peut diviſer au juſte la propoſée; on feindra une autre égalité de toutes les parties où le quarré aa ſe rencontre. On diviſera enſuitte cette égalité $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{8}aabb \propto 0$ par $\frac{1}{2}aa$. Et l'expoſant $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb \propto 0$ diviſant la propoſée ſans reſte, renfermera deux de ſes racines, l'une vraie $x \propto \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b\sqrt{5}$, & l'autre fauſſe $x \propto \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}b\sqrt{5}$. Et la diviſion fournira pour expoſant l'égalité plane $xx - ax \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aa \\ +ab \end{array} \propto 0$, qui comprend encore deux racines imaginaires de la propoſée.

PROBLEME III.

16. *Pour trouver encore par une autre voie le plus grand diviſeur commun de deux égalitez, ou même de deux grandeurs littérales.*

On prendra la valeur du premier terme de l'égalité, qui n'eſt pas la plus élevée. Et on ſubſtituëra cette valeur dans l'autre égalité autant qu'on le pourra. Ce qui fournira une troisiéme égalité, où l'on prendra de la même sorte la valeur du premier terme, pour le substituer par tout où l'on pourra dans l'égalité qui n'étoit pas la plus élevée. On formera par là une quatriéme égalité, où on prendra encore la valeur du premier terme, pour le substituer dans la troisiéme autant qu'on pourra. Et on réïtérera toûjours de semblables opérations, jusques à ce qu'on trouve enfin une égalité, où tous les termes se détruisent. Et celle alors qui l'aura précédée résoudra la question. Et si on proposoit deux grandeurs litterales; on supposeroit l'une & l'autre égale à zéro, & on observeroit ensuitte les régles du problême.

Premier exemple.

Pour trouver le plus grand diviseur commun des deux égalitez $z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 \propto 0$ & $z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 \propto 0$. On prendra dans la premiére une valeur du premier terme $z^4 \propto 4az^3 - 11aazz + 20a^3z - 12a^4$, & on substituëra cette même valeur à la place de z^4 dans la seconde égalité. Et la somme de cette égalité sera $az^3 + aazz + 4a^3z + 12a^4 \propto 0$, qui sera divisée par a. Et l'exposant fournira une troisiéme égalité $z^3 + azz + 4aaz + 12a^3 \propto 0$, où l'on prendra une valeur du premier terme $z^3 \propto - azz - 4aaz - 12a^3$. Et mettant par tout pour z^3 cette même valeur dans la premiére égalité $z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 \propto 0$, la somme de cette égalité sera $12aazz - 12a^3z + 72a^4 \propto 0$, qu'on aura soin de diviser par $12aa$, pour en tirer une quatriéme égalité $zz - az + 6aa \propto 0$. On prendra dans cette égalité la valeur du premier terme $zz \propto az - 6aa$, & mettant par tout pour zz sa valeur dans la troisiéme égalité $z^3 + azz + 4aaz + 12a^3 \propto 0$, la somme sera nulle, parceque les parties se détruiront toutes par des signes contraires. Et par conséquent l'égalité plane $zz - az + 6aa \propto 0$, qui a servi pour faire observer ces destructions, est le plus grand diviseur commun des deux égalitez qu'on avoit proposées.

Premiére égalité $1z^4 \propto 4az^3 - 11aazz + 20a^3z - 12a^4$.

Seconde égalité $1z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 \propto 0$.

Somme de la seconde égalité $1az^3 + 1aazz + 4a^3z + 12a^4 \propto 0$.

$$1z^3 + azz + 4aaz + 12a^3 \propto \frac{1az^3 + 1aazz + 4a^3z + 12a^4}{a} \propto 0.$$

Troisiéme égalité $1z^3 \propto - 1azz - 4aaz - 12a^3$.

Pour la premiére égalité
$$\left\{\begin{array}{rcl} 1z^4 & \propto & - 1az^3 - 4aazz - 12a^3z. \\ - 4az^3 & \propto & - 4az^3 \\ & - 8az^3 \propto & 5aazz + 20a^3z + 60a^4. \\ + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 & \propto & 11aazz - 20a^3z + 12a^4. \end{array}\right.$$

Somme $1z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 \propto 12aazz - 12a^3z + 72a^4 \propto 0$.

$$\textit{Plus grand diviseur commun } 1zz - az + 6aa \propto \frac{12aazz - 12a^3z + 72a^4}{12aa} \propto 0.$$

Quatriéme

$$\textit{Quatrième égalité } 1zz \propto 1az - 6aa.$$

$$\textit{Pour la troisiéme égalité}\begin{cases} 1z^3 \propto \cancel{1azz} - 6aaz \\ +1azz \propto \cancel{1azz} \\ \quad \cancel{2azz} \propto 2aaz - 12a^3 \\ +4aaz + 12a^3 \propto 4aaz + 12a^3 \end{cases}$$

$$\textit{Somme de la 3}^{e}\textit{ égalité } 1z^3 + 1azz + 4aaz + 12a^3 \propto * \quad * \propto 0.$$

SECOND EXEMPLE.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs $y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5$ & $y^3 + 4yy + 8y + 8$. On conſidérera l'une & l'autre comme égale à zéro. Et on prendra dans la ſeconde une valeur du premier terme $y^3 \propto -4yy - 8y - 8$. Et mettant pour y^3 ſa valeur dans la premiére autant qu'on le pourra ; la ſomme ſera $2yy + 6\frac{1}{2}y + 5 \propto 0$. Et on en tirera une valeur $yy \propto \frac{-13y - 10}{4}$. Et mettant cette valeur pour yy dans la ſeconde égalité $y^3 + 4yy + 8y + 8 \propto 0$; la ſomme ſera $\frac{49y + 98}{16} \propto 0$. Et l'ayant diviſée par $\frac{49}{16}$, l'expoſant ſera $y + 2 \propto 0$. Et on en tirera une valeur $y \propto -2$. Enfin on mettra -2 pour y dans la troiſiéme égalité $yy + \frac{13y + 10}{4}$. Et parceque la ſomme $\frac{26 - 26}{4}$ ſera nulle ; l'égalité feinte $y + 2 \propto 0$ ſera le plus grand diviſeur commun des grandeurs qu'on propoſe.

$$\textit{Seconde égalité } y^3 \propto -4yy - 8y - 8.$$

$$\textit{Premiére égalité } y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 \propto 0.$$

$$\textit{Pour la premiére égalité}\begin{cases} y^4 \propto -\cancel{4y^3} - 8yy - 8y - 8 \\ +4y^3 \propto +\cancel{4y^3} \\ \quad 0 \\ +10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 \propto +10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 \end{cases}$$

$$\textit{Somme } y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 \propto 2yy + 6\tfrac{1}{2}y + 5 \propto 0.$$

$$\textit{Troiſiéme égalité } 1yy \propto \frac{-13y - 10}{4}.$$

$$\textit{Pour la ſeconde égalité}\begin{cases} 1y^3 \propto \frac{-\cancel{13yy} - 10y}{4}. \\ +4yy \propto \frac{\cancel{16yy}}{4} \\ \quad \frac{\cancel{3yy}}{4} \propto \frac{-39y - 30}{16} \\ +8y + 8 \propto +8y + 8. \end{cases}$$

$$\textit{Somme } 1y^3 + 4yy + 8y + 8 \propto \frac{49y + 98}{16} \propto 0.$$

Quatriéme égalité $1y \propto -2$

Pour la 3^{e} *égalité* $\left\{\begin{array}{l} 1yy \propto +4 \\ +\frac{13y+10}{4} \propto -\frac{26+10}{4} \end{array}\right.$

Somme de la 3^{e} *égalité* $1yy + \frac{13y+10}{4} \propto \quad * \quad * \propto 0.$

Le plus grand diviſeur commun $1y + 2 \propto 0.$

DE QUELQUES REFLEXIONS
DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Sur une regle d'Analyse de Monsieur Descartes.

MEssieurs de l'Academie Royale des Sciences ayant éxaminé par occaſion vers l'année 1684 une régle de Monſieur Deſcartes parfaitement ſemblable à celle du premier problême ; on jugea à propos d'inſérer le réſultat de leur éxamen dans le Journal des Sçavans de la même année. Je croyois avoir appuyé cette régle dans mon ancien ouvrage par des raiſons ſolides, & n'en avoir tiré que des conſéquens juſtes & d'une entiére certitude. Mais puiſqu'un corps ſi celébre & d'un ſi grand poids, & pour qui j'ai toûjours conſervé une tres-grande eſtime, a jugé qu'il manquoit quelque choſe & à la régle même, & aux raiſons dont on avoit entrepris de la ſoûtenir ; il eſt juſte de faire quelque effort, pour éclaircir en ce lieu ce qu'il y a de plus fort dans ce qu'on nous oppoſe, & pour mettre dans un ſi grand jour la penſée & les ſentimens de Monſieur Deſcartes, qu'il ſoit difficile déſormais d'en douter, & de prendre le change. Je rapporterai auparavant l'éxamen entier de la régle dans les mêmes termes ſelon leſquels il a été conceu & tranſmis au Journal page 250, en 1684.

„ M. Deſcartes donne dans ſa Géométrie page 79. une régle pour con-
„ noître par la ſeule diſpoſition des ſignes + & —, combien de grandeurs
„ poſitives & de grandeurs retranchées peuvent être priſes pour la grandeur
„ inconnuë d'une égalité propoſée.

„ Les plus célébres Auteurs qui ont traitté aprés luy cette matiére, ont
„ ſuppoſé que cette régle étoit générale ; & quelques-uns mêmes ont en-
„ trepris non ſeulement de la ſoûtenir par des raiſons, mais encore en ont
„ tiré diverſes conſéquences.

„ Il ſeroit à ſoûhaitter que cette régle, qui eſt en effet tres-commode,
„ fût auſſi certaine que quantité d'autres que cet Auteur a données. Mais
„ le Sieur Rolle ayant eü occaſion de l'éxaminer, a obſervé qu'elle n'eſt pas
„ générale, & ayant communiqué ſes obſervations à Meſſieurs de l'Acade-
„ mie Royale des Sciences ; ces Meſſieurs ſont demeurez d'accord qu'il y a
„ pluſieurs cas, où elle ne ſe trouve pas véritable. Nous en donnerons ici

ſeulement deux éxemples, que nous avons choiſi entre beaucoup d'autres, parceque le calcul en eſt aiſé.

PREMIER EXEMPLE.

Les deux égalitez $z^3 - 2zz + 4z - 3 \propto 0$ & $z^3 + 1zz + 1z + 6 \propto 0$ étant réſoluës par la methode de M. Deſcartes mêmes; on trouve deux racines dans l'une, qui ſont égales à deux racines de l'autre. Or par la régle de cet Auteur l'ordre des ſignes qui regnent dans ces deux égalitez, marque trois racines vraies dans la premiére, & trois racines fauſſes dans la ſeconde. Donc la régle ſuppoſe dans cet éxemple qu'il y ait deux racines vraies égales à deux racines fauſſes, ce qui eſt impoſſible ſuivant la notion même que M. Deſcartes a donnée de ces racines.

SECOND EXEMPLE.

Si des deux égalitez $zz - 2z - 3 \propto 0$ & $zz + 1z + 6 \propto 0$ on forme par leur multiplication l'égalité $z^4 - 1z^3 + 1zz - 15z - 18 \propto 0$; les quatre racines de la produitte ſeront égales aux quatre racines des produiſantes, chacune à chacune. Mais par la régle de M. Deſcartes, l'arrangement des ſignes fait voir que les deux produiſantes enſemble ne renferment qu'une ſeule racine vraie, & que leur produitte n'a au contraire qu'une ſeule racine fauſſe. Donc la régle eſt fauſſe auſſi; car elle ſuppoſe qu'une même quantité ſoit & ne ſoit pas en même temps.

REPONSE AUX DIFFICULTEZ.

Les deux éxemples qu'on vient de rapporter ne peuvent rien conclurre contre Monſieur Deſcartes. Car les deux égalitez $z^3 - 2zz + 4z - 3 \propto 0$ & $z^3 + 1zz + 1z + 6 \propto 0$ étant diviſées l'une par $z - 1 \propto 0$, & l'autre par $z + 2 \propto 0$, le même expoſant $zz - 1z + 3 \propto 0$, qu'on trouve de part & d'autre, ne peut avoir aucune racine vraie, ni aucune fauſſe; mais ſeulement deux imaginaires. Et il en eſt de même de l'autre égalité $zz + 1z + 6 \propto 0$. Ce qui tombe dans le cas que Monſieur Deſcartes a tres-bien obſervé luy-même, lorſqu'aprés avoir parlé avec autant de juſteſſe que d'ordre, premiérement des racines vraies, & enſuitte des fauſſes, & des divers changemens qu'on peut faire ſur les unes & ſur les autres ſans qu'on les connoiſſe; il ajoûte cet article en termes formels.

Au reſte tant les vraies racines que les fauſſes ne ſont pas toûjours réelles; mais quelquesfois ſeulement imaginaires; c'eſt à dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquesfois aucune quantité, qui correſponde à celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puiſſe imaginer trois en celle-ci $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$; il n'y en a toutesfois qu'une réelle, qui eſt 2. Et pour les deux autres, quoi qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer; on ne ſçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

On pourra donc s'imaginer ou feindre, ſelon Monſieur Deſcartes & à ſon éxemple, trois racines vraies dans l'égalité $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, où il reconnoît qu'on n'en peut trouver qu'une; & trois vraies dans l'égalité $z^3 - 2zz + 4z - 3 \infty 0$, où l'on peut reconnoître auſſi qu'il ne s'en trouve qu'une; & trois fauſſes dans l'égalité $z^3 + 1zz + 1z + 6 \infty 0$, quoi qu'elle n'en ait qu'une; & une fauſſe & trois vraies dans l'égalité $z^4 - 1z^3 + 1zz - 15z - 18 \infty 0$, quoi qu'il n'y en ait qu'une fauſſe & une vraie. Car ces ſortes de fictions ou de ſuppoſitions ſont toûjours appuyées ſur des principes infaillibles, & parfaitement conformes à la nature des égalitez compoſées, lorſqu'il n'y a point de contradiction dans leurs produiſantes. Et lors même que les produites ou leurs produiſantes renfermeront des contradictions; les conjectures qu'on aura tirées de la diſpoſition des ſignes, ne ſeront pas ſans fruit, ſi ces mêmes égalitez renferment encore avec les contradictions quelque racine vraie ou fauſſe: parce qu'il y aura toûjours un alternatif des ſignes + & — pour chacune des racines vraies; & une fois deux mêmes ſignes +, ou deux mêmes ſignes —, qui ſeront conſécutifs pour chacune des fauſſes. Ce qui fait voir que la remarque du ſecond éxemple n'eſt pas juſte; puiſque l'arrangement des ſignes marque non ſeulement qu'une des produiſantes renferme une racine vraie $+3$, mais auſſi qu'elle en renferme une fauſſe -1; & que la produitte renferme auſſi de la même ſorte non ſeulement une fauſſe racine -1, mais encore une vraie $+3$. D'où il eſt trop aiſé de conclurre que la régle n'eſt pas fauſſe, & ne ſuppoſe pas qu'une même quantité ſoit & ne ſoit pas en même temps. Car -1 eſt toûjours -1, & $+3$ eſt toûjours $+3$, & l'abſurdité de la produiſante $zz + 1z + 6 \infty 0$ eſt toûjours la même abſurdité que renferme la produite $z^4 - 1z^3 + 1zz - 15z - 18 \infty 0$.

Monſieur Deſcartes a donc parfaitement diſtingué dans ſa régle tous les divers cas qu'elle peut renfermer, & n'a jamais prétendu l'étendre au delà de ſes juſtes limites, en faiſant paſſer pour vraies ou pour fauſſes des racines qui ne ſont qu'imaginaires. Mais ſi cette régle conſerve en ſon entier tout le degré de certitude que luy attribuë ſon Auteur; elle conſerve auſſi toute la commodité qu'il a jugé qu'on en pouvoit tirer, pour découvrir toutes les racines commenſurables d'une égalité compoſée. Car ſi on propoſe une égalité $z^3 - 2zz + 4z - 3 \infty 0$, où la diſpoſition des ſignes fait imaginer trois racines vraies; on conclurra d'abord qu'il n'y en a point de fauſſe. Et il ſuffira de la diviſer par z moins chaque diviſeur du dernier terme 3. Et ſi on propoſe une égalité $z^3 + 1zz + 1z + 6 \infty 0$, où la diſpoſition des ſignes fait imaginer trois racines fauſſes; on conclurra auſſi-tôt qu'il n'y en a point de vraie. Et il ſuffira de la diviſer par z plus chaque diviſeur du dernier terme 6. Et ſi on propoſe une égalité $z^4 - 1z^3 + 1zz - 15z - 18 \infty 0$, où la diſpoſition des ſignes fait imaginer une racine fauſſe, & trois racines vraies; on ſçaura qu'il faut tenter la diviſion par z plus ou moins chaque diviſeur du dernier terme 18.

Un peu aprés que j'eus achevé cette réponſe, j'en parlai à des perſonnes ſçavantes & curieuſes des belles découvertes. Et j'eus ſujet de croire ſur les raiſons qu'elles m'apportérent, & ſur des conjectures aſſez fortes, que ce qui avoit parû ſous le nom du Corps entier de l'Académie, avoit été communiqué ſeulement par quelques-uns de ſes membres comme au nom de tous à l'Auteur du Journal. Je fus même confirmé dans cette penſée, en apprenant que la régle dont il eſt queſtion, n'étoit pas déſapprouvée généralement par tous ces Meſſieurs.

REFLEXION SUR UNE AUTRE REPONSE INSERÉE DANS LES JOURNAUX DE LA MÊME ANNÉE.

M. Ozanam a crû pouvoir juſtifier la même régle par une autre voie. Si l'on veut, dit-il, que l'Auteur ait entendu parler auſſi des racines fauſſes imaginaires, ce qui eſt aſſez difficile à perſuader, je croi que je le puis encore juſtifier, & que ceux qui l'ont voulu reprendre, & aſſurer que ſa régle générale ſouffroit des exceptions, ſemblent n'avoir pas bien entendu la nature des racines fauſſes imaginaires; l'éxemple qu'ils ont apporté ſur ce ſujet n'eſt pas ſuffiſant.

Enſuitte il en propoſe un autre de la même nature, & qui eſt $xx - 2x + 12 \propto 0$, dont les racines $1 + \sqrt{-11}$ & $1 - \sqrt{-11}$ ſont imaginaires. Et il croit avoir bien démontré que ces racines ſont eſſentiellement fauſſes, parceque leurs cubes ſont moindres que rien; ou ce qui revient au même à ſon avis, parceque le triple de la partie commenſurable n'excéde point le nombre qui eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$. Mais il ſemble n'avoir pas entendu l'état de la queſtion, & n'avoir pas compris la force des raiſons que Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences ont oppoſées à la régle de Monſieur Deſcartes. Car ſi on luy accorde que les racines de l'égalité $xx - 2x + 12 \propto 0$ ſont eſſentiellement fauſſes; on le priera de la multiplier par $x - 2 \propto 0$ d'une part, & par $x + 4 \propto 0$ d'une autre; & de juger enſuitte ſelon la régle par la diſpoſition des ſignes, de la nature des racines du premier produit $x^3 - 4xx + 16x - 24 \propto 0$, & enſuitte de la nature des racines du ſecond $x^3 + 2xx + 4x + 48 \propto 0$. Les changemens des ſignes ne doivent-ils pas marquer que les trois racines ſont vraies d'une part? & tous les ſignes + qui ſont conſécutifs, ne marquent-ils pas de l'autre, que chacune des trois racines eſt fauſſe? Si donc la régle eſt ſans exception, il y aura deux racines eſſentiellement vraies, qui ſeront eſſentiellement fauſſes. Peut-on trouver un accord entre ces abſurditez? Une bonne cauſe eſt aſſez forte pour ſe ſoûtenir d'elle-même. Et c'eſt luy faire tort que d'emprunter de mauvaiſes raiſons pour l'appuyer & pour la défendre.

Il y a même une choſe ſur la nature des cubes négatifs que M. Ozanam ſemble n'avoir pas aſſez examinée. Pour trouver le cas, dit-il, auquel cette racine $a + \sqrt{-bb}$ doit être eſſentiellement fauſſe, il faut que ſon cube $a^3 - 3abb + 3aa\sqrt{-bb} - bb\sqrt{-bb}$ ſoit nié, & que par conſéquent chacune de ces deux parties ſoit niée. Cette conſequence eſt-elle néceſſaire ? & ne ſuffit-il pas pour rendre le cube négatif, qu'il y ait plus de négatif dans l'une des parties, qu'il ne peut y avoir de poſitif dans l'autre. Le cube $38 - 17\sqrt{5}$ ou $\sqrt{1444} - \sqrt{1445}$ de $2 - \sqrt{5}$ eſt ſans doute négatif, qui renferme pourtant une partie poſitive. Il conclud encore en finiſſant, qu'afin que la racine $a + \sqrt{-bb}$ ſoit eſſentiellement fauſſe, il faut que $3aa$ ne ſoit pas plus grand que bb ; comme ſi cela étoit abſolument néceſſaire pour rendre négatif le cube de la même racine. Et néanmoins ſi on prend 2 pour a, & 6 pour bb, ou $2 + \sqrt{-6}$ pour $a + \sqrt{-bb}$; ſon cube $-28 + 6\sqrt{-6}$ ſera négatif, quoique $3aa$ ou 12 ſoit plus grand que 6 ou que bb.

ECLAIRCISSEMENT

DE QUELQUES AUTRES DIFFICULTEZ

SUR LA NATURE DES GRANDEURS NEGATIVES.

J'Ay ſouvent obſervé que des perſonnes, même d'un eſprit vif, & fort éclairé, ne pouvoient ſe former qu'avec peine une idée diſtincte de la nature des racines ou des grandeurs négatives, & que les imaginaires les embarraſſoient beaucoup davantage. C'eſt pourquoi il ne ſera pas hors de propos d'ajoûter ici pour un plus grand éclairciſſement une réponſe que je fis, il y a plus de dix ans, à certaines difficultez qu'un Géométre habile & l'un des plus célébres Auteurs de ce ſiécle m'avoit fait l'honneur de me propoſer. J'eſtimois beaucoup l'ordre & la méthode de ſes nouveaux Elémens de Géométrie, & je déſirois qu'un ſi bel ouvrage, à qui j'étois redevable même de mes prémiéres connoiſſances dans la Géométrie, ne contînt rien qui ne fût entiérement certain. Dans cette penſée je priai l'Auteur de changer l'article 61 de ſon premier Livre, où il diſoit, qu'il » paroît bien étrange que moins multiplié par moins donne plus ; & qu'en » effet il ne faut pas s'imaginer que cela puiſſe arriver autrement que par » accident : parceque de ſoi-même moins multiplié par moins ne peut donner que moins. Je luy expoſai les raiſons que j'avois du contraire, & voici les difficultez qu'il leur oppoſa, & la réponſe que je fis.

» J'étois déja réſolu, me dit-il dans ſa lettre, de changer ce que vous me mar- » quez. Car y ayant rêvé il n'y a pas long-temps, j'ai bien vû qu'on pouvoit » dire que moins par moins fait plus ; parceque multiplier moins 5 par moins » 4, c'eſt ôter moins 5 autant de fois qu'il y a d'unitez dans moins 4. Or je » ne puis ôter une fois moins 5, qu'en mettant une fois plus 5, c'eſt à dire » plus 20. C'eſt ce que je ſuis réſolu de ſuivre dans cette nouvelle édition.

» Ce n'eſt pas que ces moins ſans rapport à aucun plus ne me paroiſſent » de pures chiméres. Car on comprend bien que de cinq toiſes on en peut » retrancher deux, & qu'ainſi on peut dire cinq toiſes moins deux. Mais » que de cinq toiſes on en puiſſe retrancher ſept, & qu'ainſi on puiſſe dire » cinq toiſes moins ſept, cela me paroît inconcevable. Et c'eſt pourquoi je » ne comprens pas que le quarré de moins 5 puiſſe être la même choſe que » le quarré de plus 5, & que l'un & l'autre ſoit plus 25. Je ne ſçai de plus comment ajuster cela au fondement de la multiplication, qui est que l'unité doit être à l'une des grandeurs que l'on multiplie, comme l'autre est au produit. Ce qui est également vrai dans les entiers & dans les fractions. Car 1 est à 3, comme 4 est à 12. Et 1 est à $\frac{1}{3}$, comme $\frac{1}{4}$ est à $\frac{1}{12}$. Mais je ne puis ajuster cela aux multiplications de deux moins. Car dira-t'on que plus 1 est à moins 4, comme moins 5 est à plus 20? Je ne le voi pas. Car $+ 1$ est plus que $- 4$. Et au contraire $- 5$ est moins que $+ 20$. Au lieu que dans toutes les autres proportions, si le premier terme est plus grand que le second, le troisiéme doit être plus grand que le quatriéme.

J'ai consideré qu'on pourroit dire, que pour juger de la raison du premier terme au second, & du troisiéme au quatriéme, on ne devoit regarder que ce qui étoit affecté des signes $+$ ou $-$, en faisant abstraction des signes. Mais je crains que cela ne se dise gratis. Car peut-on dire que $+1$ ne soit pas plus que -4, & qu'au contraire $- 5$ ne soit pas moins que $+ 20$. Voila ce qui m'embarrasse. Car de ce qu'un homme qui a tout mangé son bien, & qui s'est de plus endetté de 20000 écus, a 20000 écus moins que rien, c'est qu'il est obligé de payer 20000 écus, & de les trouver oú il pourra; ce qui est quelque chose de réel, & ce qui est cause qu'on le met en prison, pour le forcer par là de les trouver par quelque moyen, comme par ses amis, qui pourront les donner pour le délivrer de cette misére. Et c'est pourquoi quand cet homme meurt sans héritiers, cette obligation de payer ces 20000 écus qui résidoit en sa personne, est tout à fait éteinte. Il me semble que ces $-$ 20000 écus ne sont plus qu'une chimére, & comme une montagne sans vallée. Je voudrois donc qu'on ne dît jamais moins telle grandeur, que cela n'eût quelque rapport à quelque grandeur positive, dont cette grandeur affectée du signe de moins pût être retranchée. Et c'est ce qui arrive à mon sens dans toutes les dettes passives. Car on ne peut dire ce me semble raisonnablement, qu'un homme qui doit 10000 écus, a $-$ 10000 écus, que parcequ'on suppose en luy une puissance quoi qu'éloignée d'avoir ces 10000 écus, & un droit dans ses créanciers de les luy ôter s'il les a jamais. Mais je ne puis souffrir que l'on dise qu'un problême se peut résoudre en deux maniéres, ou par deux grandeurs positives, ou par deux grandeurs négatives, qui étant multipliées l'une par l'autre feront la même chose que les positives.

Je conclus de tout cela que moins par moins sans rapport à plus est une fiction, dont on ne laisse pas de se pouvoir servir utilement, comme quand on multiplie le nombre des lieuës qu'a fait un homme, avec le nombre des heures qu'il a employées à les faire, pour juger combien il luy faudra de temps pour faire un certain nombre de lieuës; quoique le temps & l'étenduë soient des grandeurs disparates, qui ne sont pas multipliables l'une par l'autre. Si on a d'autres maniéres de résoudre ces difficultez, je serai bien-aise de les apprendre.

Reponse aux difficultez.

MONSIEUR.

VOus obligez beaucoup un inconnu par l'honneur de vôtre réponse. Je l'ai lûë & relûë plusieurs fois avec une grande attention, & j'espére que vous recevrez favorablement les réfléxions que j'ai faites sur les difficultez que vous me proposez. Voici en peu de mots á quoi vous les réduisez toutes. La premiére est, comment on peut dire ou concevoir plus 5 toises moins 7 toises; & la seconde comment on peut dire que + 1 est à — 4, comme — 5 est à + 20. Et dans celle-ci vous observez vous-même cette réponse qu'on y pourroit donner; que pour juger de la raison du premier terme au second, & du troisiéme au quatriéme; on ne doit regarder que ce qui est affecté des signes + & —. Mais vous craignez que cela ne se dise gratis, parcequ'il est embarrassant de concevoir comment on peut dire que + 1 ne soit pas plus que — 4; & qu'au contraire — 5 ne soit pas moins que + 20.

Pour aller par ordre; je considére en premier lieu que nous avons l'idée du plus, & l'idée du moins; & que par le plus & par le moins on n'entend pas proprement des grandeurs disparates ou non disparates, pour user de vos termes; mais qu'on entend, par une espêce d'abstraction métaphysique, certaines maniéres de concevoir les grandeurs les unes comme ajoutées au rien ou à d'autres grandeurs, & les autres comme retranchées de certaines grandeurs ou même de zéro. Il est vrai que toutes les grandeurs n'éxistent jamais que comme positives, ou qu'autant qu'elles sont ajoûtées à zéro, & que le plus intelligible leur convient alors essentiellement, c'est à dire qu'on ne peut les concevoir comme éxistentes ou élevées au dessus de zéro que par l'idée positive du plus, qu'on sous-entend toûjours, ainsi que vous l'avez remarqué dans vos Elémens. C'est pour cela qu'à proprement parler, on ne devroit point dire que des grandeurs sont défectives, négatives, ou fausses. Et le rien même ou le zéro conviendroit ce semble fort bien à l'expression de grandeur négative, parce qu'être une grandeur négative, ou n'estre point une grandeur, paroît la même chose. Peut-être seroit-il plus à propos de dire simplement le défaut de telles ou de telles grandeurs, qui sont toûjours positives, ou à qui le plus convient par leur nature, au moins intelligiblement. Mais l'usage a voulu que les divers manquemens des grandeurs, ou ce qui s'en faut en diverses maniéres pour remonter jusques à zéro, ou ce qui revient au même, pour faire en sorte qu'il reste au moins zéro aprés certains retranchemens, s'appellassent du nom quoiqu'impropre, de grandeurs négatives ou fausses, & qu'on employast le signe — pour les énoncer en les luy joignant. Comme quand on dit moins 2, ou qu'on écrit — 2. Ainsi quoiqu'on ne puisse retrancher 7 toises de 5 toises, & que nous concevions clairement qu'un tel retranchement ne peut pas se faire, parce que 7 toi-

ses

ſès ne ſont pas une fois dans 5 toiſes ; on conçoit néanmoins clairement qu'il s'en faut au juſte 2 toiſes que les 7 toiſes ne ſoient une fois dans 5 toiſes, ou ne puiſſent en être ôtées une fois. Et pour énoncer ſimplement cette ſeconde conception des 2 toiſes qui manquent pour remonter juſqu'à zéro, ou pour rendre plus 7 toiſes moins 7 toiſes égales à rien, ou même pour rendre indéterminément tant de toiſes moins autant égales à zéro ; on ne fait ſimplement que dire ou qu'écrire — 2 toiſes. Et cette expreſſion moins, ou cette marque —, eſt fort commode pour ménager le diſcours ou l'écriture dans nos raiſonnemens, & pour réveiller promtement en nous cette idée, quand nous nous ſommes accoûtumez de lier l'une à l'autre ou implicitement ou explicitement. Car on entend aſſez quelquefois ce que ſignifie moins, & que ce terme exprime la même choſe que celuy d'ôter ou retrancher, quoiqu'il y ait peut-être quelque peine à bien marquer ce qu'on entend.

Ainſi, Monſieur, ces moins ſans rapport à aucun plus ne paroîtront pas comme de pures chiméres au ſens où vous les prenez. Car on pourra fort bien dire moins 2 toiſes ou moins une telle grandeur, ſans que cela ait rapport à quelque grandeur poſitive, dont cette grandeur affectée du ſigne de moins puiſſe être retranchée. Car on concevra ſimplement par là qu'il s'en faut 2 toiſes, que 7 toiſes ne puiſſent être retranchées de 5 toiſes, ou que tant de toiſes ne puiſſent être retranchées d'une autre quantité plus petite de 2 toiſes.

D'où il eſt clair dans un autre ſens, que ces moins des grandeurs ſuppoſent l'impoſſible, ou qu'ils marquent des contradictions chimériques, & ſemblables à celles d'une montagne ſans vallée, ou à d'autres qui ſuppoſeroient une partie plus grande que ſon tout, ou les côtez d'un angle rectiligne plus petits enſemble que ſa baſe. Tout ce qu'il y a de ſubtil & de fin, c'eſt qu'il ne faut pas confondre les contradictions ſuppoſées avec la conception des mêmes contradictions. Ce ſont des choſes qu'on doit fort diſtinguer, & qu'il eſt bon de bien démêler. Il y a contradiction que 7 toiſes puiſſent être retranchées de 5 toiſes. Mais il n'y a point de contradiction à concevoir qu'il ne s'en faut que 2 toiſes que les ſept ne puiſſent être retranchées des cinq. Et comme il n'y a point de contradiction à concevoir en quoi conſiſte une contradiction, il n'y en a point pareillement à l'énoncer. Et ainſi il n'eſt point inconcevable qu'on puiſſe dire + 5 toiſes moins 7 toiſes, ou — 2 toiſes ; ou qu'une montagne n'eſt point ſans vallée ; quoiqu'il ſoit inconcevable qu'une grandeur puiſſe avoir — 2 toiſes, ou qu'une montagne puiſſe être ſans vallée.

Ainſi quand on dit qu'un homme a — 10000 écus, on entend ſimplement qu'il a contracté une dette de 10000 écus, ou qu'il doit ces 10000 écus. Et s'il vient à mourir ſans héritiers avant que d'avoir payé, cela n'empêche pas qu'il ne s'en falle toûjours 10000 écus qu'il n'ait ſatisfait à ſes créanciers. Et de ce qu'on ſuppoſe qu'un homme qui n'a rien, & qui doit 10000 écus pourra payer ſa dette dans la ſuitte, parceque'il n'eſt pas impoſſible qu'il en trouve les moyens, & qu'on ſuppoſe même qu'il les trouvera ; cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe exprimer ſimplement cét état où il ſe trouve, & que comme on conçoit aiſément qu'il n'a rien, & qu'il doit néanmoins les 10000 écus, cette conception ne puiſſe être exprimée en attachant — 10000 écus à cet homme, ou en diſant qu'il a — 10000 écus. Les expreſſions ſont arbitraires, il eſt permis d'en prendre à ſon choix, lors ſur tout qu'on a ſoin d'ôter les équivoques, & de fixer le ſens dans lequel on les doit entendre.

La premiére difficulté étant donc pleinement réſoluë, voici, Monſieur, les réflèxions que l'on peut faire ſur la ſeconde. Il eſt clair que le plus & le moins des grandeurs égales ſe font l'un à l'autre des retranchemens réciproques, aprés leſquels il ne reſte rien, c'eſt à dire que comme le plus d'une grandeur en détruit & retranche le moins, le moins pareillement en détruit & retranche le plus. Que + 1 par éxemple retranche — 1, comme — 1 retranche + 1; ou ce qui ſignifie la même choſe, que + 1 — 1 ∞ 0, comme — 1 + 1 ∞ 0. Il eſt donc égal de dire le plus d'une grandeur, ou le retranchement de ſon moins. Or le retranchement du moins ſignifie encore la même choſe que moins moins. Il ſera donc égal de dire plus, ou de dire moins moins. Et ainſi ce ſera la même choſe de dire + 5 fois 5, ou + 25; ou de dire — — 5 fois 5, ou — — 25. Or — — 25 eſt le quarré de — 5. Car multiplier — 5 par — 5, c'eſt prendre — 5 autant de fois qu'il y a d'unitez dans — 5, c'eſt à dire — 5 fois: ou ce qui eſt égal, c'eſt ôter — 5 autant de fois qu'il y a d'unitez dans 5, je ne dis pas dans — 5, parceque ce — eſt tranſplacé dans le mot d'ôter qui le ſignifie. Or je ne puis ôter une fois — 5, qu'en mettant 1 fois + 5. Et ainſi je ne puis ôter 4 fois — 5 qu'en mettant 4 fois + 5 ou + 25. Cela paroît demonſtratif: & c'eſt dequoi je voulois établir le principe dans ma lettre, lorſque j'y marquois que ſi un homme qui n'a rien & qui ne doit rien, recevoit la diminution ou le retranchement d'une dette ſuppoſée de 1000 écus, ou que ſi on luy ôtoit — 1000 écus, il auroit enſuitte + 1000 écus, parcequ'on n'auroit pû luy ôter cette dette qu'en luy donnant + 1000 écus dequoy la payer. Et comme on ſuppoſe qu'il ne doit rien, il ſeroit en droit de garder ce qu'il auroit receu. De ſorte qu'il auroit véritablement 1000 écus.

Si donc + 1 détruit — 1, comme — 1 détruit + 1; ou ſi + 1 eſt une fois ôté ou retranché dans — 1, comme — 1 eſt une fois ôté ou retranché dans + 1: ces termes une fois ôté ou retranché, & l'expreſſion plus abbrégée — 1, expoſeront également ce que + 1 eſt à — 1, & ce que — 1 eſt à + 1. Il eſt aſſez évident par les nouveaux Elemens de Géométrie que plus en moins, ou moins en plus, donne également moins. Ils ſemblent même ſuppoſer, comme une vérité conſtante, qu'on aura prouvé que moins en plus donne moins, lorſqu'on aura prouvé que plus en moins donne moins. Il ſera donc conſtant par vos propres principes, que + 1 diviſé par — 1, & que — 1 diviſé par + 1, donneront un même expoſant — 1; ou que + 1 eſt au juſte contenu dans — 1, comme — 1 dans + 1. Or il eſt clair que par tout où les expoſans ſont les mêmes, les rapports ſont égaux; les différences ne ſont pas l'eſſentiel des proportions Géométriques, elles le ſont ſeulement des arithmétiques.

Il ſuffit pour la Géométrique que le premier terme ſoit dans le ſecond de la même ſorte que le troiſiéme eſt dans le quatriéme. Cette notion eſt ſi étenduë qu'elle embraſſe les entiers, les fractions, les incommenſurables, & les grandeurs négatives & poſitives. Il eſt donc permis de raiſonner ainſi, $+1 . -1 :: -1 . +1$. Or $+1 . -1 :: +5 . -5 :: +4 . -4$. Et $-1 . +1 :: -5 + 5 :: -4 . +4$. Donc $+1 . -1 :: -5 . +5 :: -4 . +4$. Et par un changement alterne $+1 . -5 :: -1 . +5$. Et $+1 . -4 :: -1 +4$. Or $-1 +5 :: -5 . +25$. Et $-1 +4 :: -5 +20$. Donc par égalité $+1 -5 :: -5 . +25$. Et $+1 . -4 :: -5 . +20$. Et s'il eſt vrai que l'unité eſt ôtée ou retranchée 5 fois dans -5, & 4 fois dans -4, comme -5 eſt ôté ou retranché 5 fois dans $+25$, & 4 fois dans $+20$; on trouvera encore en diviſant $+25$ par -5, & -5 par $+1$, un même expoſant -5; & en diviſant $+20$ par -5, & -4 par $+1$, un même expoſant -4. De ſorte qu'il eſt clair en toutes maniéres, que moins multiplié par moins donne plus eſſentiellement & par luy-même.

DE LA NATURE DES RACINES IMAGINAIRES.

17. Ce ſont les difficultez que je viens d'éclaircir, qui m'ont fait naître l'occaſion d'examiner & d'expliquer avec plus de ſoin la nature b. 13.
des racines fauſſes, & celle des racines qu'on nomme imaginaires. On a déja fait voir [b] que les unes & les autres, à proprement parler, ſont imaginaires, puiſqu'elles ſuppoſent des abſurditez. Mais les fauſſes ne ſuppoſent que des abſurditez ſimples ou linéaires; & les imaginaires tirées du ſecond degré en ſuppoſent de planes & qui ſont compliquées, comme lorſqu'on veut prendre une moyenne proportionnelle $\sqrt{-ab}$ entre une grandeur poſitive $+a$ & une négative $-b$, ou une moyenne entre la poſitive $+a$ & la négative $-a$. Et les abſurditez du troiſiéme dégré ſe peuvent toutes rapporter ou réduire à ces deux eſpéces. Comme ſi on ſuppoſe $z^3 + a^3 \propto 0$, ou $z^3 \propto -a^3$; on tirera de part & d'autre la racine cubique, & on formera l'égalité linéaire $z \propto -a$, ou $z + a \propto 0$. Et diviſant l'égalité compoſée $z^3 + a^3 \propto 0$ par la ſimple $z + a \propto 0$; l'expoſant fournira une égalité plane $zz - az + aa \propto 0$, qui aura deux racines imaginaires $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{3}{4}aa}$.

Mais le quatriéme degré peut avoir des contradictions encore plus compliquées que les planes, parcequ'on y peut ſuppoſer des contradictions, où il faudra tirer les racines quarrées des racines des grandeurs négatives; comme dans l'égalité $z^4 + a^4 \propto 0$, ou $z^4 \propto -a^4$, l'inconnuë z eſt $\sqrt{\sqrt{-a^4}}$. Et les contradictions du cinquiéme degré ſe peuvent toutes rapporter à l'une des trois eſpêces précédentes. Car ſi on ſuppoſe $z^5 + a^5 \propto 0$, ou $z^5 \propto -a^5$; la valeur de z peut être $-a$. Et l'égalité $z^5 + a^5 \propto 0$ étant diviſée par la ſimple $z + a \propto 0$ donnera l'égalité du quatriéme degré $z^4 - az^3 + aazz - a^3z + a^4 \propto 0$. Et on dira la même choſe du ſixiéme & du ſeptiéme degré.

Mais le huitiéme en peut avoir encore une autre eſpéce, où il faudra tirer les racines des racines des racines quarrées des grandeurs négatives. Et tous les autres degrez jusques au seiziéme n'auront point d'autres espêces de contradictions que les quatre, dont on vient de parler. Mais le seiziéme en pourra recevoir une autre. Et ensuitte le trente-deuxiéme une autre, & le soixante-quatriéme encore une nouvelle. Et ainsi du reste jusques à l'infini, les augmentant seulement aux degrez dont le nombre est un terme de la progression double; sans ajoûter aucune autre espéce pour les degrez qui sont entre ceux-là. Car supposant par exemple une égalité $z^{10} + a^{10} \propto 0$, ou $z^{10} \propto - a^{10}$, on aura une valeur $zz \propto - aa$, & $z \propto \sqrt{- aa}$. Et si on suppose $z^{11} + a^{11} \propto 0$, ou $z^{11} \propto - a^{11}$, on aura une valeur $z \propto - a$. Et l'égalité $z^{11} + a^{11} \propto 0$ étant divisée par la simple $z + a \propto 0$, donnera pour exposant celle de dix dégrez $z^{10} - az^9 + aaz^8 - a^3z^7 + a^4z^6 - a^5z^5 + a^6z^4 - a^7z^3 + a^8zz - a^9z + a^{10} \propto 0$. Et c'est le même à peu prés des autres degrez. Il étoit d'autant plus à propos d'expliquer avec soin les différentes causes des absurditez que les égalitez renferment, que nul ne s'étoit encore mis en peine de nous en instruire, ni peut-être de les examiner un peu en détail.

PROBLEME IV.

Pour réduire les égalitez composées où deux racines peuvent avoir une même valeur.

18. *Pour diminuer les degrez d'une égalité, qui peut avoir deux ou plusieurs de ses racines égales entr'elles.*

On multipliera les termes de cette égalité par les termes d'une progression arithmétique, chacun par chacun & dans un même ordre. Et le produit fournira une autre égalité qui comprendra encore l'une des racines
b. 16. 8. ou 1ere partie. 9. 9. égales. C'est pourquoi on cherchera le [b] plus grand diviseur commun de l'égalité découverte & de celle qu'on avoit proposée. Et alors les degrez de l'inconnuë seront diminuez, ou l'une de ses valeurs sera découverte. Les éxemples éclairciront & fixeront ces régles.

PREMIER EXEMPLE.

Pour découvrir une des racines de l'égalité $z^3 - 4zz + 5z - 2 \propto 0$, où l'on suppose deux racines égales. Je dispose sous ses termes ceux d'une progression arithmétique arbitraire, & pour une plus grande facilité, je dispose 0 sous l'un de ses termes, sous le second par exemple, afin qu'il s'évanoüisse en multipliant. Et choisissant ainsi la progression arithmétique $1, 0, -1, -2$, je multiplie par ordre le premier terme z^3 par 1, & le second $- 4zz$ par 0, ce qui donne encore 0; & le troisiéme $+ 5z$ par $- 2$, & le quatriéme $- 2$ par $- 2$. Et la somme des produits fournit l'égalité $1z^3 * - 5z + 4 \propto 0$, ou $1z^3 \propto 5z - 4$. Et la proposée fournissant aussi $1z^3 \propto 4zz - 5z + 2$; on formera l'égalité $5z - 4 \propto 4zz - 5z + 2$. Ou $4zz \propto 10z - 6$. Et $zz \propto \frac{5z - 3}{2}$.

Et mettant pour zz sa valeur $\frac{5z-3}{2}$ dans l'égalité $1z^3 * - 5z + 4 \propto 0$, on trouvera $\frac{-1z+1}{4} \propto 0$, ou $-1z+1 \propto 0$, & $z \propto 1$. Et la proposée étant divisée par $z - 1 \propto 0$, & l'exposant $zz - 3z + 2 \propto 0$ encore par $z - 1 \propto 0$, le dernier exposant sera $z - 2 \propto 0$. Et les trois racines de la proposée seront 1, 1, 2.

Multiplier les termes de l'égalité	z^3	$-4zz$	$+5z$	$-2 \propto 0.$
par leurs correspondans de la progression	1.	0.	-1	$-2.$
Somme des produits & 2^e égalité	$1z^3$	*	$-5z$	$+4 \propto 0.$

SECOND EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * - 6zz + 8z - 3 \propto 0$, où l'on suppose trois racines égales. On disposera sous ses termes ceux de la progression arithmétique 0, 1, 2, 3, 4, écrivant 0 sous le premier, afin qu'il s'évanoüisse. On multipliera ensuitte le premier z^4 par 0, & le second * qui est nul par 1, & le troisiéme $-6zz$ par 2, & le quatriéme $+8z$ par 3, & le cinquiéme -3 par 4. Et la somme des produits fournira une autre égalité $-12zz + 24z - 12 \propto 0$, qui renfermera encore deux des trois racines égales. C'est pourquoi on disposera sous ses termes ceux de la progression 0, 1, 2; & on multipliera le premier par 0, & le second par 1, & le troisiéme par 2. Et la somme des produits fournira l'égalité linéaire $24z - 24 \propto 0$, ou $1z - 1 \propto 0$. De sorte que les trois racines égales seront 1, 1, 1. Et la proposée étant divisée par le cube $1z^3 - 3zz + 3z - 1 \propto 0$ de l'égalité linéaire $1z - 1 \propto 0$, l'exposant $z + 3 \propto 0$ fournira l'autre racine -3 de l'égalité.

Multiplier les termes de l'égalité	z^4	*	$-6zz$	$+8z$	$-3 \propto 0.$
par leurs correspondans de la progression	0.	1.	2.	3.	4.
Multiplier les termes de la 2^e égalité	0.	*	$-12zz$	$+24z$	$-12 \propto 0.$
par leurs correspondans de la progression			0.	1.	2.
Somme des produits & 3^e égalité				$24z$	$-24 \propto 0.$

TROISIEME EXEMPLE.

Pour trouver une valeur de z dans l'égalité $yy + \frac{qry - 2qzy + qzz - qss}{q - r} \propto 0$, où l'on suppose que l'autre inconnuë y doit avoir deux valeurs égales. On disposera sous ses termes ceux de la progression arithmétique 2, 1, 0, afin que le troisiéme où est zz s'évanoüisse. On multipliera ensuitte le premier terme par 2, & le second par 1, & le troisiéme par 0. Et la somme des produits sera l'égalité $2yy + \frac{1qry - 2qzy}{q - r} \propto 0$, laquelle étant multipliée par $q - r$, donnera $2qyy - 2ryy + qry - 2qzy \propto 0$. Et $2qz \propto 2qy - 2ry + qr$. Et $z \propto \frac{2qy - 2ry + qr}{2q}$.

$$\begin{array}{rcccc}
\textit{Multiplier les termes de l'égalité} & 1yy + \dfrac{qry - 2qzy}{q - r} & + \dfrac{qzz - qss}{q - r} & \infty\, 0. \\
\textit{par les correspondans de la progression} & 2. \quad\quad 1. & 0. & \\
\hline
\textit{Somme des produits \& 2}^{e}\textit{ égalité} & 2yy + \dfrac{qry - 2qzy}{q - r} & * & \infty\, 0.
\end{array}$$

QUATRIEME EXEMPLE.

Pour trouver une valeur de z dans l'égalité qu'on expose ici, & où l'inconnuë y doit avoir deux valeurs égales. On multipliera son premier terme par 4, & le second par 3, & ainsi du reste, disposant o sous le cinquiéme où z a deux degrez, afin que ce terme étant évanoüi, l'inconnuë z ne soit plus que linéaire. On ordonnera ensuitte la nouvelle égalité, & tous ses termes étant divisez par $2ddy^3$ qui se trouve où est zz, on aura la valeur de cette inconnuë.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & & & -2cdy^4 & & -2bbcdyy & & \\
\textit{Egalité proposée} & 1y^6 & -2by^5 & +bby^4 & +4bcdy^3 & +ccddyy & -2bccddy & +bbccdd \;\infty\; 0. \\
 & & & +ddy^4 & -2ddzy^3 & -ddssyy & & \\
 & & & & & +ddzzyy & & \\
\textit{Progression} & 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & -1. & -2. \\
\hline
 & & & -4cdy^4 & & & & \\
2^{e}\textit{ égalité} & 4y^6 & -6by^5 & +2bby^4 & +4bcdy^3 & * & +2bccddy & -2bbccdd \;\infty\; 0. \\
 & & & +2ddy^4 & -2ddzy^3 & & & \\
\end{array}$$

$$\textit{Valeur } 1z \;\infty\; \frac{2y^3 - 3byy - 2cdy + 1bby + 1ddy + 2bcd}{dd} + \frac{bccy - 2bbcc}{y^3}.$$

DEMONSTRATION DU PROBLEME.

Soit telle égalité $zz - bz - dg \;\infty\; 0$ qu'on voudra, multipliée par une plane $zz - 2az + aa \;\infty\; 0$, où les valeurs de z sont égales; ou ce qui revient au même, soit l'égalité $zz - bz - dg \;\infty\; 0$ multipliée par la simple $z - a \;\infty\; 0$, & le produit encore une fois par la simple $z - a \;\infty\; 0$.

Et que les termes du produit
$$z^4 \begin{array}{l} -2az^3 \\ -bz^3 \end{array} \begin{array}{l} +aazz \\ +2abzz \\ -dgzz \end{array} \begin{array}{l} -aabz \\ +2adgz \end{array} -aadg \;\infty\; 0$$
soient multipliez par ordre par ceux d'une progression arithmétique arbitraire, par exemple par ceux de l'arithmétique 0, 1, 2, 3, 4, ou d'une autre 4, 3, 2, 1, 0; il est visible que la somme des produits sera encore égale à zéro, & que l'inconnuë z y conservera encore une de ses deux valeurs a & a. Car mettant par tout a pour z dans l'une & l'autre de ces sommes, toutes les parties seront mutuellement détruites par des signes contraires. Et ce sera toûjours la même chose de chaque égalité, où deux racines auront une même valeur, & quelque progression arithmétique que l'on veüille choisir. On pourroit encore former la démonstration par une autre voie. Mais celle-ci doit suffire. L'usage de ce problême est d'une étenduë tres-vaste dans la Géométrie composée.

$$z^4 \begin{array}{l} -2az^3 \\ -bz^3 \end{array} \begin{array}{l} +aazz \\ +2abzz \\ -dgzz \end{array} \begin{array}{l} -aabz \\ +2adgz \end{array} -aadg \propto 0. \quad \Big\{ \quad z^4 \begin{array}{l} -2az^3 \\ -bz^3 \end{array} \begin{array}{l} +aazz \\ +2abzz \\ -dgzz \end{array} \begin{array}{l} -aabz \\ +2adgz \end{array} -aadg \propto 0.$$

$$0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad \Big\{ \quad 4. \quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} * \begin{array}{l} -2az^3 \\ -bz^3 \end{array} \begin{array}{l} +2aazz \\ +4abzz \\ -2dgzz \end{array} \begin{array}{l} -3aabz \\ +6adgz \end{array} -4aadg \propto 0. & 4z^4 \begin{array}{l} -6az^3 \\ -3bz^3 \end{array} \begin{array}{l} +2aazz \\ +4abzz \\ -2dgzz \end{array} \begin{array}{l} -aabz \\ +2adgz \end{array} \quad * \propto 0. \\ \hline \begin{array}{l} -2a^4 \\ -ba^3 \end{array} \begin{array}{l} +2a^4 \\ +4abaa \\ -2dgaa \end{array} \begin{array}{l} -3aaba \\ +6adga \end{array} -4aadg \propto 0. & 4a^4 \begin{array}{l} -6a^4 \\ -3ba^3 \end{array} \begin{array}{l} +2a^4 \\ +4abaa \\ -2dgaa \end{array} \begin{array}{l} -aaba \\ +2adga \end{array} \quad * \propto 0. \end{array} \right.$$

PROBLEME V.

19. *Pour augmenter les racines d'une égalité, de telle quantité qu'on voudra, ſans qu'on les connoiſſe.*

On ſuppoſera l'inconnuë de l'égalité égale à une autre inconnuë moins la grandeur qu'on a déterminée. Et mettant par tout dans l'égalité la valeur ſuppoſée de ſon inconnuë autant qu'on le pourra, l'égalité ſera transformée dans une autre, dont les racines réſoudront la queſtion.

EXEMPLE.

Pour augmenter de 3 chacune des racines de l'égalité $z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 \propto 0$. On ſuppoſera $y \propto z + 3$, ou $z \propto y - 3$. Et mettant $y - 3$ pour z, & le quarré $yy - 6y + 9$ pour zz, & le cube $y^3 - 9yy + 27y - 27$ pour z^3, & $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$ pour z^4; toutes les valeurs des parties étant raſſemblées fourniront une autre égalité $y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y \propto 0$ au lieu de celle qu'on avoit propoſée. Et parce qu'il arrive en la diviſant par y, qu'on la réduit à celle-ci du troiſiéme degré $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$; on eſt aſſuré que -3 eſt une valeur au juſte de l'inconnuë z, ou qu'on peut diviſer ſans reſte la propoſée par une égalité ſimple $z + 3 \propto 0$. Ce qui fournit un expoſant $z^3 + 1zz - 22z - 40 \propto 0$.

$$\begin{array}{r} \textit{Propoſée} \quad 1z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 \propto 0. \\ \hline \left.\begin{array}{r} \cancel{1}z^4 \propto 1y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ + \cancel{4}z^3 \propto + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ - \cancel{19}zz \propto - 19yy + 114y - 171 \\ - \cancel{106}z \propto - 106y + 318 \\ - \cancel{120} \propto - 120 \end{array}\right\} \propto 0. \\ \hline \textit{Transformée} \quad 1y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y \quad * \quad \propto 0. \end{array}$$

$$1y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0 \propto \frac{1y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y}{1y} \propto 0.$$

PROBLEME VI.

20. *Pour diminuer les racines d'une égalité de telle quantité qu'on voudra, ſans qu'on les connoiſſe.*

On supposera l'inconnuë de l'égalité égale à une autre inconnuë plus la grandeur qu'on a déterminée. Et mettant par tout pour l'inconnuë sa valeur supposée, l'égalité sera transformée dans une autre, dont les racines résoudront la question.

EXEMPLE.

Pour diminuer de 3 chacune des racines de l'égalité $1z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 \propto 0$. On supposera $1y \propto z - 3$, ou $z \propto 1y + 3$. Et mettant par tout dans l'égalité la valeur $1y + 3$ de l'inconnuë z, la somme des parties rassemblées fournira une autre égalité $1y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$, dont les racines seront les mêmes de la précédente diminuées chacune de 3.

$$\begin{array}{rrl}
\textit{Proposée} & 1z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 \propto 0. & \\
\cancel{1z^4} \propto & 1y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 & \\
+ \cancel{4z^3} \propto & + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 & \\
- \cancel{19zz} \propto & - 19yy - 114y - 171 & \Big\} \propto 0. \\
- \cancel{106z} \propto & - 106y - 318 & \\
- \cancel{120} \propto & - 120 & \\
\textit{Transformée} & 1y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0. &
\end{array}$$

I COROLLAIRE ET PROBLEME VII.

21. *Pour faire évanoüir le second terme d'une égalité, sans connoître aucune des racines.*

On divisera la grandeur connuë au second terme par le nombre des dimensions. Et ensuitte s'il y a + dans ce terme, on retranchera de [b] chaque racine la grandeur que fournit l'exposant de la division. Et s'il y a —, on augmentera [c] de la même quantité chacune des racines. Les exemples éclairciront & fixeront ces régles.

b. 20.
c. 19.

PREMIER EXEMPLE.

Pour faire évanoüir le second terme de l'égalité $z^4 + 16z^3 + 71zz - 4z - 420 \propto 0$. On divisera le nombre 16 connu au second terme $+ 16z^3$ par le nombre 4 des dimensions de l'égalité ou du terme inconnu z^4. Et parcequ'on trouve le signe + au second terme, on augmentera [b] de 4 chacune des racines, en supposant $1z \propto 1y - 4$. &c. Et l'égalité $1y^{4*} - 25yy - 60y - 36 \propto 0$ n'aura point de second terme. Et ses racines seront les mêmes que celles de la proposée augmentées chacune de 4.

b. 19.

$$\begin{array}{rrl}
\textit{Proposée} & 1z^4 + 16z^3 + 71zz - 4z - 420 \propto 0. & \\
\cancel{1z^4} \propto & 1y^4 - 16y^3 + 96yy - 256y + 256 & \\
+ \cancel{16z^3} \propto & + 16y^3 - 192yy + 768y - 1024 & \\
+ \cancel{71zz} \propto & + 71yy - 568y + 1136 & \Big\} \propto 0. \\
- \cancel{4z} \propto & - 4y + 16 & \\
- \cancel{420} \propto & - 420 & \\
\textit{Transformée} & 1y^4 \quad * \quad - 25yy - 60y - 36 \propto 0. &
\end{array}$$

SECOND EXEMPLE.

Pour faire évanoüir le second terme de l'égalité $1z^4 - 2az^3 \begin{array}{l} + 2aazz \\ - 2a^3z \end{array}$

$-2a^3z + a^4 \propto 0$. On divisera la quantité $2a$ connuë au second terme par le nombre 4 des dimensions du terme inconnu $1z^4$. Et parcequ'il y a $+$ au second terme, on ôtera [c] l'exposant $\frac{1}{2}a$ de chaque racine de l'éga- c. 20.
lité, supposant pour cela $1y \propto 1z - \frac{1}{2}a$, ou $1z \propto 1y + \frac{1}{2}a$. Et l'égalité $1y^4 \; * \; \begin{matrix} +\frac{1}{2}aayy - a^3y + \frac{5}{16}a^4 \\ -ccyy - accy - \frac{1}{4}aacc \end{matrix} \propto 0$ n'aura point de second terme. Et ses racines seront les mêmes que celles de la proposée diminuées chacune de la quantité $\frac{1}{2}a$.

$$\textit{Proposée } 1z^4 - 2az^3 \begin{matrix} +2aazz \\ -cczz \end{matrix} - 2a^3z + 1a^4 \propto 0.$$

$$\left.\begin{array}{rl}
1z^4 \propto & 1y^4 + 2ay^3 + \frac{3}{2}aayy + \frac{1}{2}a^3y + \frac{1}{16}a^4 \\
-2az^3 \propto & -2ay^3 - 3aayy - \frac{3}{2}a^3y - \frac{1}{4}a^4 \\
+2aazz \propto & +2aayy + 2a^3y + \frac{1}{2}a^4 \\
-1cczz \propto & -ccyy - accy - \frac{1}{4}aacc \\
-2a^3z \propto & -2a^3y - 1a^4 \\
+1a^4 \propto & +1a^4
\end{array}\right\} \propto 0.$$

$$\textit{Transformée } 1y^4 \quad * \quad \begin{matrix} +\frac{1}{2}aayy - a^3y + \frac{5}{16}a^4 \\ -ccyy - accy - \frac{1}{4}aacc \end{matrix}$$

II COROLLAIRE.

22. EN toute égalité, où le second terme est évanoüi, il y aura toûjours égalité sous différens signes entre toutes les racines d'une part qui ont le signe $+$, & toutes celles de l'autre qui ont le signe $-$; puisque la somme des unes & des autres est [b] égale à zéro par la supposition b. 9.
même.

III COROLLAIRE ET PROBLEME VIII.

Pour la resolution des egalitez planes.

23. *POur rapporter tous les différens cas des égalitez du second degré à une seule régle.*

On en fera évanoüir le second terme. Et alors une des racines sera connuë immédiatement, & servira ensuitte pour découvrir l'autre. Et même l'une & l'autre pourra être immédiatement connuë ou déterminée.

PREMIER CAS.

Pour résoudre toute égalité plane $zz - nz + p \propto 0$. On fera évanoüir le ſecond terme, en retranchant $\frac{1}{2}n$ de chacune des racines. Ce qui fournira une autre égalité $yy * - \frac{1}{4}nn + p \propto 0$. D'où l'on tirera une valeur $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & encore une $y \propto -\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Et ajoûtant $\frac{1}{2}n$ à chacune de ces deux valeurs, on trouvera une autre valeur $z \propto \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & encore une $z \propto \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Et chacune de ces deux racines ſera poſitive, ſi $\frac{1}{4}nn$ ſurpaſſe $1p$. Mais ſi $1p$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}nn$; l'une & l'autre ſera imaginaire.

SECOND CAS.

Et ſi l'égalité eſt $zz + nz + p \propto 0$. On ajoûtera $\frac{1}{2}n$ à chacune des racines. Et l'égalité $yy * - \frac{1}{4}nn + p \propto 0$ donnera une valeur $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & encore une $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Et ôtant $\frac{1}{2}n$ de chacune de ces deux valeurs, on trouvera une valeur $z \propto -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & encore une $-\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Et l'une & l'autre ſera fauſſe ſi $\frac{1}{4}nn$ ſurpaſſe $1p$. Mais chacune ſera imaginaire, ſi $1p$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}nn$.

TROISIEME CAS.

Et ſi l'égalité eſt $zz - nz - p \propto 0$; on trouvera de la même ſorte une vraie racine $\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$, & une fauſſe $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$. Et ce cas n'en ſouffrira jamais aucune imaginaire.

QUATRIEME CAS.

Et enfin ſi l'égalité eſt $zz + nz - p \propto 0$; on trouvera toûjours par la même méthode une vraie racine $1z \propto -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$, & une fauſſe $1z \propto -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$. Et ce cas n'en aura jamais aucune imanaire.

PROBLEME IX.

24. *Pour multiplier les racines d'une égalité par telle grandeur qu'on voudra, ſans qu'on les connoiſſe.*

On ſuppoſe une autre inconnuë égale au produit de l'inconnuë dans l'égalité par la grandeur que l'on détermine. Enſuitte on met par tout la nouvelle inconnuë à la place de la premiére, & on multiplie de plus le ſecond terme par la grandeur qu'on a déterminée, & le troiſiéme par le quarré de la même grandeur, & le quatriéme par ſon cube. Et ainſi du reſte.

Exemple.

Pour multiplier par c chaque racine de l'égalité $z^3 - azz + abz - abc \propto 0$. On ſuppoſera $cz \propto 1y$. Et conſidérant toute l'égalité propoſée comme multipliée par c^3, ce qui donneroit $c^3z^3 - ac^3zz + abc^3z - abc^4 \propto 0$; on écrira $1y^3$ pour c^3z^3, & $- acyy$ pour $- ac^3zz$, & $+ abccy$ pour $+ abc^3z$, & $- abc^4$ pour $- abc^4$. Ou ce qui revient au même, on écrira $1y^3$ pour le premier terme de l'égalité nouvelle, & on multipliera $- a$ par c au ſecond, & $+ ab$ par cc, & $- abc$ par c^3 au quatriéme. Et l'égalité $y^3 - acyy + abccy - abc^4 \propto 0$ aura pour ſes racines celles de la propoſée multipliées chacune par $1c$.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Propoſée } 1z^3 - azz + abz - abc \propto 0. \left\{ 1c^3z^3 \propto 1y^3.\ cczz \propto 1yy.\ cz \propto 1y. \right. \\ \textit{Produit } c^3z^3 - ac^3zz + abc^3z - abc^4 \propto 0 \propto 1y^3 - acyy + abccy - abc^4 \propto 0. \end{array}\right.$$

PROBLEME X.

25. *Pour diviſer les racines d'une égalité par telle grandeur qu'on voudra, ſans qu'on les connoiſſe.*

On ſuppoſe une autre inconnuë égale à l'expoſant de l'inconnuë dans l'égalité diviſée par la grandeur que l'on détermine. Enſuitte on met par tout la nouvelle inconnuë à la place de la premiére. Et on diviſe le ſecond terme par la grandeur qu'on a déterminée, & le troiſiéme par le quarré de la même grandeur, & le quatriéme par ſon cube. Et ainſi du reſte.

Exemple.

Pour diminuer le nombre des diviſeurs du dernier terme 64 de l'égalité $1z^3 - 8zz - 124z - 64 \propto 0$. On pourra diviſer chacune des racines par 2, ou chaque terme par 8, ce qui revient au même. Et prenant $1y$ pour $\frac{1z}{2}$, on écrira $1y^3$ pour le premier terme; & on diviſera au ſecond $- 8$ par 2, pour écrire $- 4yy$; & on diviſera $- 124$ au troiſiéme par 4, & on écrira $- 31y$. Et au dernier on diviſera $- 64$ par 8, & on écrira $- 8$. Et l'égalité $1y^3 - 4yy - 31y - 8 \propto 0$ aura pour ſes racines celles de la propoſée diviſées chacune par 2. Et le dernier terme 8 aura moins de diviſeurs que le dernier 64.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Propoſée } 1z^3 - 8zz - 124z - 64 \propto 0. \left\{ \frac{1z^3}{8} \propto 1y^3.\ \frac{1zz}{4} \propto 1yy.\ \frac{1z}{2} \propto 1y. \right. \\ \textit{Expoſant } \frac{1z^3 - 8zz - 124z - 64}{8} \propto 0 \propto 1y^3 - 4yy - 31y - 8 \propto 0. \end{array}\right.$$

COROLLAIRE ET PROBLEME XI.

26. *Pour délivrer une égalité des fractions que ſes termes contiennent.*

On multiplie chacune des racines par le plus grand produit, que peuvent divifer tous les conféquens des fractions qui font au fecond terme ; & par la racine d'un femblable produit pour le troifiéme terme, ou par le produit entier, fi la racine eft incommenfurable ; & par la racine cubique d'un femblable produit pour le quatriéme terme, ou par le produit entier, fi la racine cubique eft incommenfurable.

PREMIER EXEMPLE.

Pour délivrer l'égalité $\begin{array}{l} \quad\ -\frac{1}{2}czz + \frac{1}{4}acz \\ z^3 - \frac{1}{2}azz + \frac{1}{8}abz - \frac{1}{16}abc \propto 0 \\ \quad\ -\frac{1}{4}bzz + \frac{1}{8}bcz \end{array}$ de toutes les fractions qui s'y trouvent. On prendra le plus grand nombre 4 que peuvent divifer tous les dénominateurs 2 & 4 qui fe trouvent au fecond terme. Et enfuitte on multipliera chacune des racines par 4, ou chaque terme par 64, en fuppofant $1y \propto 4z$. Ce qui fournira cette égalité $\begin{array}{l} \quad\ -2cyy + 4acy \\ 1y^3 - 2ayy + 2aby - 4abc \propto 0 \\ \quad\ -1byy + 2bcy \end{array}$, où chaque racine y vaudra $4z$.

SECOND EXEMPLE.

Pour délivrer l'égalité $z^3 - \frac{5}{4}zz + \frac{7}{12}z - \frac{1}{12} \propto 0$ des fractions qui s'y trouvent. On multipliera premiérement chacune des racines par 4, ou chaque terme par 64, en fuppofant $1y \propto 4z$. Et on aura cette égalité $1y^3 - 5yy + \frac{28}{3}y - \frac{16}{3} \propto 0$, dont les racines feront celles de la propofée multipliées par 4. Et parcequ'il y a encore des fractions dans cette égalité; on la multipliera par 27, ou chacune de fes racines par le dénominateur 3 qui eft au fecond terme, & qui n'a point une racine quarrée commenfurable. Suppofant donc $1x \propto 3y$, on trouvera l'égalité $x^3 - 15xx + 84x - 144 \propto 0$, dont les racines feront celles de la précédente multipliées par 3, ou celles même de la propofée multipliées par 12.

TROISIEME EXEMPLE.

Pour délivrer l'égalité $1z^3 - 1zz\sqrt{3} + \frac{26}{27}z - \frac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0$. On prendra au quatriéme terme la racine cubique 3 de 27, & $\sqrt{3}$ dont la racine cubique n'eft point commenfurable. Et on multipliera chacune des racines par $3\sqrt{3}$, ou toute l'égalité par $27\sqrt{27}$, en fuppofant $3z\sqrt{3} \propto 1y$. Ce qui fournira l'égalité $1y^3 - 9yy + 26y - 24 \propto 0$, dont les racines feront celles de la propofée multipliées par $3\sqrt{3}$.

PROBLEME XII.

27 *POur délivrer une égalité des grandeurs incommenfurables que fes termes contiennent.*

Si ces grandeurs ont le ſigne $\surd$; on en choiſira une, & on en fera un des membres de l'égalité. On quarrera enſuitte chaque membre. Et la nouvelle égalité ne renfermera plus cette incommenſurable. On fera enſuitte la même choſe pour chaque autre incommenſurable. Et à la fin on n'en trouvera plus.

Mais ſi le ſigne des incommenſurables eſt $\surd C$. On en choiſira une, & on en fera un des membres de l'égalité. On cubera enſuitte chaque membre. Et rejettant d'une part toutes les parties, où une autre incommenſurable n'aura qu'un ou deux degrez, on multipliera chacun des deux membres par la même incommenſurable; & on prendra dans l'égalité la valeur du quarré de l'incommenſurable, pour la ſubſtituer dans la ſeconde égalité. Et alors on en trouvera une où l'incommenſurable n'aura plus qu'un degré. De ſorte que ſi on en fait un des membres de l'égalité, & qu'on cube enſuitte de part & d'autre; cette ſeconde incommenſurable ne ſe trouvera plus. Et toutes les autres pourront être ôtées de la même ſorte. L'uſage de cette régle eſt tres-rare, lors ſur tout que les incommenſurables ſont engagées ſous le ſigne radical $\surd C$.

PREMIER EXEMPLE.

Pour délivrer l'égalité $x^3 * - x\surd a + \surd b \propto 0$ des grandeurs incommenſurables $\surd a$ & $\surd b$. On pourra ſuppoſer pour la facilité de l'opération, $\surd a \propto p$, & $\surd b \propto q$; ou $x^3 * - px + q \propto 0$ pour $x^3 * - x\surd a + \surd b \propto 0$. Et tranſpoſant alors, on aura $px \propto x^3 + q$. Et quarrant de part & d'autre, on trouvera $ppxx \propto x^6 + 2qx^3 + qq$. Ou $2qx^3 \propto ppxx - x^6 - qq$. & quarrant encore chacun des deux membres, on aura $4qqx^6 \propto p^4x^4 - 2ppx^8 + x^{12} - 2ppqqxx + 2qqx^6 + q^4$. Ou $x^{12} * - 2ppx^8 - 2qqx^6 + p^4x^4 - 2ppqqxx + q^4 \propto 0$. Ce qui eſt une égalité du 12^e^ degré, mais qui doit ſeulement paſſer pour une du ſixiéme, parceque le nombre des degrez de l'inconnuë eſt pair par tout où elle ſe rencontre. S'il y eût eü trois grandeurs incommenſurables; la derniére égalité qui en eût été délivrée, auroit eü 24 degrez, qui n'auroient paſſé que pour 12.

SECOND EXEMPLE.

Pour délivrer l'égalité $x^3 * - x\surd C.a + \surd C.b \propto 0$ des grandeurs incommenſurables $\surd C.a$ & $\surd C.b$. On ſuppoſera $p \propto \surd C.a$, & $q \propto \surd C.b$; ou $x^3 * - px + q$ pour $x^3 * - x\surd C.a + \surd C.b \propto 0$. Et tranſpoſant alors, on aura $px \propto x^3 + q$. Et cubant chaque membre, l'égalité ſera $p^3x^3 \propto x^9 + 3qx^6 + 3qqx^3 + q^3$. Et $3qx^6 + 3qqx^3 \propto p^3x^3 - x^9 - q^3$. Et pour abbreger, ſuppoſant $f \propto p^3x^3 - x^9 - q^3$, où rien n'eſt incommenſurable; la même égalité ſera $3qx^6 + 3qqx^3 \propto 1f$. Et multipliant par q de part & d'autre, on aura $3qqx^6 + 3q^3x^3 \propto fq$. Ou $3qqx^6 \propto fq - 3q^3x^3$. Et $qq \propto \frac{fq - 3q^3x^3}{3x^6}$. Et mettant cette valeur de qq dans la ſeconde égalité $3qx^6 + 3qqx^3 \propto 1f$, on trouve $3qx^6 + \frac{fq}{x^3} - q^3 \propto f$. Et tout étant multiplié par x^3, on aura $3qx^9 + fq - q^3x^3 \propto fx^3$. Ou $3qx^9 + fq \propto fx^3 + q^3x^3$. Et cubant de part & d'autre ? l'égalité sera $27q^3x^{27} + 27q^3fx^{18} + 9q^3ffx^9 + q^3f^3 \propto f^3x^9 + 3ffq^3x^9 + 3fq^6x^9 + q^9x^9$. Et remettant pour f sa valeur $p^3x^3 - x^9 - q^3$, & disposant par ordre tous les termes, on aura l'égalité $x^6 \; * + 3p^3x^{30} - 10q^3x^{27} - 3p^6x^{24} - 12p^3q^3x^{21} \begin{array}{l} + 12q^6x^{18} \\ + p^9x^{18} \end{array} - 6p^6q^3x^{15} + 12p^3q^6x^{12} \begin{array}{l} - 3q^9x^9 \\ - p^9q^3x^9 \end{array} + 3p^6q^6x^6 - 3p^3q^9x^3 + q^{12} \propto 0$. Et quoi qu'elle ait 36 degrez, on n'en considére néanmoins que 12, parce-que l'inconnuë est cubique par tout.

NOUVEAUX ELEMENS DES MATHEMATIQUES

LIVRE NEUVIEME.

DE LA RESOLUTION DES EGALITEZ SELON LEURS DIFFERENS DEGREZ.

Definitions.

1. ON nommera transformation d'une égalité le changement de cette égalité en une autre, où certaines inconnuës marquent les rapports des racines, ou de leurs plans alternatifs, ou de leurs surfolides alternatifs, &c. Et l'égalité nouvelle où seront ces inconnuës sera nommée la transformée de celle qu'on propose. On continuëra de transporter d'une part chaque égalité pour la rendre égale à zéro, comme on l'a fait par tout au Livre précédent.

I PROBLEME.

Pour la transformation des egalitez planes.

P*Our résoudre par la transformation les égalitez planes ou du second degré.*

Ayant nommé $+n$ ou $-n$ la quantité connuë au second terme, & $+p$ ou $-p$ la quantité connuë au troisiéme terme; l'égalité aura l'une de ces quatre formes.

1ere *forme.*	2e *forme.*	3e *forme.*	4e *forme.*
$zz - nz + p \infty 0.$	$zz + nz + p \infty 0.$	$zz - nz - p \infty 0.$	$zz + nz - p \infty 0.$

PREMIER CAS.

Lorsque le quarré $\frac{1}{4}nn$ n'est pas moindre que p.

2. **E**T si les racines de la premiére forme n'ont rien d'imaginaire ; la disposition des signes apprend qu'elles sont vraies. C'est pourquoi si leur somme est nommée $2a$, & leur différence $2b$; la plus grande est $a+b$, & la moindre $a-b$. Et chacune étant une valeur de l'inconnuë z, on aura deux égalitez simples $z-a-b \propto 0$, & $z-a+b \propto 0$. Et leur plan $zz-2az\begin{matrix}+aa\\-bb\end{matrix} \propto 0$ est l'égalité transformée de la plane $zz-nz+p \propto 0$, & il est permis de la prendre pour elle. Mais les termes de l'une étant égaux aux termes de l'autre chacun à chacun & selon le même ordre, leur comparaison fournira trois égalitez ; la premiére $zz \propto zz$ des deux premiers termes zz & zz, qui ne fait rien connoître ; & la seconde $2az \propto nz$ des deux seconds termes $-2az$ & $-nz$, d'où l'on tire une valeur $2a \propto n$, ou $1a \propto \frac{1}{2}n$; & la troisiéme $aa-bb \propto p$ des deux derniers termes, qui donne par transposition cette autre égalité $aa \propto p+bb$, & $1a \propto \sqrt{p+bb} \propto \frac{1}{2}n$. De sorte que quarrant chaque membre, on aura celle-ci $p+bb \propto \frac{1}{4}nn$, ou $bb \propto \frac{1}{4}nn-p$. Et $b \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$. Et ainsi les deux racines seront, la premiére $a+b \propto \frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, & la seconde $a-b \propto \frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$. Et parce qu'elles sont vraies, comme on l'a supposé, le quarré $\frac{1}{4}nn$ n'est pas moindre que p.

Transformation, & comparaison des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz-nz+p \propto 0. \\ \hline zz-2az\begin{matrix}+aa\\-bb\end{matrix} \propto 0. \end{array}\right. \quad \{1zz \propto 1zz. \quad \left\{\begin{array}{l} 2az \propto nz. \\ 1a \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa-bb \propto p. \\ a \propto \sqrt{p+bb} \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} p+bb \propto \frac{1}{4}nn. \\ b \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn-p}. \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz-nz+p \propto 0. \\ zz-6z+8 \propto 0. \\ zz-6z+9 \propto 0. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\textit{Racines}\\ \textit{vraies.}\end{array} \left\{\begin{array}{ll} z \propto \frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}. & z \propto \frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}. \\ z \propto 3+\sqrt{9-8}. & z \propto 3-\sqrt{9-8}. \\ z \propto 3+\sqrt{9-9}. & z \propto 3+\sqrt{9-9}. \end{array}\right.$$

SECOND

SECOND CAS.

Si le quarré $\frac{1}{4}nn$ n'eſt pas moindre que p.

3. ET ſi la ſeconde forme $zz + nz + p \propto 0$ n'a point de racines imaginaires ; la diſpoſition des ſignes apprendra que chacune eſt fauſſe. Nommant donc leur ſomme $-2a$, & leur différence $-2b$, la grande eſt $-a-b$, & la moindre $-a+b$. Et le plan des deux égalitez ſimples $z + a + b \propto 0$ & $z + a - b \propto 0$ fournit la transformée $zz + 2az \begin{smallmatrix}+aa\\-bb\end{smallmatrix} \propto 0$ de celle qu'on propoſe. Et la comparaiſon des termes donne une valeur $a \propto \frac{1}{2}n$, & une autre $b \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Et le quarré $\frac{1}{4}nn$ ne peut pas être plus petit que p.

Transformation, & comparaiſon des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz + p \propto 0. \\ \hline zz + 2az \begin{smallmatrix}+aa\\-bb\end{smallmatrix} \propto 0. \end{array}\right. \quad \{1zz \propto 1zz. \quad \left\{\begin{array}{l} 2az \propto n. \\ 1a \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - bb \propto p. \\ a \propto \sqrt{p + bb} \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} p + bb \propto \frac{1}{4}nn. \\ b \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \end{array}\right.$$

Réſolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz + p \propto 0. \\ zz + 6z + 8 \propto 0. \\ zz + 6z + 9 \propto 0. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\textit{Racines}\\ \textit{fauſſes.}\end{array} \left\{\begin{array}{ll} z \propto -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. & z \propto -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \\ z \propto -3 - \sqrt{9 - 8}. & z \propto -3 + \sqrt{9 - 8}. \\ z \propto -3 - \sqrt{9 - 9}. & z \propto -3 + \sqrt{9 - 9}. \end{array}\right.$$

TROISIEME CAS.

4. DAns la troiſiéme forme $zz - nz - p \propto 0$, l'une des racines eſt toûjours vraie, & l'autre toûjours fauſſe. Et la vraie ſous ſon ſigne ſurpaſſe la fauſſe ſous le ſien. Et la transformée $zz - 2bz \begin{smallmatrix}-aa\\+bb\end{smallmatrix} \propto 0$ eſt un plan des deux égalitez ſimples $z - a - b \propto 0$ & $z + a - b \propto 0$. Et la comparaiſon des termes fournit une valeur $b \propto \frac{1}{2}n$, & une autre $a \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$.

Transformation, & comparaiſon des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - nz - p \propto 0. \\ \hline zz - 2bz \begin{smallmatrix}-aa\\+bb\end{smallmatrix} \propto 0. \end{array}\right\} \quad \{1zz \propto 1zz. \left\{\begin{array}{l} 2bz \propto n. \\ 1b \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - bb \propto p. \\ b \propto \sqrt{aa - p} \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - p \propto \frac{1}{4}nn. \\ a \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}. \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - nz - p \propto 0. \\ zz - 6z - 16 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{vraie } 1z \propto \tfrac{1}{2}n + \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}. \quad \textit{fausse } 1z \propto \tfrac{1}{2}n - \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}. \\ \textit{vraie } 1z \propto 3 + \sqrt{9 + 16}. \quad \textit{fausse } 1z \propto 3 - \sqrt{9 + 16}. \end{array}\right.$$

QUATRIEME CAS.

5. DAns la quatriéme forme $zz + nz - p \propto 0$, l'une des racines est toûjours vraie, & l'autre toûjours fausse. Et la vraie sous son signe vaut moins que la fausse sous le sien. Et la transformée $zz + 2bz \begin{smallmatrix} -aa \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ est un plan des deux égalitez simples $z - a + b \propto 0$ & $z + a + b \propto 0$. Et la comparaison des termes fournit encore une valeur $b \propto \tfrac{1}{2}n$, & une autre $a \propto \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}$.

Transformation, & comparaison des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz - p \propto 0. \\ \hline zz + 2bz \begin{smallmatrix} -aa \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0. \end{array}\right. \{ 1zz \propto 1zz. \left\{\begin{array}{l} 2bz \propto n. \\ 1b \propto \tfrac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - bb \propto p. \\ b \propto \sqrt{aa - p} \propto \tfrac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa - p \propto \tfrac{1}{4}nn. \\ a \propto \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}. \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz - p \propto 0. \\ zz + 6z - 16 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{vraie } 1z \propto -\tfrac{1}{2}n + \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}. \quad \textit{fausse } 1z \propto -\tfrac{1}{2}n - \sqrt{\tfrac{1}{4}nn + p}. \\ \textit{vraie } 1z \propto -3 + \sqrt{9 + 16}. \quad \textit{fausse } 1z \propto -3 - \sqrt{9 + 16}. \end{array}\right.$$

PREMIER CAS.

POUR LES IMAGINAIRES.

Le quarré $\tfrac{1}{4}nn$ est plus petit que p.

6. SI les racines de la premiére forme $zz - nz + p \propto 0$ sont imaginaires ; on pourra nommer $2a$ la somme des deux racines, & $\sqrt{-bb}$ la contradiction de chacune, ou prendre $a + \sqrt{-bb}$ pour l'une, & $a - \sqrt{-bb}$ pour l'autre. Et les deux égalitez $z - a - \sqrt{-bb} \propto 0$ & $z - a + \sqrt{-bb} \propto 0$ formeront par leur produit la transformée $zz - 2az \begin{smallmatrix} +aa \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ de celle qu'on propose. Et comparant les termes, on trouvera $1a \propto \tfrac{1}{2}n$, & $\sqrt{-bb} \propto \sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p}$.

Transformation, & comparaiſon des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - nz + p \propto 0. \\ \hline zz - 2az \begin{array}{l} +aa \\ +bb \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \quad \{ 1zz \propto 1zz. \left\{\begin{array}{l} 2az \propto nz. \\ 1a \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa + bb \propto p. \\ a \propto \sqrt{p - bb} \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} p - bb \propto \frac{1}{4}nn. \\ \sqrt{-bb} \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \end{array}\right.$$

Réſolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - nz + p \propto 0. \\ zz - 6z + 13 \propto 0. \end{array}\right. \quad \textit{Racines imaginaires.} \left\{\begin{array}{ll} 1z \propto \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. & 1z \propto \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \\ 1z \propto 3 + \sqrt{9 - 13}. & 1z \propto 3 - \sqrt{9 - 13}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

POUR LES IMAGINAIRES.

Le quarré $\frac{1}{4}nn$ eſt plus petit que p.

7. SI les racines de la ſeconde forme $zz + nz + p \propto 0$ ſont imaginaires ; on fera la transformation, & on en tirera les valeurs à peu prés de la même ſorte que dans le cas précédent. J'aurois pû me diſpenſer d'expliquer ainſi le détail de tous les cas des égalitez planes, puiſqu'on a déja donné leur réſolution en [b] deux [c] maniéres différentes. Mais j'ai crû qu'il ſeroit tres-utile de diſpoſer par les transformations plus faciles, à celles des égalitez plus compoſées que ne ſont les planes.

b. 15. 8. &c.
c. 23. 8.

Transformation, & comparaiſon des termes.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz + p \propto 0. \\ \hline zz + 2az \begin{array}{l} +aa \\ +bb \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \quad \{ 1zz \propto 1zz. \left\{\begin{array}{l} 2az \propto nz. \\ 1a \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} aa + bb \propto p. \\ a \propto \overline{p - bb} \propto \frac{1}{2}n. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} p - bb \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn}. \\ \sqrt{-bb} \propto \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \end{array}\right.$$

Réſolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz + nz + p \propto 0. \\ zz + 6z + 13 \propto 0. \end{array}\right. \quad \textit{Racines imaginaires.} \left\{\begin{array}{ll} 1z \propto -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. & 1z \propto -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \\ 1z \propto -3 + \sqrt{9 - 13}. & 1z \propto -3 - \sqrt{9 - 13}. \end{array}\right.$$

II PROBLEME.

POur transformer une égalité du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi.

Ayant nommé $+p$ ou $-p$ la quantité connuë au troiſiéme terme, & $+q$ ou $-q$ la quantité connuë dans le quatriéme ; l'égalité aura l'une de ces quatre formes.

$\left\{\begin{matrix}\textit{1}^{ere}\ \textit{forme} \\ 1y^3 * -py-q \propto 0.\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\textit{2}^{e}\ \textit{forme.} \\ 1y^3 * +py-q \propto 0.\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\textit{3}^{e}\ \textit{forme.} \\ 1y^3 * +py+q \propto 0.\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\textit{4}^{e}\ \textit{forme.} \\ 1y^3 * +py+q \propto 0.\end{matrix}\right.$

Et ces quatre ſe pourront réduire aux deux premiéres, en changeant $+q$ en $-q$, ce qui change ſeulement une racine fauſſe en vraie, & deux vraies en fauſſes; ou les ſignes de deux imaginaires, ſi l'égalité renferme une contradiction.

PREMIER CAS.

Lorſque nulle racine n'eſt imaginaire

8. ET ſi l'égalité $1y^3 * -py-q \propto 0$ de la première forme n'a aucune racine imaginaire; la diſpoſition des ſignes fait juger que l'une eſt vraie, & les deux autres fauſſes; en ſuppoſant un ſigne $+$ ou $-$ au ſecond terme, quoiqu'il ſoit évanoüi. Et le ſecond terme évanoüi eſt
b. 11. 8. une marque aſſurée [b] que la racine vraie renferme ſous ſon ſigne une même grandeur que les deux fauſſes enſemble ſous le leur. De ſorte qu'ayant nommé $-2a$ la ſomme des deux fauſſes, & $-2b$ leur différence, l'une des fauſſes eſt $-a-b$, & l'autre eſt $-a+b$, & la vraie eſt $2a$. Ce qui fournit les trois égalitez ſimples $1y+a+b \propto 0$, $1y+a-b \propto 0$, & $1y-2a \propto 0$, dont le ſolide $1y^3 * \begin{matrix}-3aay & -2a^3 \\ -1bby & +2abb\end{matrix} \propto 0$ eſt l'égalité transformée de la propoſée $z^3 * -pz-q \propto 0$, où l'on ne ſuppoſe aucune contradiction.

Lorſque nulle racine n'eſt imaginaire.

$\{$ *1^ere forme* $1y^3 * -py-q \propto 0.$ $\{$ *Sa transformée* $1y^3 * \begin{matrix}-3aay & -2a^3 \\ -1bby & +2abb\end{matrix} \propto 0.$

I COROLLAIRE.

POUR LA PREMIERE ESPECE

où les racines fauſſes ſont égales.

9. SI dans le même genre des égalitez ſolides ou de trois degrez, où nulle racine n'eſt imaginaire, les deux fauſſes ſont égales; leur différence $2b$ ſera nulle. De ſorte qu'effaçant $-1bby-2abb$ dans la transformée qu'on a découverte, on aura cette égalité $1y^3 * -3aay-2a^3 \propto 0$ pour transformée de la propoſée $1y^3 * -py-q \propto 0$. Et alors la comparaiſon des troiſiémes termes $-3aay$ & $-py$ donnera une valeur $3aa \propto 1p$, ou $1aa \propto \frac{1}{3}p$. Et la comparaiſon des quatriémes termes $2a^3$ & q donnera $1a^3 \propto \frac{1}{2}q$. Et $\frac{2a^3}{1aa} \propto 2a \propto \frac{3q}{1p}$. De ſorte que la vraie racine $2a$ ſera $\frac{3q}{1p}$, & chacune des deux fauſſes $-1a$ & $-1a$ ſera $-\frac{3q}{2p}$. Et dans ce premier cas, ſi on cube $1aa$ ou $\frac{1}{3}p$, & qu'on quarré $1a^3$ ou $\frac{1}{2}q$, on trouvera

de part & d'autre une même valeur $1a^6 \propto \frac{1}{27}p^3 \propto \frac{1}{4}qq$. Ainsi lorsque le cube $\frac{1}{27}p^3$ du tiers de la grandeur connuë p du troisiéme terme égalera le quarré $\frac{1}{4}qq$ de la moitié de la grandeur q connuë dans le quatriéme ; il sera facile de déterminer les racines.

Le cube $\frac{1}{27}p^3$ égale le quarré $\frac{1}{4}qq$.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ \textit{forme}\ 1y^3 * - py - q \propto 0. \\ \textit{Transformée}\ 1y^3 * - 3aay - 2a^3 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1aa \propto \frac{1}{3}p.\ 2a^3 \propto 1q.\ \frac{2a^3}{1aa} \propto 2a \propto \frac{3q}{1p}. \\ \textit{Racine vraie} + \frac{3q}{1p}.\ \textit{fausses} - \frac{3q}{2p}\ \&\ - \frac{3q}{2p}. \end{array}\right.$$

II COROLLAIRE.

POUR RESOUDRE LA SECONDE ESPECE

Où les racines fausses sont inégales.

10. Si les racines fausses du même genre ou du même cas sont inégales ; le cube $\frac{1}{27}p^3$ surpasse toûjours le quarré $\frac{1}{4}qq$. Car la comparaison des seconds termes $-1p$ & $-3aa - 1bb$, donne $\frac{1}{3}p \propto 1aa + \frac{1}{3}bb$. Et les cubes des membres forment l'égalité $\frac{1}{27}p^3 \propto 1a^6 + a^4bb + \frac{1}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$. Et la comparaison des quatriémes termes $1q$ & $2a^3 - 2abb$ donne $\frac{1}{2}q \propto a^3 - abb$. Et les quarrez des membres forment l'égalité $\frac{1}{4}qq \propto a^6 - 2a^4bb + aab^4$. Et ôtant cette égalité de la précédente, ou le quarré $\frac{1}{4}qq$ du cube $\frac{1}{27}p^3$, & la valeur du quarré de la valeur du cube, le reste $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq \propto 3a^4bb - \frac{2}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$ est positif. Car a surpasse b, & $3a^4bb$ surpasse par consequent $\frac{2}{3}aab^4$, puisque ces deux parties étant divisées l'une & l'autre par $aabb$, & multipliées par 3 ; on trouve $9aa$ d'une part, & $2bb$ de l'autre, qui vaut moins que $9aa$. Et ainsi $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$.

Le cube $\frac{1}{27}p^3$ surpasse le quarré $\frac{1}{4}qq$.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ \textit{forme}\ 1y^3 * \underline{- py} \ \underline{- q} \propto 0 \\ \textit{Transformée}\ 1y^3 * \begin{array}{l} -3aay - 2a^3 \\ -1bby + 2abb \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto 1a^6 + a^4bb + \frac{1}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6 \\ \frac{1}{4}qq \propto 1a^6 - 2a^4bb + 1aab^4 \end{array}\right.$$

III COROLLAIRE.

POUR LA MESME ESPECE,

où les racines fausses sont inégales.

11. DAns cette espêce le quarré $4aa$ de la vraie racine $2a$ surpasse toûjours p ou $3aa + 1bb$, puis qu'ôtant $3aa$ de part & d'autre, le premier reste $1aa$ surpasse le second $1bb$. Mais chacun des quarrez $aa + 2ab + bb$ & $aa - 2ab + 1bb$ des racines fausses $-a-b$ & $-a+b$ vaut moins que p, ou que sa valeur $3aa + 1bb$, parce qu'ôtant $aa + bb$ de part & d'autre, le premier reste $2aa$ surpasse le second $+2ab$ ou $-2ab$.

IV COROLLAIRE.

POUR LA MESME ESPECE.

12. SI dans la même espêce on choisit le quarré $4aa$, qui surpasse $1p$ ou $3aa + 1bb$, & qu'on prenne la différence $4aa - p$ ou $1aa - 1bb$ pour diviseur du dernier terme q ou $2a^3 - 2abb$; l'exposant $\frac{q}{1aa - 1bb}$ ou $\frac{2a^3 - 2abb}{1aa - 1bb}$ donne au juste la vraie racine $2a$ du quarré même $4aa$, ou la vraie $2a$ de l'égalité. Et la racine $2a$ étant découverte, on trouvera facilement la valeur de b. Car $1bb \propto 1p - 3aa \propto \frac{2a^3 - 2a^3 + 2abb}{2a} \propto \frac{2a^3 - 1q}{2a} \propto 1aa - \frac{1q}{2a}$. Et $1b \propto \sqrt{1p - 3aa}$, ou $1b \propto \sqrt{1aa - \frac{1q}{2a}}$.

Et si dans la même espêce on choisit le quarré $aa + 2ab + bb$ qui vaut moins que p ou que $3aa + 1bb$, & qu'on prenne la différence $1p - aa - 2ab - 1bb$ ou $2aa - 2ab$ pour diviseur du dernier terme $-1q \propto -2a^3 + 2abb$; l'exposant $\frac{-1q}{1p - aa - 2ab - 1bb}$ ou $\frac{-2a^3 + 2abb}{2aa - 2ab}$ donne au juste le côté négatif $-a-b$ du quarré même $aa + 2ab + bb$, ou la fausse racine $-a-b$ de l'égalité. Et cette racine étant découverte, on aura la somme $a+b$ des deux autres $2a$ & $-a+b$. Et comme la différence de ces deux $2a$ & $-a+b$ est $3a-b$; la moitié de la différence est $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$, & son quarré $\frac{9}{4}aa - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{4}bb$ comprend au juste un quarré $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$ de la demie-somme $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, plus un plan $2aa - 2ab$ de la vraie $2a$ par la somme $a-b$ de la vraie $2a$ & de la fausse $-a-b$. Et on pourra prendre au lieu du plan $2aa - 2ab$ sa valeur $\frac{2a^3 - 2abb}{1a + 1b}$ ou $\frac{1q}{1a + 1b}$. Mais la racine du quarré $\frac{9}{4}aa - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{4}bb$ ou $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1q}{1a + 1b}$ est $\frac{3}{2}a$

$-\frac{1}{2}b$. Si donc on luy ajoûte $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; on aura la vraie racine $2a \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1q}{1a + 1b}}$. Et si on ôte la racine quarrée $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$ de la demie-somme $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; le reste $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1q}{1a + 1b}}$ ou $-1a + 1b$ sera l'autre racine fausse de l'égalité.

Et si on pouvoit choisir de la même sorte le quarré $aa - 2ab + bb$, qui vaut moins que p ou que $3aa + 1bb$; en prenant la différence $1p - aa + 2ab - bb$ ou $2aa + 2ab$ pour diviseur du dernier terme $-1q$, l'exposant $\frac{-1q}{1p - aa + 2ab - bb}$ ou $\frac{-1q}{2aa + 2ab} \propto \frac{-2a^3 + 2abb}{2aa + 2ab}$ sera au juste le côté négatif $-1a + 1b$ du quarré même $aa - 2ab + bb$, ou l'autre racine fausse $-a + b$ de l'égalité. Et on trouvera par des raisonnemens semblables à ceux qu'on vient de suivre que la vraie racine $2a$ doit être $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1q}{1a + 1b}}$, & la fausse $-a - b \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1q}{1a + 1b}}$.

COROLLAIRE GENERAL.
POUR LA SECONDE ESPECE où les racines fausses sont inégales.

13. SI l'on découvre une racine vraie ou fausse de l'égalité, & qu'on la nomme $1d$; les deux autres racines seront toûjours $-\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}$ & $-\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}$. Et si $1d$ est une racine vraie ; les deux autres seront des racines fausses. Mais si $1d$ est une racine fausse, ou vaut moins que zéro ; l'une des deux autres sera vraie, & l'autre sera fausse, parceque chacune des parties ou d est linéaire sera positive, quoiqu'on y voie le signe — marqué. Tout ceci n'est autre chose que le Corollaire précédent énoncé d'une maniére abbrégée.

SECOND CAS ET PROBLEME III.
POUR LA TROISIEME ESPECE, où deux racines sont imaginaires.

14. *POur transformer une égalité du troisiéme degré, où une racine est vraie, & les deux autres sont imaginaires ; & où le second terme est évanoüi.*

On nommera $2a$ la vraie racine, & $3bb$ la contradiction de l'égalité plane, ou $-a - \sqrt{-3bb}$ l'une des racines imaginaires, & l'autre $-a + \sqrt{-3bb}$. Ce qui fournira les trois égalitez linéaires $1y - 2a \propto 0$, $1y + a + \sqrt{-3bb} \propto 0$, $1y + a - \sqrt{-3bb} \propto 0$. Et leur solide

$1y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ +3bby & -6abb \end{matrix} \propto 0$ sera la transformée de la premiére forme $1y^3 * - py - q \propto 0$, si $3aa$ surpasse $3bb$, ou si $1a$ surpasse $1b$; & de la seconde forme $1y^3 * + py - q \propto 0$, si $1b$ surpasse $1a$.

Lorsque deux racines sont imaginaires.

{*1ere forme* $1y^3 * - py - q \propto 0$. {*Sa transformée* $1y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ +3bby & -6abb \end{matrix} \propto 0$.

{*2e forme* $1y^3 * + py - q \propto 0$. {*Sa transformée* $1y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ +3bby & -6abb \end{matrix} \propto 0$.

I COROLLAIRE ET PROBLEME IV.

POUR LA TROISIEME ESPECE de la premiére forme.

15. *Pour résoudre par la transformation toute égalité de la premiére forme, où deux racines sont imaginaires.*

La comparaison du premier terme $1y^3$ & du premier $1y^3$ ne fera rien connoître. Mais celle des troisiémes $-py$ & $-3aay + 3bby$ donnera $\frac{1}{3}p \propto aa - bb$. Et la comparaison des quatriémes $-q$ & $-2a^3 - 6abb$ donnera $\frac{1}{2}q \propto a^3 + 3abb$. Et si d'une part on cube $\frac{1}{3}p$ & sa valeur $aa - bb$, & que de l'autre on quarre $\frac{1}{2}q$ & sa valeur $a^3 + 3abb$, on aura les deux égalitez $\frac{1}{27}p^3 \propto a^6 - 3a^4bb + 3aab^4 - b^6$ & $\frac{1}{4}qq \propto a^6 + 6a^4bb + 9aab^4$. Et ôtant le cube $\frac{1}{27}p^3$ du quarré $\frac{1}{4}qq$, & la valeur du cube de celle du quarré, on trouvera toûjours un reste positif $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 \propto 9a^4bb + 6aab^4 + b^6$. De sorte que dans cette espéce, le cube $\frac{1}{27}p^3$ est toûjours moindre que le quarré $\frac{1}{4}qq$. Tirant donc la racine quarrée de chaque membre de l'égalité $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 \propto 9a^4bb + 6aab^4 + b^6$, on aura celle-ci $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto 3aab + b^3$. Et ajoûtant $\frac{1}{2}q$ d'une part, & sa valeur $a^3 + 3abb$ de l'autre, on formera l'égalité $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Et les racines cubiques de ses membres donneront encore celle-ci $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{17}p^3}} \propto a + b$. Et divisant $\frac{1}{3}p$ ou sa valeur $aa - bb$ par $a + b$ ou par sa valeur $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, on aura l'exposant $a - b \propto \dfrac{1p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$.

Et

Et ajoûtant ensemble $a+b$ & $a-b$ d'une part, & de l'autre leurs valeurs, on trouvera enfin la vraie racine $2a \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \dfrac{1p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$. Et connoissant ainsi la valeur $1a$, on connoîtra facilement la contradiction $3bb \propto 3aa - p$, ou $3bb \propto \frac{1q - 2a^3}{2a}$.

Le cube $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que le quarré $\frac{1}{4}qq$.

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^{ere}\ \textit{forme} & 1y^3 * - py - q \propto 0 \\ \textit{Transformée} & 1y^3 * \begin{array}{l} -3aay - 2a^3 \\ +3bby - 6abb \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto a^6 - 3a^4bb + 3aab^4 - b^6. \\ \frac{1}{4}qq \propto a^6 + 6a^4bb + 9aab^4. \end{array}\right.$$

Résolution générale.

$$2a \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}.\ 3bb \propto 3aa - p.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * - py - q \propto 0. \\ y^3 * - 24y - 72 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \propto \sqrt{C.\,36 + \sqrt{1296 - 512}} \propto 4.\ 3bb \propto 3. \\ \textit{vraie racine}\ 2a \propto 6.\ \{\textit{Imaginaires.}\ -3 + \sqrt{-3}.\ -3 - \sqrt{-3}. \end{array}\right.$$

AUTRE RESOLUTION.

Ayant pris x pour $a+b$, & v pour $a-b$; la comparaison des troisiémes termes donnera $\frac{1}{3}p \propto aa - bb \propto xv$. Et on en tirera une valeur $x \propto \frac{1p}{3v}$. Et la comparaison des quatriémes termes donnera l'égalité $q \propto 2a^3 + 6abb \propto x^3 + v^3$, où mettant pour x^3 sa valeur $\frac{1p^3}{27v^3}$, on aura celle-ci $\frac{1p^3}{27v^3} + v^3 \propto q$. Et multipliant de part & d'autre par v^3, & disposant ensuitte l'égalité par ordre, on formera l'égalité $v^6 - qv^3 + \frac{1}{27}p^3 \propto 0$. Et on en tirera deux racines $v^3 \propto \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, & $v^3 \propto \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$. De sorte qu'on aura une valeur $v \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Et mettant pour v^3 sa valeur $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ dans l'égalité $x^3 + v^3 \propto q$, ou x^3

litez $\frac{1}{27}p^3 \propto b^6 - 3aab^4 + 3a^4bb - a^6$ & $\frac{1}{4}qq \propto a^6 + 6a^4bb + 9aab^4$. Si donc on les ajoûte ensemble, ou si on ajoûte le cube $\frac{1}{27}p^3$ au quarré $\frac{1}{4}qq$, & la valeur du cube à celle du quarré; on formera l'égalité $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 \propto 9a^4bb + 6aab^4 + b^6$. Et les racines quarrées des deux membres en donneront une autre $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} \propto 3aab + b^3$, à laquelle ayant ajoûté l'égalité déja découverte $\frac{1}{2}q \propto a^3 + 3abb$, on aura celle-ci $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} \propto a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Et tirant de part & d'autre la racine cubique, on aura $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \propto a + b$. Et divisant $aa - bb$ ou $-\frac{1}{3}p$ par $a + b$ ou par sa valeur qu'on vient de découvrir, l'exposant $a - b$ sera $\frac{-1p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$. Et la contradiction $3bb$ sera $3aa + p$. On remarquera que cette forme, où il y a $+p$, renferme toûjours nécessairement deux racines imaginaires.

§ 2^e *forme* $1y^3 * + py - q \propto 0$. § *Sa transformée* $1y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ +3bby & -6abb \end{matrix} \propto 0$.

Résolution générale.

$$§\ 2a \propto \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}.\ 3bb \propto 3aa + p.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{matrix} y^3 * + py - q \propto 0. \\ y^3 * + 15y - 124 \propto 0. \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \propto \sqrt{C.62 + \sqrt{3844 + 125}} \propto 5.\ 3bb \propto 27. \\ \textit{Vraie racine } 2a \propto 4.\ \S\ \textit{Imaginaires} -2 + \sqrt{-27}\ \&\ -2 - \sqrt{-27}. \end{matrix}\right.$$

AUTRE RESOLUTION.

Ayant pris comme au problême précédent, x pour $a + b$, & v pour $a - b$; on trouvera en raisonnant de la même sorte une égalité $v^6 - qv^3 - \frac{1}{27}p^3 \propto 0$. Et on en tirera une valeur $v^3 \propto \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, & une autre $x^3 \propto q - v^3 \propto \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et ajoûtant ensemble les racines cubiques de ces deux valeurs, on déterminera la vraie racine $2a$ ou

$x + v \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Et la contradiction $3bb$ sera $3aa + p$.

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * + py - q \propto 0. \\ \hline y^3 * \begin{array}{l} -3aay \\ +3bby \end{array} \begin{array}{l} -2a^3 \\ -6abb \end{array} \propto 0. \\ \hline y^3 * - 3xv \begin{array}{l} -x^3 \\ -v^3 \end{array} \propto 0. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} -3aa + 3bb \propto p \propto -3xv.\quad b + a \propto x \propto -\frac{1p}{3v}. \\ 2a^3 + 6abb \propto x^3 + v^3 \propto v^3 - \frac{1p^3}{27v^3} \propto 1q. \\ v^6 - 1qv^3 - \frac{1}{27}p^3 \propto 0.\quad x^3 \propto q - v^3.\quad 3bb \propto 3aa - p. \\ v \propto \sqrt{C\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.\quad x \propto \sqrt{C\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}. \end{array}\right.$$

{ *Vraie racine* $2a \propto x + v \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * + py - q \propto 0. \\ y^3 * + 15y - 124 \propto 0. \end{array}\right.$$ { *Vraie racine* $2a \propto 4$. { *Imaginaires.* $-2 + \sqrt{-27}$. $-2\sqrt{-27}$.

COROLLAIRE GENERAL.

POUR LA TROISIEME ESPECE, où deux racines sont imaginaires.

17. Dans cette espêce le quarré $4aa$ de la vraie racine $2a$ surpasse toûjours $3aa - 3bb$ ou sa valeur $1p$, lorsqu'il y a $-py$. Et $4aa$ surpasse aussi $3aa - 3bb$ ou sa valeur $-1p$, lorsqu'il y a $+py$. Et l'excez est $1aa + 3bb$. Si donc on peut choisir ce même excez $1aa + 3bb$ pour diviser le terme q ou $2a^3 + 6abb$; l'exposant $\frac{1q}{aa + 3bb}$ ou $\frac{2a^3 + 6abb}{aa + 3bb}$ sera toûjours la racine $2a$ du quarré $4aa$, ou la vraie racine de l'égalité. Et cette racine étant découverte, il sera facile de determiner la contradiction
b. 15. $3bb$. Car s'il y a $-py$ dans l'égalité; la [b] contradiction $3bb$ sera $3aa - p$.
c. 16. Et s'il y a $+py$; la [c] contradiction $3bb$ sera $3aa + p$.

PROBLEME VI.

Pour la résolution des égalitez solides.

18. P*Our résoudre une égalité proposée du troisiéme degré.*
a. 21. 8. On fera premiérement [a] évanoüir son second terme. Et s'il y a
b. 16. 8. des fractions dans la nouvelle égalité, on [b] l'en délivrera. On verra ensuitte si l'egalité sans fraction & sans second terme a $-p$ ou $+p$ au troi-

ſiéme. Et lorſqu'elle aura $-p$, on verra encore ſi le cube $\frac{1}{27}p^3$ du tiers de la quantité connuë dans le troiſiéme terme eſt égal au quarré $\frac{1}{4}qq$ de celle qu'on connoît au quatriéme, ou ſi le cube ſurpaſſe le quarré, ou s'il eſt plus petit. Lorſqu'il y aura $+q$, on mettra $-q$; ce qui changera ſeulement une racine fauſſe en vraie; & deux vraies en fauſſes, ou le ſigne de deux imaginaires.

POUR LA PREMIERE ESPECE,

où le cube $\frac{1}{27}p^3$ égale le quarré $\frac{1}{4}qq$.

19. LA réſolution de l'égalité $y^3 * -py-q \propto 0$, où $\frac{1}{27}p^3$ & $\frac{1}{4}qq$ ont la même valeur ſera toûjours facile. Car la vraie [b] racine $2a$ ſera $\frac{3q}{1p}$; & les deux fauſſes [b] auront l'une & l'autre une même valeur $-\frac{3q}{2p} \propto -1a$. b. 9.

Réſolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Propoſée } y^3 * -py-q \propto 0. \ \{ \textit{Sa transformée } y^3 * -3aay-2a^3 \propto 0. \\ \frac{1}{27}p^3 \propto \frac{1}{4}qq \propto 1a^6. \ \{ \textit{Vraie racine } 2a \propto \frac{3q}{1p}. \ \{ \textit{Fauſſes.} -1a \propto -\frac{3q}{2p}. \ -1a \propto -\frac{3q}{2p}. \end{array}\right.$$

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * -py-q \propto 0. \\ y^3 * -147y-686 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}p \propto 49. \ \frac{1}{2}q \propto 343. \ \frac{1}{27}p^3 \propto 117649 \propto \frac{1}{4}qq. \\ \textit{Vraie racine } 2a \propto 14. \ \{ \textit{Fauſſes.} -1a \propto -7. -1a \propto -7. \end{array}\right.$$

POUR LA SECONDE ESPECE,

où le cube $\frac{1}{27}p^3$ ſurpaſſe le quarré $\frac{1}{4}qq$.

20. POur réſoudre l'égalité $y^3 * -py-q \propto 0$, ou $\frac{1}{27}p^3$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}qq$. On prendra ſucceſſivement & par ordre chacun des quarrez qui ſurpaſſent p. Et ôtant p du quarré qu'on aura choiſi, on prendra le reſte pour diviſer le quatriéme terme q. Et cela ſera réïtéré juſques à ce qu'on trouve un expoſant, qui ſoit la racine même du quarré qui aura reglé la diviſion, ou qui ſoit moindre que cette racine. Et ſi l'expoſant eſt la racine du quarré, il ſera auſſi la vraie racine de l'égalité. Mais s'il eſt moindre, on pourra s'aſſurer que la vraie racine de l'égalité eſt incommenſurable.

C'eſt pourquoi on prendra ſucceſſivement & par ordre chacun des quarrez, qui ſont moindres que p. Et ôtant p du quarré qu'on aura choiſi, on prendra le reſte pour diviſer le quatriéme terme q. Et cela ſera réïtéré, juſques à ce qu'on trouve un expoſant égal à la racine du quarré qui aura réglé la division, ou plus grand que la même racine. S'il est égal, il sera l'une des fausses racines de l'égalité. Mais s'il est plus grand, les racines fausses seront incommensurables. Et on tentera inutilement la résolution de l'égalité par toutes les voies que l'Analyse a pû découvrir. Mais on pourra la résoudre par approximation. La Géométrie néanmoins fournit les moyens de la résoudre avec éxactitude.

Enfin si l'une des racines est commensurable, ou qu'on ait pû la découvrir, ce qui revient au même; on la nommera d, & les deux autres seront $-\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}$ & $-\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}$. Les éxemples éclairciront & fixeront ces régles.

Résolution générale, lorsqu'elle est possible.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * - py - q \propto 0. \\ \hline y^3 * \begin{array}{l} -3aay - 2a^3 \\ -1byy + 2abb \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{Le cube } \frac{1}{27}p^3 \textit{ surpasse le quarré } \frac{1}{4}qq. \\ \textit{Racine commensurable vraie ou fausse } d \propto \frac{1q}{dd - p}. \\ \textit{Les deux autres. } -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}. -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}. \end{array}\right.$$

PREMIER EXEMPLE.

Pour trouver la valeur de z dans l'égalité $y^3 * - 28y - 48 \propto 0$. Le cube $\frac{1}{27}p^3$ est $813\frac{1}{27}$, & le quarré $\frac{1}{4}qq$ n'est que 576. Et ainsi le cube surpasse le quarré, ce qui fait déja juger que nulle des racines n'est imaginaire. Et afin de trouver ces racines, on prendra le premier quarré 36 qui surpasse 28, & la différence 8 dont 36 surpasse 28. Et on divisera q ou 48 par la différence 8. Et parceque l'exposant 6 est le côté même du quarré 36, il est aussi la vraie racine de l'égalité. C'est pourquoi supposant $1d \propto 6$, les deux racines fausses seront, la premiére $-\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -2$, & la seconde $-\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -4$. Et en effet l'égalité proposée est un produit des trois simples $y - 6 \propto 0$, $y + 4 \propto 0$, $y + 4 \propto 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * - py - q \propto 0. \\ y^3 * - 28y - 48 \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{7}p^3 \propto 813\frac{1}{27}. \ \frac{1}{4}qq \propto 576. \ \& \ d \propto \frac{1q}{dd - p} \propto \frac{48}{36 - 28} \propto 6. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -2. \ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -4. \end{array}\right.$$

SECOND EXEMPLE.

Pour trouver les racines de l'égalité $y^3 * - 13y - 12 \propto 0$, où $\frac{1}{27}p^3 \propto 81\frac{10}{27}$ surpasse $\frac{1}{4}qq \propto 36$. On dira: le premier quarré qui surpasse p ou 13, est 16; & l'excez dont 16 surpasse 13 est 3. Divisant donc le terme q ou 12 par la différence 3; l'exposant 4 est le côté du quarré même 16,

& par conséquent la vraie racine $1d$ de l'égalité. Et les deux fausses $-\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}$ & $-\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}$ sont -1 & -3. Et en effet l'égalité proposée est un produit des trois simples $y - 4 \infty 0$, $y + 1 \infty 0$, $y + 3 \infty 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * - py - q \infty 0. \\ y^3 * - 13y - 12 \infty 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \infty 81\frac{10}{27}.\ \frac{1}{4}qq \infty 36.\ \{ d \infty \frac{1q}{dd - p} \infty \frac{12}{16 - 13} \infty 4. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty -1.\ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty -3. \end{array}\right.$$

TROISIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $y^3 * - 8y - 8 \infty 0$, où $\frac{1}{27}p^3 \infty 18\frac{26}{27}$ surpasse $\frac{1}{4}qq \infty 16$. On dira : le premier quarré qui surpasse p ou 8, est 9 ; & la différence $9 - p$ ou $9 - 8$ est 1, Et divisant le terme q ou 8 par 1, l'exposant 8 surpasse le côté 3 du quarré 9 qu'on avoit choisi. C'est pourquoi on prendra le quarré 16 qui suit 9 de plus prés, & la différence $16 - p$ ou $16 - 8$, qui est encore 8. Et divisant le terme q ou 8 par la différence 8, l'exposant 1 vaut moins que le côté 4 du quarré 16, dont on s'est servi. D'où l'on doit inférer que la vraie racine $2a$ n'est pas commensurable. C'est pourquoi on prendra le quarré 4 qui vaut moins que p ou que sa valeur 8, mais qui en approche le plus, & ôtant 4 du terme p ou 8, le reste $8 - 4$ est 4. Et divisant le terme q ou 8 par ce reste 4, l'exposant 2 est la racine même du quarré 4, que l'on vient d'employer. Et ainsi -2 est une racine fausse de l'égalité. Et si on prend $+1d$ pour -2 ; la vraie racine $-\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}$ sera $1 + \sqrt{5}$, & la fausse $-\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}}$ sera $1 - \sqrt{5}$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 * - py - q \infty 0. \\ y^3 * - 8y - 8 \infty 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \infty 18\frac{26}{27}.\ \frac{1}{4}qq \infty 16.\ \{ d \infty \frac{1q}{dd - p} \infty \frac{8}{4 - 8} \infty -2. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty 1 + \sqrt{5}.\ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty 1 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

POUR LA TROISIEME ESPECE,

où le cube $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que le quarré $\frac{1}{4}qq$, ou lorsqu'il y a + au troisiéme terme.

21. POur résoudre l'égalité $y^3 * - py - q \infty 0$, où $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que $\frac{1}{4}qq$; ou pour résoudre l'égalité $y^3 * + py - q \infty 0$. On prendra successivement & par ordre chacun des quarrez qui surpassent p, lorsqu'il y a $-p$; ou qui surpassent $-p$, lorsqu'il y a $+p$. Et ôtant p du quarré

qu'on aura choisi, s'il y a $-p$, ou l'ajoutant, s'il y a $+p$; on prendra le reste ou la somme pour diviser le dernier terme q. Et cela sera réïtéré jusques à qu'on trouve un exposant qui soit la racine du quarré même qui aura servi, ou qui soit moindre que cette racine. Et si l'exposant est la racine du quarré; il sera aussi la vraie racine de l'égalité : mais s'il est moindre, la vraie racine $2a$ de l'égalité sera la grandeur incommensurable $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$, s'il y a $-p$ dans l'égalité. Mais elle sera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{-1p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$, s'il y a $+p$ dans l'égalité. Et la contradiction sera $3aa - p$ dans la premiére forme, & $3aa + p$ dans la seconde.

Résolution générale, lorsqu'elle est commensurable.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 \propto + py + q. \\ \hline y^3 \propto \begin{array}{l} +3aay + 2a^3. \\ -3bby + 6abb. \end{array} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \textit{Le cube } \frac{1}{27}p^3 \textit{ moindre que le quarré } \frac{1}{4}qq. \\ \textit{Racine vraie \& commensurable } 2a \propto \frac{1q}{4aa - p}. \\ \textit{Imaginaires. } -a + \sqrt{3aa - p}. \ -a - \sqrt{3aa - p}. \end{array}\right.$$

Premier exemple.

Pour résoudre l'égalité $y^3 * - 24y - 12 \propto 0$, ou $\frac{1}{27}p^3 \propto 512$ est moindre que $\frac{1}{4}qq \propto 1296$. On dira : le premier quarré qui surpasse p ou 24, est 25; & la différence $25 - p$ ou $25 - 24$ est 1. Et divisant le terme q ou 72 par la différence 1, l'exposant 72 surpasse le côté 5 du quarré 25. On prendra donc le quarré 36, qui suit 25 de plus prés, & la différence $36 - p$ ou $36 - 24$, qui est 12. Et divisant par 12 le terme q ou 72, l'exposant 6 est le côté du quarré 36, dont on s'est servi; & par conséquent 6 est la vraie racine $2a$ de l'égalité. Et la contradiction $3aa - p$ est 3. Et en effet l'égalité proposée est un produit de trois linéaires $y - 6 \propto 0$, $y + 3 + \sqrt{-3} \propto 0$, $y + 3 - \sqrt{-3} \propto 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 \propto + py + q. \\ y^3 \propto + 24y + 72. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto 512. \ \frac{1}{4}qq \propto 1296. \ \{ d \propto \frac{q}{dd - p} \propto \frac{72}{36 - 24} \propto 6. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -3 + \sqrt{-3}. \ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto -3 - \sqrt{-3}. \end{array}\right.$$

Second exemple.

Pour résoudre l'égalité $y^3 * + 3y - 36 \propto 0$, où il y a $+3$. On dira : le premier qui surpasse -3, est 1; & l'excez dont 1 surpasse -3, est 4. Et

Et divisant q ou 36 par 4, l'exposant 9 surpasse le côté 1 du quarré 1, dont on s'est servi. On prendra donc le quarré 4, qui suit 1 de plus prés, & l'excez 7, dont 4 surpasse -3. Et parceque 7 ne peut diviser sans reste le terme q ou 36, ou que l'exposant $\frac{36}{7}$ n'est pas le côté du quarré 4; on prendra le quarré 9, qui le suit de prés, & l'excez 12, dont 9 surpasse -3. Et divisant par 12 le terme q ou 36, l'exposant 3 est le côté même du quarré 9, & par conséquent la vraie racine $2a$ de l'égalité. Et la contradiction est $\frac{39}{4}$. Et en effet l'égalité proposée est un produit des trois simples $y - 3 \infty 0$, $y + \frac{3 + \sqrt{-39}}{2} \infty 0$, $y + \frac{3 - \sqrt{-39}}{2} \infty 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 \infty + py + q. \\ y^3 \infty - 3y + 36. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \infty -1.\ \frac{1}{4}qq \infty 324.\ \{ d \infty \frac{q}{dd - p} \infty \frac{36}{9 + 3} \infty 3. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty - \frac{3 + \sqrt{-39}}{2}.\ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty - \frac{3 - \sqrt{-39}}{2}. \end{array}\right.$$

I COROLLAIRE ET QUESTION I.

POUR DEUX RESOLUTIONS PROMISES AU SECOND LIVRE.

PREMIER CAS.

22. *Connoissant la somme de deux grandeurs, & la différence de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Pour achever ici la résolution de cette question, dont nous avons tenté la recherche au second Livre; si la somme des grandeurs est $2a$, & leur différence $2y$, & que $2b$ soit la différence des cubes; la grande est $a + y$, la moindre $a - y$, & la différence des cubes est $2y^3 + 6aay \infty 2b$. Et $y^3 + 3aay \infty b$. De sorte qu'une des racines est vraie, & les deux autres sont imaginaires. Et la vraie est toûjours $\sqrt{C.\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + a^6}} - \frac{aa}{\sqrt{C.\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + a^6}}}$.

EXEMPLE.

Si on prend 3 pour a, & 28 pour b; l'égalité précédente $y^3 * + 3aay - b \infty 0$ sera $y^3 * + 27y - 28 \infty 0$. On dira donc: le premier quarré, qui surpasse -27 est 1, & l'excez dont 1 surpasse -27 est 28. Et divisant le terme q ou 28 par l'excez 28; l'exposant 1 est le côté du quarré 1 dont on s'est servi, & par conséquent la vraie racine de l'égalité. De sorte que les grandeurs $a + y$ & $a - y$ sont 4 & 2, qui résolvent la question. Car leur somme est 6 ou $2a$, & la différence de leurs cubes 64 & 8 est 56 ou $2b$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 \infty + py + q. \\ y \infty - 27y + 28. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \infty - 729.\ \frac{1}{4}qq \infty 196.\ \{ d \infty \frac{q}{dd - p} \infty \frac{28}{1 + 27} \infty 1. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty - \frac{1 + \sqrt{-111}}{2}.\ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \infty - \frac{1 - \sqrt{-111}}{2}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

23. ***E**T si on connoît la différence des deux grandeurs, & la somme de leurs cubes; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme inconnuë des grandeurs, & leur différence $2a$, & $2b$ la somme des deux autres; l'une est $z + a$, & l'autre $z - a$. Et la somme des cubes est $2z^3 + 6aaz \propto 2b$. Et $z^3 + 3aaz \propto b$. Et la vraie racine de cette égalité sera déterminée comme au cas précédent.

Exemple.

Si on prend 1 pour a, & 36 pour b, l'égalité $z^3 * + 3aaz - b \propto 0$ sera $z^3 * + 3z - 36 \propto 0$, dont on a déja découvert la vraie racine 3. De sorte que les grandeurs $z + a$ & $z - a$ sont 4 & 2, qui resolvent la question. Car leur différence est 2 ou $2a$, & la somme de leurs cubes 64 & 8 est 72 ou $2b$.

$$\left\{\begin{array}{l} z^3 \propto + pz + q. \\ z^3 \propto - 3z + 36. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto -1.\ \frac{1}{4}qq \propto 384.\ \left\{ d \propto \frac{1q}{dd - p} \propto \frac{36}{9 + 3} \propto 3. \right. \\ -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto - \frac{3 + \sqrt{-39}}{2}.\ -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{q}{d}} \propto - \frac{3 - \sqrt{-39}}{2}. \end{array}\right.$$

II COROLLAIRE ET QUESTION II.

PREMIER CAS.

24. ***C**Onnoissant la somme des grandeurs, & la différence de leurs quatriémes puissances; pour trouver les grandeurs.*

Ayant pris $2a$ pour la somme des grandeurs, & $2y$ pour leur différence; ou $a + y$ pour l'une, & $a - y$ pour l'autre; & $2b$ pour la différence des quatriémes puissances; ces puissances seront $a^4 + 4a^3y + 6aayy + 4ay^3 + y^4$ & $+ a^4 - 4a^3y + 6aayy - 4ay^3 + y^4$. Et leur différence $8a^3y + 8ay^3 \propto 2b$. Et $y^3 * + aay - \frac{1b}{4a} \propto 0$. Et la vraie racine de cette égalité sera toûjours $y \propto \sqrt{C.\frac{1b}{8a} + \sqrt{\frac{1bb}{64aa} + \frac{1a^6}{27}}} - \frac{aa}{3\sqrt{C.\frac{1b}{8a} + \sqrt{\frac{1bb}{64aa} + \frac{1a^6}{27}}}}$.

Exemple.

Si on prend 3 pour a, & 120 pour b; l'égalité $y^3 * + aay - \frac{1b}{4a} \propto 0$ sera $y^3 * + 9y - 10 \propto 0$. On dira donc : le premier quarré qui surpasse -9 est 1, & l'excez dont 1 surpasse -9, est 10. Et le terme q ou 10 étant divisé par l'excez 10, donne pour exposant le côté 1 du quarré même 1, dont on s'est servi. Et ainsi la vraie racine y est 1, & les grandeurs $a + y$ & $a - y$ sont 4 & 2. Leur somme est 6 ou $2a$, & la différence de leurs quatriémes puissances 256 & 16 est 240 ou $2b$.

$$\left\{\begin{array}{l} y^3 \propto +py+q. \\ y^3 \propto -9y+10. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto -27.\ \frac{1}{4}qq \propto 25.\ \{\ d \propto \frac{q}{dd-p} \propto \frac{10}{1+9} \propto 1. \\ -\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd-\frac{q}{d}} \propto -\frac{1+\sqrt{-39}}{2}.\ -\frac{1}{2}d-\sqrt{\frac{1}{4}dd-\frac{q}{d}} \propto \frac{-1-\sqrt{-39}}{2}. \end{array}\right.$$

SECOND CAS.

25\. *ET si on connoît la différence des grandeurs, & celle des quatriémes puissances; pour trouver les grandeurs.*

Ayant nommé $2z$ la somme des grandeurs, & leur différence $2a$; ou la première $z+a$, & la seconde $z-a$; & $2b$ la différence des quatriémes puissances. Ces puissances seront $z^4+4a^3z+6aazz+a^4$ & $z^4-4az^3+6aazz-4a^3z+a^4$. Et leur différence est $8az^3+8a^3z \propto 2b$. Et $z^3 * +aaz-\frac{1b}{4a} \propto 0$. Et la vraie racine de cette égalité sera déterminée comme au cas précédent.

EXEMPLE.

Si on prend 1 pour a, & 120 pour b; l'égalité $z^3 * +aaz-\frac{1b}{4a} \propto 0$ sera $z^3 * +1z-30 \propto 0$. On dira donc: le premier quarré qui surpasse -1 est 1, & la différence est 2. Et divisant le terme q ou 30 par 2, l'exposant 15 surpasse le côté 1 du quarré 1. C'est pourquoi on prendra le quarré 4 qui suit 1 de plus prés, & l'excez 5, dont 4 surpasse -1. Et divisant 30 ou q par 5, l'exposant 6 surpassera le côté 2 de 4. On prendra donc 9, qui suit 4 de plus prés. Et l'excez 10, dont 9 surpasse -1. Et on divisera le terme q ou 30 par cet excez 10, & l'exposant 3 étant le côté même du quarré 9, dont on s'est servi, est aussi la vraie racine z de l'égalité. Et les grandeurs $z+a$ & $z-a$ sont 4 & 2. Leur différence $2a$ est 2, & celle de leurs quatriémes puissances 256 & 16 est 240 ou $2b$.

$$\left\{\begin{array}{l} z^3 \propto +pz+q. \\ z^3 \propto -1z+30. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{27}p^3 \propto -\frac{1}{27}.\ \frac{1}{4}qq \propto 225.\ \{\ d \propto \frac{q}{dd-p} \propto \frac{30}{9+1} \propto 3. \\ -\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd-\frac{q}{d}} \propto \frac{3+\sqrt{-31}}{2}.\ -\frac{1}{2}d-\sqrt{\frac{1}{4}dd-\frac{q}{d}} \propto -\frac{3+\sqrt{-31}}{2}. \end{array}\right.$$

DES EGALITEZ SOLIDES IRREDUCTIBLES, ou dont on ne peut former analytiquement une résolution légitime.

26\. LOrsque dans une égalité de la première forme $y^3 * -py-q \propto 0$ le cube $\frac{1}{27}p^3$ surpasse le quarré $\frac{1}{4}qq$; ou qu'une racine est vraie, & les deux autres fausses: si chacune des trois est incommensurable; ou que le problême sixiéme n'en détermine aucune; toutes les voies jusqu'ici connuës dans l'Analyse ne fourniront jamais une résolution naturelle ou légitime. Et il sera absolument nécessaire pour la déterminer au juste, d'employer le ſecours de la Géométrie. Si on avoit pourtant quelque déſir d'employer l'Analyſe à cette recherche ; voici comment on pourroit s'y prendre en ſe ſervant de la transformation.

Premiére maniére.

27. LA propoſée eſt $y^3 * - py - q \propto 0$, & ſa transformée $y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ -1bby & +2abb \end{matrix} \propto 0$. Et la comparaiſon des troiſiémes termes $-py$ & $-3aay - 1bby$ fournira $\frac{1}{3}p \propto aa + \frac{1}{3}bb$. Et cubant de part & d'autre, on aura $\frac{1}{27}p^3 \propto a^6 + a^4bb + \frac{1}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$. Et la comparaiſon des quatriémes termes fournira encore l'égalité $\frac{1}{2}q \propto a^3 - abb$. Et les quarrez des membres donneront $\frac{1}{4}qq \propto a^6 - 2a^4bb + aab^4$. Si donc on veut ôter le cube $\frac{1}{27}p^3$ du quarré $\frac{1}{4}qq$, & la valeur du cube de celle du

b. 10. quarré ; on aura un reſte[b] négatif $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 \propto -3a^4bb + \frac{2}{3}aab^4 - \frac{1}{27}b^6 \propto \frac{81a^4bb - 18aab^4 + b^6}{-27}$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on trouvera la grandeur imaginaire $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto \frac{-9aab + b^3}{-3\sqrt{-3}}$. Et ſi le premier des deux membres eſt ajoûté au premier de l'égalité $\frac{1}{2}q \propto a^3 - abb$, & le ſecond au ſecond ; on formera l'égalité $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto a^3 - abb \frac{-9aab + b^3}{-3\sqrt{-3}} \propto \frac{3a^3\sqrt{-3} + 3abb\sqrt{-3} - 9aab + b^3}{-3\sqrt{-3}}$. Et les racines cubiques de ſes membres donneront celle-ci $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \propto \frac{+b + a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}$. C'eſt pourquoi diviſant par le premier de ces deux nouveaux membres le premier de l'égalité $\frac{1}{3}p \propto aa + \frac{1}{3}bb \propto \frac{-3aa - 1bb}{-3}$; & par le ſecond membre le ſecond, on formera cette autre égalité $\frac{1p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}} \propto \frac{-b + a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}$, dont le premier membre étant enfin ajoûté au premier de celle qu'on vient de découvrir, & le ſecond l'étant de la même ſorte au ſecond ; on trouvera une valeur $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}} \propto \frac{+b - b + 2a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} \propto 2a$. De ſorte que la vraie racine $2a$ se trouve exprimée de la même sorte que la vraie $2a$ des égalitez, où deux racines sont imaginaires. Ce que nul, que je sçache, n'a encore apperçû, ni pû démontrer jusqu'ici.

Seconde maniére.

28. LOrsqu'on aura formé comme dans la résolution précédente la premiére égalité $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto \frac{-9aab+b^3}{-3\sqrt{-3}}$, on ajoûtera, comme on l'a déja fait, son premier membre au premier de l'égalité $\frac{1}{2}q \propto a^3 - abb$, & son second membre au second; & aprés cela on fera le contraire, en retranchant le premier membre du premier $\frac{1}{2}q$, & le second du second $a^3 - abb$. Ce qui fournira les deux égalitez $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto a^3 - abb \frac{-9aab+b^3}{-3\sqrt{-3}} \propto \frac{-3a^3\sqrt{-3}+3abb\sqrt{-3}-9aab+b^3}{-3\sqrt{-3}}$ & $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \propto a^3 - abb \frac{+9aab-b^3}{-3\sqrt{-3}} \propto \frac{-3a^3\sqrt{-3}+3abb\sqrt{-3}+9aab-b^3}{-3\sqrt{-3}}$. Et tirant dans chacune les racines cubiques des deux membres, on formera les deux égalitez $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \propto \frac{+b+a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}$ & $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \propto \frac{-b+a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}$. Et leur somme fournira sous l'expression de Cardan une valeur de la vraie racine $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \propto \frac{+b-b+2a\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} \propto 2a$.

QUE CES RESOLUTIONS NE SUFFISENT PAS.

29. J'Avouë que j'ai senti un grand transport de joie, lorsque j'ai découvert & formé deux démonstrations si belles & si générales. Et il me sembloit presque que l'on auroit sujet de se contenter, & de ne rien désirer davantage pour une résolution entiére & parfaite de toutes les égalitez déterminées dans le degré solide. Cependant la complaisance, toute aveugle qu'elle est dans de si hautes découvertes, ne m'a pas empêché de voir que les résolutions n'étoient pas naturelles, & ne pouvoient passer pour légitimes, quoique leur certitude fût hors de toute atteinte. Car être assuré que des grandeurs n'ont rien d'imaginaire, & ne pouvoir pourtant les connoître que sous des expressions qui supposent l'absurde; c'est n'en avoir du tout aucune connoissance, lors principalement qu'on ne peut rien dégager des signes, comme il arrive infailliblement, si chaque racine est incommensurable. Ainsi tout ce que j'ai fait ne m'avance de

rien; & si je veux tenter méthodiquement la résolution, il faut que je m'y prenne d'une autre maniére. On pourra, si l'on veut, commencer ainsi ses raisonnemens.

La proposée est $y^3 * - py - q \propto 0$, & sa transformée $y^3 * \begin{matrix} -3aay & -2a^3 \\ -1bbz & +2abb \end{matrix} \propto 0$. Et la comparaison des troisiémes termes fournira l'égalité $1p \propto 3aa + bb$. Et cubant de part & d'autre, on aura $1p^3 \propto 27a^6 + 27a^4bb + 9aab^4 + b^6$. Et la comparaison des quatriémes termes fournira encore l'égalité $1q \propto 2a^3 - 2abb$, ou $\frac{1}{2}q \propto 1a^3 - 1abb$. Et quarrant chaque membre, on aura l'égalité $\frac{1}{4}qq \propto a^6 - 2a^4bb + 6aab^4$. Et si on multiplie chaque membre par 27, pour la comparer facilement avec la précédente, on trouvera $\frac{27}{4}qq \propto 27a^6 - 54a^4bb + 27aab^4$. Otant donc cette égalité de la précédente, ou $\frac{27}{4}qq$ du cube $1p^3$, & la valeur de $\frac{27}{4}qq$ de la valeur du cube $1p^3$; on trouvera cette égalité $81a^4bb - 18aab^4 + b^6 \propto 1p^3 - \frac{27}{4}qq$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, on aura l'égalité $9aab - b^3 \propto \sqrt{1p^3 - \frac{27}{4}qq}$. Mais cela ne donne encore rien, puisqu'on n'en peut tirer aucune connoissance des grandeurs a & b.

Si on vouloit écrire l'égalité $x^3 * - 3px - \sqrt{4p^3 - 27qq} \propto 0$; ses trois racines seroient les différences alternatives des trois de l'égalité proposée $y^3 * - py - q$. Car mettant pour p sa valeur $3aa + 1bb$, & pour q sa valeur $2a^3 - 2abb$; on la transformeroit en celle-ci $x^3 * \begin{matrix} -9aax & -18aab \\ -3bbx & +2b^3 \end{matrix} \propto 0$, qu'on peut diviser par $x - 3a - b \propto 0$, & par $x + 3a - b \propto 0$, & par $x + 2b \propto 0$. D'où il est clair que ses racines sont la vraie $3a + b$, & les deux fausses $- 3a + b$ & $- 2b$.

Et si on vouloit écrire cette autre égalité $v^3 + pvv * - qq \propto 0$; ses trois racines seroient les plans alternatifs des trois de la premiére égalité $y^3 * - py - q \propto 0$. Car si on met $3aa + bb$ pour p, & $2a^3 - 2abb$ pour q dans cette nouvelle égalité; elle sera transformée en celle-ci $v^3 \begin{matrix} +3aavv \\ +1bbvv \end{matrix} * \begin{matrix} -4a^6 \\ +8a^4bb \\ -4aab^4 \end{matrix} \propto 0$, qui est un produit des trois égalitez $v - aa + bb \propto 0$, $v + 2aa + 2ab \propto 0$, $v + 2aa - 2ab \propto 0$. De sorte que ses trois racines sont la vraie $aa - bb$, & les deux fausses $- 2aa - 2ab$ & $- 2aa + 2ab$, c'est-à-dire les plans alternatifs des trois racines $- a - b$, $- a + b$, $+ 2a$, de la proposée.

Et si quelque racine pouvoit être enfin découverte dans l'une ou l'autre de ces égalitez, ou dans quelques-unes de celles qu'on en pourroit tirer; ou ce qui revient au même, si quelqu'une des différences alternatives des racines qu'on cherche, ou quelqu'un des plans alternatifs étoit commensurable; ou qu'il y eût quelque racine commensurable dans une seule des égalitez qu'on pourroit trouver successivement; il y auroit moyen de retourner en rétrogradant à une détermination legitime des justes valeurs de l'inconnuë y.

PROBLEME VII.

30. *Pour approcher autant qu'on voudra de la juste valeur des racines incommensurables d'une égalité proposée.*

On la divisera par deux égalitez feintes de l'inconnuë moins deux divers diviseurs de son dernier terme, tels que l'une des divisions laisse un reste positif, & l'autre un reste négatif. Et ajoûtant au moindre diviseur la demie-différence des deux, on divisera l'égalité proposée par une feinte de l'inconnuë moins la somme que l'on aura prise. Et si le reste est encore négatif; on fera des divisions semblables, ajoûtant aux derniéres grandeurs la moitié de l'excez dont elles sont surpassées par les précédentes. Et lorsqu'une des divisions laissera un reste positif, on en fera encore de pareilles, ajoûtant aux derniéres grandeurs qui auront laissé des restes négatifs la moitié de l'excez dont elles sont surpassées par celles qui auront laissé le dernier reste positif. Et rëïtérant les mêmes régles jusques à l'infini, on approchera aussi toûjours jusqu'à l'infini de la juste valeur d'une vraie racine de l'égalité.

EXEMPLE.

On reconnoîtra en observant les régles, qu'il y a trois racines inégales & incommensurables, & qu'aucune n'est imaginaire dans cette égalité $y^3 * - 12y - 12 \propto 0$. Et si on la divise par une égalité feinte $y - 3 \propto 0$; on trouvera un reste négatif $- 21$. Mais si on la divise par $y - 4 \propto 0$; on trouvera le reste positif $+ 4$. Ainsi on prendra la différence 1, dont 4 surpasse 3, & sa moitié $\frac{1}{2}$ sera ajoûtée à 3. Et alors on divisera l'égalité proposée par une feinte $y - \frac{7}{2} \propto 0$; ce qui donnera un reste négatif $- 11\frac{1}{8}$. C'est pourquoi on ajoûtera à $\frac{7}{2}$ la demie-différence $\frac{1}{4}$ de 4 sur $\frac{7}{2}$. Et l'égalité proposée sera divisée ensuitte par une feinte $z - \frac{15}{4} \propto 0$; ce qui laissera encore un reste négatif $- 4\frac{17}{64}$. On prendra donc la demie-différence $\frac{1}{8}$ de 4 sur $\frac{15}{4}$, & l'ajoûtant à $\frac{15}{4}$, on fera la division par $z - \frac{31}{8} \propto 0$; & on aura encore un reste négatif $- \frac{161}{512}$. De sorte qu'il faudra encore ajoûter à $\frac{31}{8}$ la demie-différence $\frac{1}{16}$ de 4 sur $\frac{31}{8}$, pour diviser ensuitte l'égalité proposée par une feinte $z - \frac{63}{16} \propto 0$. Et comme la division laissera un reste positif $1\frac{3263}{4096}$, on ajoûtera seulement à $\frac{31}{8}$ la demie-différence $\frac{1}{32}$ dont $\frac{63}{16}$ surpasse $\frac{31}{8}$. Et on divisera la proposée par l'égalité feinte $z - \frac{125}{32} \propto 0$; ce qui donne encore un reste positif $\frac{23909}{32768}$. D'où il est déja permis de conclurre que la juste valeur de la vraie racine z est entre $3\frac{28}{32}$ & $3\frac{29}{32}$. Et on pourra continuer l'approche jusques où l'on voudra, en observant toûjours les mêmes régles. De sorte qu'on peut se consoler de l'impuissance où on est d'arriver à la juste valeur, puisqu'on la peut toucher de si prés, que ce qui luy manquera, ou ce qui l'excédera, sera moindre que telle particule qu'on pourra désirer.

DE LA DIFFERENTE CONDUITTE

QU'ON A TENUE DANS LES RECHERCHES EXTRAORDINAIRES.

31. Parmi la foule des questions, qu'on propose dans les Mathématiques, il y en a peu qui ayent tant éxercé l'esprit des Sçavans, que celles qui pouvoient le moins se résoudre. On sçait combien ces recherches fameuses de la quadrature du cercle & de la duplication du cube, dont nous aurons sujet de parler ailleurs, ont fait presqu'en tout temps de bruit dans le monde, & combien elles ont donné de tortures aux Mathématiciens & aux Géométres.

Les plus sages & les plus habiles, aprés avoir épuisé dans ces sortes de recherches tout ce qu'ils avoient de vigueur & de pénétration, ont avoüé sincérement leur foiblesse & leur impuissance; & pour se consoler de toutes leurs tentatives inutiles, ils se sont contentez d'avoir au moins trouvé les moyens d'en approcher toûjours de si prés qu'on voudroit, puisqu'ils n'y pouvoient arriver au juste.

Quelques-uns moins sincéres, que l'amour de la gloire, ou certains intérests secrets, animoient bien plus dans leurs recherches, que cette noble ardeur qu'on sent pour la vérité, bien loin de porter le jour & de répandre la lumiére dans l'esprit des Lecteurs, n'ont affecté qu'à tout embroüiller sous l'embarras confus de plusieurs difficultez entassées sans ordre; dans la pensée que la plus-part de ceux qui viendroient à les examiner, n'oseroient dire qu'on n'y peut rien entendre, ou feroient semblant de les approuver, de peur qu'on ne les crût eux-mêmes trop peu intelligens.

Les plus addroits mêlant subtilement un petit nombre de suppositions fausses parmi plusieurs véritez certaines, ont crû qu'il suffiroit ensuitte de tout promettre d'un air assûré & content, & qu'à force de faire beaucoup de bruit & d'ostentation, il leur seroit facile de persuader ce qu'ils ne pouvoient concevoir eux-mêmes. Et véritablement ils ont bien

vû.

vû que les habiles gens découvriroient enfin tous leurs ſtratagêmes, & feroient voir à nud des erreurs déguiſées par tant d'artifices. Mais ils ſe ſont ſatisfaits dans l'eſpérance que cela n'arriveroit pas ſi tôt, & qu'il leur ſeroit au moins permis pendant quelque temps de marcher en triomphe ſur la teſte des Archimédes & des Théodoſes, des Apollonius & des Ptolomées, & de tous les grands Hommes qui ont excellé dans les Mathématiques.

Ils ont même eſpéré, que ſi le jugement éxact & ſévére des perſonnes intelligentes leur donnoit du chagrin, il ſeroit auſſi-tôt diſſipé, lorſqu'une multitude un peu moins éclairée leur applaudiroit; & qu'il leur ſeroit toûjours glorieux d'être entré dans le champ de bataille, & d'avoir préſenté le combat, comme avec égalité d'armes & de forces, aux plus expérimentez, eux qui n'étoient ſouvent que de ſimples Avanturiers, qui n'avoient jamais fait paroître aucun eſſai de leurs forces & de leur addreſſe dans les éxercices juſtes & réglez de l'eſprit & de la raiſon, & qui auroient à peine été les diſciples de ceux, dont ils prétendoient ſe faire un trophée. Qu'en tout cas, ils riſquoient peu de choſe, & que de quelque côté que la chance tournât, il y auroit toûjours plus de gain que de perte pour eux, parceque ſi on revenoit enfin dans le monde de la prévention, où on auroit été en leur faveur, ils ne laiſſeroient pas d'y conſerver encore quelque rang parmi les Sçavans, puiſqu'ils avoient oſé tenter de ſi grandes choſes. Qu'aprés tout on ne pourroit leur ravir l'honneur d'avoir engagé des perſonnes véritablement ſçavantes à écrire contr'eux: ce qui paroît fort conſidérable à beaucoup de gens, chez qui tous ceux qui diſputent enſemble ſont mis en paralléle, comme ſi chacun avoit également raiſon. Si je m'arrête un peu à parler de ce genre irrégulier d'Auteurs; c'eſt qu'il eſt bon d'en pouvoir diſcerner quelquesfois le génie & le caractére.

D'autres enfin ont agi plus ſincérement, quoiqu'ils n'ayent pas eü un ſuccez favorable. Comme ils ſe ſont conduits dans leurs recherches avec moins d'ordre & d'éxactitude qu'il n'étoit néceſſaire, ils n'ont pû s'empêcher d'y faire quelques fauſſes démarches; ébloüis par un éclat trompeur de la vrai-ſemblance, ils ont crû voir la lumiére pure de la vérité; & s'imaginant auſſi-tôt qu'on verroit & jugeroit comme eux en liſant leurs penſées, ils ont expoſé de bonne foy leurs erreurs au public. Et ce ne ſont pas ſimplement des eſprits médiocres, ou des Auteurs du commun, qui ſont tombez dans ce deffaut; pluſieurs des plus illuſtres & du premier ordre n'ont pû s'en garentir. Il eſt vrai qu'on les a vû ſouvent ſe relever avec gloire, lorſqu'ayant eux-mêmes apperçû le point où ils s'étoient trompez, ils ſont revenus avec une facilité d'autant plus grande, qu'ils n'avoient point eü deſſein en s'écartant, d'aller contre la vérité: dignes certes d'être eſtimez pour leur noble entrepriſe, mais beaucoup plus encore pour la candeur & la ſincérité de leurs grandes ames, qui ont ſceu ſe ſoûmettre à la force de la vérité: & cela dans des conjonctures délicates & fâcheuſes, où la ſuperbe & la fierté d'une foule de demi-ſçavans ne ſçait jamais ce que c'eſt que plier: parcequ'ils ſont pleins de ces fauſses maximes, qu'il y va de l'honneur à ne se dédire & à ne démordre en rien; & qu'il est plus honteux d'avoüer une erreur excusable & toute innocente, que de la maintenir à quelque prix que ce soit.

Il y a bien de l'apparence que la résolution générale & analytique des égalitez du troisiéme degré, où nulle racine n'est imaginaire, suivra le sort de ces résolutions éclattantes, qu'on recherche en vain depuis tant de siécles. Plusieurs Sçavans l'ont déja tentée, mais toutes leurs peines n'ont servi qu'à faire mieux sentir les difficultez insurmontables, qui la couvrent & qui l'environnent.

Le subtil Diophante, ce Maistre illustre de l'ancienne Analyse, qui peut au jugement des Sçavans disputer le prix au grand Archiméde pour l'excellence de ses découvertes, ne paroît pas s'être élevé jusqu'à une si haute recherche. Monsieur Viéte, à qui l'Analyse moderne est redevable de ses commencemens, & qui a enrichi les Mathématiques de plusieurs inventions extraordinaires, n'a pas même parlé de celle-ci, quoiqu'il fournisse les moyens d'y venir par approximation. Monsieur Descartes mêmes, ce prodige du siécle, ce grand & vaste genie, qui a plus donné de lustre à la France, que tous les Archimédes, les Apollonius & les Diophantes n'en donnérent à la sçavante Gréce, s'est vû malgré ses généreux efforts contraint de quitter prise, & réduit à chercher dans la Géométrie ce qu'il ne pouvoit trouver dans la pure Analyse. Tous ceux qui sont venus depuis n'ont rien fait de plus, & se sont contentez de le suivre.

Je me vis indispensablement obligé par le dessein de mon premier Ouvrage à m'exercer sur la même recherche. J'y trouvai comme un labyrinthe inexplicable de difficultez, ou qui rentroient dans la premiére, parcequ'elles étoient du même ordre; ou qui me rejettoient plus loin, parcequ'elles étoient d'un ordre beaucoup plus composé. Je travaillai longtemps. Et lors même que j'eüs tout-à-fait perdu l'esperance, je ne laissai pas d'employer encore souvent de nouveaux efforts, tant j'étois transporté d'ardeur pour une découverte, qui emporte avec soi toutes les résolutions impossibles des problêmes solides; ce qui est préférable sans doute à mille inventions de la quadrature & de la duplication du cube. Je sentois, ce me semble, redoubler mon courage, en considérant que si je pouvois rompre & forcer une fois cette puissante barriére, où l'esprit est arrêté tout court; il auroit désormais une entrée parfaitement libre, & pourroit marcher de plein pied dans la vaste étenduë du troisiéme degré. Mais aprés avoir enfin succombé sous le poids d'un travail, qui passoit mes forces, & qui croissoit toûjours; & aprés avoir reconnu même assez clairement par le secours des combinaisons, que la découverte légitime & naturelle étoit impossible: je crus qu'il falloit adorer la Sagesse infinie de Nôtre Divin Maître, qui a voulu briser à ce point l'orgueil de la raison, & la violente impétuosité de tous ses efforts. *Huc usque venies, & illic confringes tumentes fluctus tuos.* Et pour tirer tout le fruit que je pourrois de ce que j'avois appris par une expérience si rude, & à tant de frais; je trouvai moyen de tracer une route assurée, où ceux qui seroient résolus de tenter fortune, pourroient aisément éviter la méprise & l'erreur. Et en effet plusieurs personnes pour l'avoir ignorée, & pour s'être engagées au hazard dans certaines routes qui conduisent ailleurs, se sont trompées insensiblement, & n'ont pû reconnoître en aucune sorte ce qui étoit capable de les redresser. Je me contenterai d'en citer un exemple, qui a fait plus de bruit parmi les Sçavans que les autres.

DE LA RESOLUTION PRETENDUE
DES EGALITEZ DU TROISIEME DEGRÉ,
insérée dans les Journaux de Lipsic en 1682.

MOnsieur Tchirnhaus Gentil-homme Alleman, à qui la distinction de sa Naissance & la beauté de son esprit procurérent en France, il y a quelques années, l'honneur d'entrer dans l'Académie Royale des Sciences, communiqua en 1682 à l'Auteur des Journaux de Lipsic une résolution des égalitez solides, qu'il prétend générale : On est d'abord frappé de sa méthode, & on y trouve je ne sçai quoi d'ingénieux & de naturel, dont il n'est pas aisé de se garentir, quand on ne juge que par la surface, & qu'on n'approfondit pas. Elle eut d'illustres approbateurs, & fut fort estimée dans Paris, lorsqu'elle y parut la premiére fois. De sorte qu'il ne faut pas s'étonner, si certains esprits qui sont un peu jeunes, & qui ne cherchent qu'à tirer du profit d'un travail qui ne leur coûte rien, ou qu'à se faire honneur des inventions d'autruy, & à se produire aux dépens de qui il appartiendra, courent encore aujourd'huy publier par tout, qu'ils ont aussi trouvé la même chose, & mêmes qu'ils sont prests de pousser bien plus loin. Cependant comme ils parlent au hazard, & d'une maniére incertaine & vague, ils ne s'engagent à rien ; & pourvû qu'on paroisse disposé à les croire, il leur importe peu de fournir les preuves de ce qu'ils osent avancer d'un air si résolu.

Il est vrai que d'habiles gens ont reconnû par expérience la fausseté de la régle, parcequ'en voulant l'appliquer à des égalitez, dont ils sçavoient au juste la composition ; ils ont trouvé des résolutions entiérement différentes de celles qu'on auroit dû trouver, & qui étoient connuës parfaitement d'ailleurs. Mais nul que je sçache n'a pû marquer au juste le point où consiste l'erreur, quoiqu'il soit aisé de le discerner, pour peu qu'on fasse d'attention sur les diverses transformées que j'ai fourni pour le troisiéme degré. Les raisonnemens de l'Auteur sont fort embarrassez, faute d'avoir eü assez l'Analyse en main. J'en faciliterai l'ordre, & je réduirai sa méthode à toute la simplicité qu'elle peut avoir, & même j'aurai soin de fortifier ses preuves, en y répondant.

METHODE.

Pour résoudre en général toute égalité $y^3 * - py - q \propto 0$; il suppose une égalité plane $yy - ay - b - x \propto 0$. Il faudra donc [b] que la valeur b. 16. 1.

née dans l'égalité $yy - ay - b - x \propto 0$, parcequ'elle est une somme de deux racines de l'égalité $y^3 * - py - q \propto 0$; l'une vraie & l'autre fausse : je laisse à part le cas où deux racines sont imaginaires. Si donc a est la somme d'une racine vraie & d'une racine fausse ; il ne sera pas libre de la prendre à discretion, ni de supposer qu'elle est indéterminée, comme a fait l'Auteur, lorsqu'il a voulu que la somme $aa - \frac{3q}{1p}a + \frac{1}{3}p$ fût nulle.

Il est vrai que si l'égalité $y^3 * - py - q \propto 0$ renfermoit deux racines égales $-a$ & $-a$, ou que le cube $\frac{1}{27}p^3$ fût égal [b] au quarré $\frac{1}{4}qq$, la résolution toute irréguliére & fautive qu'elle est, fourniroit une juste va- b. 9.
leur $-a \propto -\frac{3q}{2p}$. Mais x alors seroit nulle, ou tirée d'une égalité $x^3 * * * \propto 0$, parceque le quatriéme terme $\frac{8}{27}p^3 + \frac{27q^4}{2p^3} - 4qq + \frac{27q^3 - 4p^3q}{p^3}\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ seroit évanoüi, comme il paroît clairement, en y mettant [b] pour p sa valeur $2a^3$. Et cela s'accorderoit fort bien avec la b. 9.
supposition de l'égalité $yy - ay - b - x \propto 0$, où il y a une racine vraie $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x}$, & une fausse $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x}$. Car si on met pour b sa [b] valeur $\frac{2}{3}p$ ou $2aa$, & qu'on efface x qui n'a point de valeur ; la vraie racine $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x}$ sera [b] au juste $2a \propto \frac{6a^3}{3aa} \propto \frac{3q}{1p}$, & la fausse $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + x}$ sera au juste $- 1a \propto - \frac{6a^3}{6aa} \propto - \frac{3q}{2p}$. Cette remarque eût beaucoup servi pour confirmer la régle, & pour luy fournir des exemples, si on l'eût apperçûë.

Cependant la régle en elle-même ne peut de rien servir, lorsque les racines sont toutes inégales. Et même elle suppose une contradiction manifeste, lorsqu'il n'y en a point d'imaginaire, puisqu'on y trouve la grandeur negative $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ sous le signe $\sqrt{}$. Et il est bien aisé de se convaincre par expérience de la fausseté, en choisissant quelque égalité, comme $y^3 * - 24y - 72 \propto 0$, dont on connoisse la vraie racine 6, & les deux autres $-3 + \sqrt{-3}$ & $-3 - \sqrt{-3}$. Car celle que fournira la régle, & qui est $4 + \sqrt{32} - \sqrt{C.16464}$, est tout-à-fait différente. Ainsi tout ce que l'Auteur ajoûte pour preuve ne luy sert de rien.

Afin, dit-il, de confirmer ce que j'ai avancé, je vai montrer en peu de mots, comment en ôtant tous les termes moyens on peut trouver une autre expression des racines d'une équation cubique, qui réponde parfaitement à celle de Cardan. Soit proposée l'égalité $y^3 * - py - q \propto 0$, & qu'on suppose $yz \propto zz + a$, ou $y \propto \frac{zz + a}{z}$, l'égalité $y^3 * - py - q \propto 0$ sera

donc $\frac{z^6 + 3az^4 + 3aazz + a^3 - pz^4 - apzz - qz^3}{z^3} \propto 0$. Et ſi on la mulplie par z^3, & qu'on l'ordonne enſuitte ; on aura $z^6 \begin{matrix} + 3az^4 \\ - 1pz^4 \end{matrix} - qz^3 \begin{matrix} + 3aazz \\ - apzz \end{matrix} * + a^3 \propto 0$, où ſuppoſant que le ſecond terme eſt nul, on trouvera $1a \propto \frac{1}{3}p$, & par la même ſuppoſition le quatriéme terme ſera évanoüi. De ſorte qu'on aura l'égalité $z^6 * - qz^3 ** + a^3 \propto 0$, ou $z^6 - qz^3 + \frac{1}{27}p^3 \propto 0$. D'où l'on tirera une valeur $z \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Et y ou $z + \frac{a}{z}$ aura une
b. 15. même valeur que dans la réſolution de Cardan. Il eſt [b] aiſé d'obſerver que cette ſuppoſition $y \propto z + \frac{a}{z}$ ne paroît fabriquée qu'aprés coup, & ſur le modéle de la réſolution même déja toute formée, & que le terme nul $3az^4 - 1pz^4$ fait évanoüir néceſſairement l'autre $3aazz - apzz$, ſans parler du cinquiéme, qui eſt déja tout évanoüi. De ſorte qu'il ſuffit de déterminer a pour trouver tout le reſte. Mais dans la réſolution précédente un terme nul n'en fait pas néceſſairement évanoüir un autre. Et s'il eſt permis d'y déterminer à ſon choix une grandeur b ; il ne l'eſt pas d'en déterminer une autre a au hazard, puiſqu'elle eſt la ſomme de deux des trois racines. Et même dans l'égalité plane $yy - ay - b - x \propto 0$, où les deux racines ſont inégales & déterminées, la grandeur b ne feroit point arbitraire, s'il n'y en avoit une autre x avec elle. Car a comprend la ſomme des deux racines, & $b + x$ leur plan. De ſorte que b n'eſt indéterminée que par une ſuppoſition implicite ou ſecrette, que l'autre x ajoutera ce qui manque, ou retranchera ce qu'il y a de trop, pour former au juſte le plan des deux racines. Mais pour l'autre égalité $yz \propto zz + a$, la racine y qui s'y trouve ſeulement au linéaire, & qui eſt déterminée, peut demeurer toûjours la même, quoique les deux grandeurs z & a varient à l'infini. Cependant cette ſuppoſition même ne ſervira de rien pour former une réſolution naturelle & legitime des égalitez ſolides, où une racine eſt vraie, & les deux autres fauſſes, & où de plus chacune des trois eſt incommenſurable. De ſorte que Monſieur Tchirnhaus & tous ceux aprés luy qui ont prétendu, ſans même en apporter de preuve, que la réſolution de Cardan pouvoit ſatisfaire au cas dont je parle, n'ont eü que des idées
c. 26. incertaines & confuſes de ce qu'ils avançoient, en le laiſſant au hazard à prouver à d'autres. Surquoi je ne dois pas répéter ce que j'ai dit [c] ailleurs, pour faire voir combien la régle de Cardan eſt inſuffiſante. Et il ſera aiſé de montrer en Géométrie, que l'expreſſion de la vraie racine déterminée par la même régle, eſt entiérement inutile. De ſorte que j'ai droit de conſidérer ces ſortes d'égalitez comme n'étant point encore pleinement réſoluës, quoique leurs racines puiſſent être exprimées en deux
d. 27 & 28. différentes maniéres, comme je l'ai [d] clairement démontré.

VIII PROBLEME.

32. *POur transformer une égalité du quatriéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi.*

Ayant nommé $-p$ ou $+p$ la quantité connuë au troiſiéme terme, & $-q$ la quantité connuë dans le quatriéme, & $+r$ ou $-r$ celle qui eſt connuë dans le cinquiéme; l'égalité aura l'une de ces quatre formes.

1

1^{ere} *forme* $\{ z^4 * - pzz - qz + r \propto 0$. 2^e *forme* $\{ z^4 * - pzz - qz - r \propto 0$.
3^e *forme* $\{ z^4 * + pzz - qz + r \propto 0$. 4^e *forme* $\{ z^4 * + pzz - qz - r \propto 0$.

On ſuppoſe $-q$ dans chacune; parceque s'il y avoit $+q$, on ne feroit autre choſe en y mettant $-q$, que changer les ſignes des racines.

PREMIER CAS.

POUR LE PREMIER GENRE

où nulle racine n'eſt imaginaire.

33. SI donc l'égalité de la premiére forme $z^4 * - pzz - qz + r \propto 0$ ou de la ſeconde $z^4 * - pzz - qz - r \propto 0$, n'a aucune racine imaginaire; la diſpoſition des ſignes marquera qu'il y a dans la premiére deux racines vraies & deux racines fauſſes; & qu'il n'y en a dans la ſeconde qu'une vraie avec trois fauſſes. Et le ſecond terme évanoüi fera juger qu'une ſomme poſitive de deux racines égale ſous ſon ſigne une ſomme négative des deux autres ſous le leur. On nommera donc $2a$ la ſomme poſitive de deux racines, & leur différence $2b$; & $-2a$ la ſomme négative des deux autres, & leur différence $2c$. Et les quatre racines ſeront $a + b$, $a - b$, $-a + c$, $-a - c$. Et les quatre égalitez linéaires $z - a - b \propto 0$, $z - a + b \propto 0$, $z + a - c \propto 0$, $z + a + c \propto 0$; ou les deux planes $zz - 2az \begin{smallmatrix} + aa \\ - bb \end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + 2az \begin{smallmatrix} + aa \\ - cc \end{smallmatrix} \propto 0$, composeront par leur produit la transformée de la premiére ou de la ſeconde forme: de la premiére, ſi les deux racines $a + b$ & $a - b$ ſont vraies, ou ſi $1a$ ſurpaſſe $1b$; & de la ſeconde, ſi $a - b$ eſt une racine fauſſe, ou ſi $1a$ eſt moindre que $1b$.

Lorſque rien n'eſt imaginaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{ere}\ \textit{forme}\ z^4 * - pzz - qz + r \propto 0. \\ 2^{e}\ \textit{forme}\ z^4 * - pzz - qz - r \propto 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Transformée} \\ \textit{commune} \end{array} \right. \quad z^4 * \begin{array}{l} -2aazz \\ -1bbzz \\ -1cczz \end{array} \begin{array}{l} -2abbz \\ +2accz \end{array} \begin{array}{l} +a^4 \\ -aabb \\ -aacc \\ +bbcc \end{array} \propto 0.$$

I COROLLAIRE ET PROBLEME IX.

POUR LE MESME GENRE.

34. *Pour réduire au troisiéme degré les égalitez des formes précédentes, lorsque nulle racine n'est imaginaire.*

Au lieu des deux égalitez planes $zz - 2az \begin{smallmatrix}+aa\\-bb\end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + 2az \begin{smallmatrix}+aa\\-cc\end{smallmatrix} \propto 0$, on pourra prendre afin d'abbréger, les deux planes $zz - yz \begin{smallmatrix}+x\\-v\end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + yz \begin{smallmatrix}+x\\+v\end{smallmatrix} \propto 0$. Et leur produit $z^4 * \begin{smallmatrix}-yyzz\\+2xzz\end{smallmatrix} - 2vyz \begin{smallmatrix}+xx\\-vv\end{smallmatrix} \propto 0$ sera la transformée de l'égalité qu'on propose. Comparant donc, pour la premiére forme, les troisiémes termes $-yyzz + 2xzz$ & $-pzz$, on trouvera $1x \propto \frac{yy-p}{2}$. Et la comparaison des quatriémes qz & $2vyz$ donnera $1v \propto \frac{1q}{2y}$. Et la comparaison des cinquiémes donnera $xx - vv \propto r$, où mettant pour x sa valeur $\frac{yy-p}{2}$, & pour v sa valeur $\frac{1q}{2y}$, on formera l'égalité $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - \frac{qq}{4yy} \propto r$. Et multipliant de part & d'autre par $4yy$, on aura enfin l'égalité $y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix}+ppyy\\-4ryy\end{smallmatrix} - qq \propto 0$, qui n'a proprement que trois degrez, & qui sera nommée la réduitte de celle où il y aura $+r$. Mais s'il y avoit $-r$ dans la proposée, il suffiroit de changer $-$ en $+$ pour $4ryy$, pour former la réduitte. Et si on met pour chacune des grandeurs p, q, r, la valeur empruntée dans la transformée précédente; on aura la réduitte de cette transformée telle qu'on l'expose ici.

Lorsqu'il n'y a rien d'imaginaire.

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Proposée de la 1}^{\textit{ere}}\textit{ forme.}\\ z^4 * - pzz - qz + r \propto 0.\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}\textit{Sa réduitte du 3}^{\textit{e}}\textit{ degré.}\\ y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix}+ppyy\\-4ryy\end{smallmatrix} - qq \propto 0.\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Proposée de la 2}^{\textit{de}}\textit{ forme.}\\ z^4 * - pzz - qz - r \propto 0.\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}\textit{Sa réduitte du 3}^{\textit{e}}\textit{ degré.}\\ y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix}+ppyy\\+4ryy\end{smallmatrix} - qq \propto 0.\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Transformée commune.}\\ z^4 * \begin{matrix}-2aazz\\-1bbzz\\-1cczz\end{matrix} \begin{matrix}-2abbz\\+2accz\end{matrix} \begin{matrix}+a^4\\-aabb\\-aacc\\+bbcc\end{matrix} \propto 0.\end{matrix}\right.\quad \left\{\begin{matrix}\textit{Sa réduitte du 3}^{\textit{e}}\textit{ degré.}\\ y^6 \begin{matrix}-4aay^4\\-2bby^4\\-2ccy^4\end{matrix} \begin{matrix}+8aabbyy\\+8aaccyy\\+b^4yy\\-2bbccyy\\+c^4yy\end{matrix} \begin{matrix}-4aab^4\\+8aabbcc\\-4aac^4\end{matrix} \propto 0.\end{matrix}\right.$$

II COROLLAIRE.

II COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

35. Ce premier genre des égalitez surſolides aura toûjours $-p$. Et ſa réduitte aura toûjours trois racines vraies, parce qu'on peut diviſer ſa transformée par $yy - 4aa \propto 0$, & par $yy - bb - 2bc - cc \propto 0$, & par $yy - bb + 2bc - cc \propto 0$. Et dans le même genre $\frac{1}{2}p$ ou ſa valeur $aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$ ſurpaſſera toûjours $aa + \frac{1q}{4a}$ ou ſa valeur $aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$. Et le troiſiéme terme de la réduitte ſera toûjours poſitif, puiſque $b^4 - 2bbcc + c^4$ eſt au juſte un quarré de $bb - cc$.

III COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

36. Si dans le même genre on connoît le quarré $4aa$, on connoîtra facilement les quatre racines de la propoſée. Car la comparaiſon des troiſiémes termes $-2aazz - bbzz - cczz$ & $-pzz$ donnera $1aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc \propto \frac{1}{2}p$, ou $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc \propto \frac{1}{2}p - aa$. Et la comparaiſon des quatriémes termes donnera $2abb - 2acc \propto q$, ou $\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc \propto \frac{1q}{4a}$. Et ſi on ajoûte cette égalité à la précédente; la ſomme ſera $1bb \propto \frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}$. Mais ſi on l'ôte de la précédente; le reſte ſera $1cc \propto \frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}$. De ſorte que les grandeurs b & c ſeront déterminées. Et par conſéquent il ſera facile de déterminer les quatre valeurs de z. Et ce ſeroit la même choſe, ſi on connoiſſoit d'abord une des deux racines yy de la réduitte, qui ſont $bb + 2bc + cc$ & $bb - 2bc + cc$. De ſorte que ſi l'on ſçavoit qu'une grandeur fût l'une des trois valeurs yy ſans ſçavoir laquelle, en la nommant $4dd$, les quatre valeurs de z ſeroient toûjours celles-ci $1d + \sqrt{\frac{1}{2}p - dd + \frac{1q}{4d}}$, $1d - \sqrt{\frac{1}{2}p - dd + \frac{1q}{4d}}$, $-1d + \sqrt{\frac{1}{2}p - dd - \frac{1q}{4d}}$, $-1d - \sqrt{\frac{1}{2}p - dd - \frac{1q}{4d}}$.

IV COROLLAIRE.

POUR UNE ESPECE DE CE GENRE.

37. Si dans le même genre des égalitez ſurſolides, où nulle racine n'eſt imaginaire, les deux racines fauſſes ſont égales, leur différence $2c$ ſera nulle. De ſorte qu'effaçant $-cczz + 2accz - aacc + bbcc$ dans la transformée qu'on a découverte, on aura cette égali-

té $z^4 \begin{matrix} -2aazz \\ -1bbzz \end{matrix} -2abbz \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} \propto 0$ pour transformée commune de la premiére forme $z^4 * - pzz - qz + r \propto 0$ & de la seconde $z^4 * - pzz - qz - r \propto 0$. Et pour la premiére forme, la comparaiſon des troiſiémes termes $-2aa - 1bb$ & $-p$ donnera $1bb \propto p - 2aa$. Et celle des quatriémes donnera auſſi $1bb \propto \frac{1q}{2a}$. Et celle des cinquiémes fournira encore une valeur $1bb \propto \frac{a^4 - r}{aa} \propto p - 2aa$. Et multipliant de part & d'autre par aa, on trouvera $a^4 - r \propto aap - 2a^4$. Ou $1a^4 - \frac{1}{3}aap - \frac{1}{3}r \propto 0$. D'où l'on tirera une valeur $aa \propto \frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}$. De ſorte qu'on connoîtra facilement les quatre racines $a + b \propto \frac{2}{3}p + \sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r} - 2\sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, $a - b \propto -\frac{2}{3}p + \sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r} + 2\sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, $-a \propto -\sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, $-a \propto -\sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$.

Et pour la ſeconde forme où il y a $-r$, on formera les racines de la même ſorte ; & il n'y aura qu'à changer les ſignes $+$ en $-$ par tout pour $\frac{1}{3}r$. Et ſi on vouloit des expreſſions plus courtes, aprés avoir pris $\sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp - \frac{1}{3}r}}$ pour a, on ſe contenteroit de prendre $\sqrt{\frac{1q}{2a}}$ pour b. Ce qu'on peut faire de la même ſorte lorſqu'il y a $+r$, ou qu'on doit prendre $\sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$ pour a.

SECOND CAS ET PROBLEME X.

POUR LE SECOND GENRE, où il y a deux racines réelles, & deux imaginaires.

38. *Pour transformer toute égalité surſolide, où le ſecond terme eſt évanoüi, lorſqu'elle a deux racines réelles & deux imaginaires.*

Si les deux réelles ſont nommées $a + b$ & $a - b$, & que la contradiction des deux imaginaires ſoit nommée cc ; les quatre valeurs de z ſeront $a + b$, $a - b$, $-a + \sqrt{-cc}$, $-a - \sqrt{-cc}$. Et les quatre égalitez ſimples $z - a - b \propto 0$, $z - a + b \propto 0$, $z + a - \sqrt{-cc} \propto 0$, $z + a + \sqrt{-cc} \propto 0$; ou les deux planes $zz - 2az \begin{matrix} +aa \\ -bb \end{matrix} \propto 0$ & $zz + 2az \begin{matrix} +aa \\ +cc \end{matrix} \propto 0$, composeront par leur produit la transformée commune des quatre formes : de la premiére, ſi a ſurpaſſe b, & ſi $2aa + bb$ ſurpaſſe encore cc ; de la ſeconde, ſi a vaut moins que b, & ſi $2aa$

$+bb$ surpasse cc; de la troisiéme, si a surpasse b, & si $2aa+bb$ vaut moins que cc; & de la quatriéme enfin, si a vaut moins que b, & si $2aa+bb$ vaut moins que cc.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{ere} \textit{ forme } z^4 * -pzz-qz+r \propto 0. \\ 2^{e} \textit{ forme } z^4 * -pzz-qz-r \propto 0. \\ 3^{e} \textit{ forme } z^4 * +pzz-qz+r \propto 0. \\ 4^{e} \textit{ forme } z^4 * +pzz-qz-r \propto 0. \end{array}\right\} \textit{Transformée commune } z^4 * \begin{array}{l} -2aazz \\ -1bbzz \\ +1cczz \end{array} \begin{array}{l} -2abbz \\ -2accz \end{array} \begin{array}{l} +a^4 \\ -aabb \\ +aacc \\ -bbcc \end{array} \propto 0.$$

I COROLLAIRE ET PROBLEME XI.

POUR LE MESME GENRE.

39\. *Pour réduire au troisiéme degré les égalitez des formes précédentes, lorsqu'il y a deux racines réelles & deux imaginaires.*

Si on suppose deux égalitez planes $zz-yz\begin{array}{l}+x\\-v\end{array}\propto 0$ & $zz+yz\begin{array}{l}+x\\+v\end{array}\propto 0$ au lieu des deux $zz-2az\begin{array}{l}+aa\\-bb\end{array}\propto 0$ & $zz+2az\begin{array}{l}+aa\\+cc\end{array}$; leur produit $z^4 * \begin{array}{l}-yyzz\\+2xzz\end{array} - 2vyz\begin{array}{l}+xx\\-vv\end{array}\propto 0$, sera encore une transformée commune aux quatre formes, & servira pour trouver leurs réduittes comme au problême neuviéme. Et si on met pour chacune des grandeurs p, q, r, sa valeur empruntée dans la transformée précédente; on aura la réduitte de cette transformée telle qu'on l'expose ici.

Lorsqu'il y a deux racines réelles, & deux imaginaires.

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Proposée de la } 1^{ere} \textit{ forme.}\\ z^4 * -pzz-qz+r\propto 0.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\textit{Sa réduitte du } 3^{e} \textit{ degré.}\\ y^6-2py^4\begin{array}{l}+ppyy\\-4ryy\end{array}-qq\propto 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Proposée de la } 2^{e} \textit{ forme.}\\ z^4 * -pzz-qz-r\propto 0.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\textit{Sa réduitte du } 3^{e} \textit{ degré.}\\ y^6-2py^4\begin{array}{l}+ppyy\\+4ryy\end{array}-qq\propto 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Proposée de la } 3^{e} \textit{ forme.}\\ z^4 * +pzz-qz+r\propto 0.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\textit{Sa réduitte du } 3^{e} \textit{ degré.}\\ y^6+2py^4\begin{array}{l}+ppyy\\-4ryy\end{array}-qq\propto 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Proposée de la } 4^{e} \textit{ forme.}\\ z^4 * +pzz-qz-r\propto 0.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\textit{Sa réduitte du } 3^{e} \textit{ degré.}\\ y^6+2py^4\begin{array}{l}+ppyy\\+4ryy\end{array}-qq\propto 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Transformée commune.}\\ z^4 * \begin{array}{l}-2aazz\\-1bbzz\\+1cczz\end{array}\begin{array}{l}-2abbz\\-2accz\end{array}\begin{array}{l}+a^4\\-aabb\\+aacc\\-bbcc\end{array}\propto 0.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\textit{Sa réduitte du } 3^{e} \textit{ degré.}\\ y^6\begin{array}{l}-4aay^4\\-2bby^4\\+2ccy^4\end{array}\begin{array}{l}+8aabbyy\\-8aaccyy\\+b^4yy\\+2bbccyy\\+c^4yy\end{array}\begin{array}{l}-4aab^4\\-8aabbcc\\-4aac^4\end{array}\propto 0.\end{array}\right.$$

II COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

40. LA réduitte de ces égalitez qu'on vient de transformer aura toûjours une vraie racine & deux imaginaires, parceque la réduitte qui eſt leur transformée, peut être diviſée ſans reſte par $yy - 4aa \propto 0$, & par $yy - bb + cc + \sqrt{-4bbcc} \propto 0$, & par $yy - bb + cc - \sqrt{-4bbcc} \propto 0$. Et s'il y a $-p$ dans la propoſée; la grandeur $\frac{1}{2}p$ ou $aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$ vaudra toûjours moins que l'autre $aa + \frac{1q}{4a} \propto aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$; mais elle vaudra plus que la grandeur $aa - \frac{1q}{4a} \propto aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$. Et s'il y a $+p$ dans la propoſée; la grandeur $\frac{1}{2}p$ ou $\frac{1}{2}cc - aa - \frac{1}{2}bb$ ſera toûjours moindre que $\frac{1q}{4a} - aa \propto \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc - aa$. Et on peut encore obſerver que la quatriéme forme appartient toûjours au ſecond genre des égalitez ſurſolides. Car $+p$ marque néceſſairement quelques racines imaginaires, c'eſt-à-dire au moins deux; & $-r$ au contraire marque qu'il y en a une fauſſe, & par conſéquent encore une vraie. Si le troiſiéme terme étoit évanoüi; il y auroit égalité entre $2aa + bb$ & cc.

III COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

41. SI dans le même genre on connoît le quarré $4aa$, on connoîtra facilement les quatre racines de la propoſée. Car ſuppoſant $-p$, la comparaiſon des troiſiémes termes donnera $\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc \propto \frac{1}{2}p - aa$. Et celle des quatriémes donnera $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc \propto \frac{1q}{4a}$. Et la ſomme de ces deux égalitez fournira celle-ci $1bb \propto \frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}$. Et leur différence en fournira une autre $1cc \propto \frac{1q}{4a} + aa - \frac{1}{2}p$. De ſorte que les quatre racines ſeront $a + b \propto a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - b \propto a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{-cc} \propto -a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$, $-a - \sqrt{-cc} \propto -a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$.

Mais s'il y avoit $+p$ dans la propoſée; les quatre racines ſeroient $a + b \propto a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - b \propto a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{-cc} \propto -a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$, $-a - \sqrt{-cc} \propto -a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$.

IV COROLLAIRE.

POUR UNE ESPECE DE CE GENRE.

42. SI les racines réelles sont égales, leur différence $2b$ sera nulle. De sorte qu'effaçant $-bbzz - 2abbz - aabb - bbcc$ dans la transformée qu'on a découverte, on aura cette nouvelle transformée $z^4 * \begin{smallmatrix} -2aazz \\ +1cczz \end{smallmatrix} - 2accz \begin{smallmatrix} +a^4 \\ +aacc \end{smallmatrix} \propto 0$ de l'égalité $z^4 * - pzz - qz + r \propto 0$. Et la comparaison des troisiémes termes donnera $cc \propto 2aa - p$. Et celle des cinquiémes donnera $cc \propto \frac{r - a^4}{aa} \propto 2aa - p$. Et on en tirera cette égalité $a^4 - \frac{1}{3}aap - \frac{1}{3}r \propto 0$, qui doit fournir une valeur $aa \propto \frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}$. De sorte que chacune des vraies racines a & a sera $\sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, & les deux imaginaires seront $-a + \sqrt{p - 2aa}$ & $-a - \sqrt{p - 2aa}$. Mais si l'égalité proposée avoit $+p$ au troisiéme terme; les vraies racines a & a seroient $\sqrt{-\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, & les imaginaires seroient $-a + \sqrt{-p - 2aa}$ & $-a - \sqrt{-p - 2aa}$.

V COROLLAIRE.

POUR UNE AUTRE ESPECE DU MESME GENRE.

43. S'Il y a égalité entre la demie-différence b & le côté c de la contradiction cc; la transformée sera $z^4 * - 2aazz - 4abbz \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -b^4 \end{smallmatrix} \propto 0$. Et on en tirera une valeur $a \propto \sqrt{\frac{1}{2}p}$ & une autre $b \propto \sqrt{\frac{1q}{4a}}$. De sorte que les quatre racines seront $\sqrt{\frac{1}{2}p} + \sqrt{\frac{1q}{2\sqrt{2p}}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}p} - \sqrt{\frac{1q}{2\sqrt{2p}}}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}p} + \sqrt{\frac{-1q}{2\sqrt{2p}}}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}p} - \sqrt{\frac{-1q}{2\sqrt{2p}}}$.

III CAS ET PROBLEME XII.

POUR LE TROISIEME GENRE,

où les quatre racines sont imaginaires.

44. *POur transformer toute égalité sursolide, où le second terme est évanoüi; lorsque ses racines sont toutes imaginaires.*

Si on nomme $2a$ la somme des deux d'une part, & leur contradiction bb, & cc la contradiction des deux autres: les égalitez $z - a - \sqrt{-bb} \propto 0$,

$z - a + \sqrt{-bb} \propto 0$, $z + a + \sqrt{-cc} \propto 0$, $z + a - \sqrt{-cc} \propto 0$; ou les deux planes $zz - 2az \begin{smallmatrix} +aa \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + 2az \begin{smallmatrix} +aa \\ +cc \end{smallmatrix} \propto 0$, composeront par leur produit la transformée de la premiére ou de la troisiéme forme; de la premiére, si $2aa$ surpasse $bb + cc$; & de la troisiéme si $2aa$ vaut moins que $bb + cc$. Comme on suppose toûjours $-q$, le côté c surpasse l'autre b.

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{ere}\ \textit{forme}\ z^4 * - pzz - qz + r \propto 0. \\ 3^{e}\ \textit{forme}\ z^4 * + pzz - qz + r \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \textit{Transformée} \\ \textit{commune} \end{array}\right. z^4 * \begin{array}{l} -2aazz \\ +1bbzz \\ +1cczz \end{array} \begin{array}{r} +a^4 \\ +2abbz + aabb \\ -2accz + aabb \\ +aacc \end{array} \propto 0.$$

I COROLLAIRE ET PROBLEME XIII.

POUR LE MESME GENRE.

45. *Pour réduire au troisiéme degré les égalitez des deux formes précédentes, lorsque les quatre racines sont toutes imaginaires.*

On prendra encore les égalitez planes $zz - yz \begin{smallmatrix} +x \\ -v \end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + yz \begin{smallmatrix} +x \\ +v \end{smallmatrix} \propto 0$ au lieu des deux $zz - 2az \begin{smallmatrix} +aa \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ & $zz + 2az \begin{smallmatrix} +aa \\ +cc \end{smallmatrix} \propto 0$. Et leur produit $z^4 * \begin{smallmatrix} -yyzz \\ +2xzz \end{smallmatrix} - 2vyz \begin{smallmatrix} +xx \\ -vv \end{smallmatrix} \propto 0$ sera la transformée commune à ces deux formes, & servira comme aux problêmes neuviéme & onziéme, pour trouver les réduittes. Et si on met pour chacune des grandeurs p, q, r, sa valeur empruntée dans la transformée précédente, on aura la réduitte de cette transformée telle qu'on l'expose ici.

Lorsque les quatre racines sont imaginaires.

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Proposée de la } 1^{ere}\ \textit{forme.} \\ z^4 * - pzz - qz + r \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \textit{Sa réduitte du } 3^{e}\ \textit{degré.} \\ y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix} +ppyy \\ -4ryy \end{smallmatrix} - qq \propto 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Proposée de la } 3^{e}\ \textit{forme.} \\ z^4 * + pzz - qz + r \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \textit{Sa réduitte du } 3^{e}\ \textit{degré.} \\ y^6 + 2py^4 \begin{smallmatrix} +ppyy \\ -4ryy \end{smallmatrix} - qq \propto 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Transformée commune} \\ z^4 * \begin{array}{l} -2aazz \\ +bbzz \\ +cczz \end{array} \begin{array}{r} +a^4 \\ +2abbz + aabb \\ -2accz + aacc \\ +bbcc \end{array} \propto 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \textit{Sa réduitte du } 3^{e}\ \textit{degré.} \\ y^6 \begin{array}{l} -4aay^4 \\ +2bby^4 \\ +2ccy^4 \end{array} \begin{array}{l} -8aabbyy \\ -8aaccyy \\ +b^4yy \\ -2bbccyy \\ +c^4yy \end{array} \begin{array}{l} -4aab^4 \\ +8aabbcc \\ -4aac^4 \end{array} \propto 0. \end{array}\right.$$

II COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

46. IL y a toûjours $+r$ dans ce genre des égalitez surſolides, où chacune des quatre racines eſt imaginaire. Et leur réduitte doit toûjours avoir une racine vraie & deux racines fauſſes; parce que la réduitte qui eſt leur transformée, peut être diviſée ſans reſte par chacune des trois égalitez $yy - 4aa \propto 0$, $yy + bb + 2bc + cc \propto 0$, $yy + bb - 2bc + cc \propto 0$. Et s'il y a $-p$; la grandeur $\frac{1}{2}p$ ou $aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$ vaudra toûjours moins que l'autre $aa - \frac{1q}{4a} \propto aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$. Et s'il y a $+p$; la grandeur $\frac{1}{2}p$ ou $-aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$ vaudra plus que l'autre $\frac{1q}{4a} - aa \propto -aa - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$. Lorſqu'il y a $-p$, le troiſiéme terme de la réduitte eſt toûjours négatif, parceque $8aabb + 8aacc$ eſt un produit de $8aa$, qui ſurpaſſe $bb + cc$, par $bb + cc$, qui ſurpaſſe le côté $bb - cc$ du quarré $b^4 - 2bbcc + c^4$.

III COROLLAIRE.

POUR LE MESME GENRE.

47. SI dans le même genre on connoît le quarré $4aa$ de la vraie racine $2aa$; on connoîtra facilement le reſte. Car la contradiction bb ſera $-\frac{1}{2}p + aa - \frac{1q}{4a}$, lorſqu'il y aura $-p$; & la contradiction cc ſera $+aa - \frac{1}{2}p + \frac{1q}{4a}$. De ſorte que les quatre racines ſeront $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$, $-a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$.

Mais quand il y aura $+p$; les quatre racines ſeront $a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$, $-a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$.

PROBLEME XIV.

Pour la réſolution des égalitez ſurſolides.

48. *POur réſoudre une égalité propoſée du quatriéme degré.*

On fera premiérement évanoüir le [b] ſecond de ſes termes. Et s'il y a des fractions dans la nouvelle égalité, on [c] l'en délivrera; & on ôtera auſſi les incommenſurables, s'il s'en trouve. Et lorſqu'on aura trouvé une égalité ſurſolide ſans ſecond terme, & ſans fraction, & où il n'y aura point d'incommenſurable; elle aura l'une des quatre formes que nous avons marquées. On y [e] mettroit $-q$, ſi elle avoit $+q$.

b. 21. 8.
c. 11. 8.
d. 16. 8. ou 21. 8.
e. 32.

Et pour résoudre cette égalité; on prendra sa réduitte selon la forme qui luy convient. Et la même réduitte sera divisée successivement & par ordre par une égalité feinte yy moins chacun des quarrez diviseurs de qq, en commençant par ceux qui surpassent p, lors qu'il y a $-p$; & par 1, lorsqu'il y a $+p$. Et si quelqu'une de ces divisions est juste ou sans reste, & qu'il

b. 36 & 41 & 47. y ait $-p$; les quatre valeurs de z seront toûjours [b] celles-ci $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$, $-a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$.

c. 35. Et nulle des quatre [c] ne sera imaginaire, si $\frac{1}{2}p$ surpasse $aa + \frac{1q}{4a}$. Et il n'y

d. 40. en aura [d] que deux imaginaires, si $aa + \frac{1q}{4a}$ surpasse $\frac{1}{2}p$, & si $aa - \frac{1q}{4a}$ vaut

e. 46. moins que $\frac{1}{2}p$. Mais les quatre seront toutes [e] imaginaires, si $aa - \frac{1q}{4a}$ surpasse $\frac{1}{2}p$.

f. 41 & 47. Mais lorsqu'il y aura $+p$ dans la proposée; les quatre racines [f] seront $a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$, $-a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$,

g. 40. $-a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$. Et il n'y en aura que deux [g] imaginaires,

h. 46. si $\frac{1}{2}p$ vaut moins que $\frac{1q}{4a} - aa$. Et les quatre seront [h] imaginaires si $\frac{1}{2}p$ vaut plus que $\frac{1q}{4a} - aa$. Divers exemples éclairciront & fixeront ces régles. Et pour les observer plus facilement, on répétera encore ici les quatre formes différentes, & leurs réduittes du troisiéme degré.

$$1^{ere} \text{ forme } z^4 * - pzz - qz + r \propto 0. \text{ Sa réduitte } y^6 - 2py^4 \begin{array}{l} +ppyy \\ -4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

$$2^{e} \text{ forme } z^4 * - pzz - qz - r \propto 0. \text{ Sa réduitte } y^6 - 2py^4 \begin{array}{l} +ppyy \\ +4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

$$3^{e} \text{ forme } z^4 * + pzz - qz + r \propto 0. \text{ Sa réduitte } y^6 + 2py^4 \begin{array}{l} +ppyy \\ -4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

$$4^{e} \text{ forme } z^4 * + pzz - qz - r \propto 0. \text{ Sa réduitte } y^6 + 2py^4 \begin{array}{l} +ppyy \\ +4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

Premier exemple.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * - 37zz - 24z + 180 \propto 0$ de la premiére forme. On prendra sa réduitte $y^6 - 74y^4 + 649yy - 576 \propto 0$. Et on choisira le premier quarré 64 diviseur du terme qq ou 576, & qui surpasse $p \propto 34$. Et on divisera cette même réduitte par $yy - 64 \propto 0$. Et comme la division est juste, on nommera $4aa$ la racine yy ou 64. Et les valeurs de z seront $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto 6$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto 2$.

— a

$-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -3$, $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -5$. Où l'on voit que deux sont vraies, & les deux autres fausses.

SECOND EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * -8zz-8z+15\propto 0$ de la premiére forme. On prendra sa réduitte $y^6-16y^4+4yy-64\propto 0$. Et on choisira le premier quarré 16 diviseur de qq ou de 64, qui surpasse $1p\propto 8$. Et la réduitte sera divisée par $yy-16\propto 0$. Et parceque la division est juste, on prendra la vraie racine 16 pour $4aa$, ou 2 pour a; & les valeurs de z seront $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{4a}}\propto 3$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{4a}}\propto 1$. $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -2+\sqrt{-1}$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -2-\sqrt{-1}$. Où l'on voit que les deux premiéres sont réelles, & les deux autres imaginaires. Et leur contradiction est 1.

TROISIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * -4zz-8z+35\propto 0$ de la premiére forme. On prendra sa réduitte $y^6-8y^4-124yy-64\propto 0$. Et on choisira le premier quarré 16 diviseur de 64, & qui surpasse $1p$ ou 8. Et la réduitte sera divisée par $yy-16\propto 0$. Et la division qui est juste fournira la vraie racine $16\propto 4aa$, ou $2\propto 1a$. Et les valeurs de z seront les quatre imaginaires $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{4a}}\propto 2+\sqrt{-1}$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{41}}\propto 2-\sqrt{-1}$, $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -2+\sqrt{-3}$. $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -2-\sqrt{-3}$. Et les contradictions seront 1 & 3.

QUATRIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * -7zz-2z+2\propto 0$ de la premiére forme. On prendra la réduitte $y^6-14y^4+41yy-4\propto 0$. Et comme aucun quarré diviseur de qq ou de 4 ne surpasse p ou 7, on prendra le quarré 4 qui approche plus de 7. Et alors on divisera la réduitte par $yy-4\propto 0$. Et la division qui est juste fournira une vraie racine $yy\propto 4\propto 4aa$. Et ainsi on aura 1 pour a, & les valeurs de z seront $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{4a}}\propto 1+\sqrt{3}$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{1q}{4a}}\propto 1-\sqrt{3}$, $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -1+\sqrt{2}$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{1q}{4a}}\propto -1-\sqrt{2}$. Où l'on voit que trois sont vraies, & la quatriéme fausse.

CINQUIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * -68zz-12z+255\propto 0$. On prendra sa réduitte $y^6 - 136y^4 + 3604yy - 144 \propto 0$. Et on choisira le premier quarré 144 diviseur de qq ou de 144, & qui surpasse p ou 64. Mais parceque la division ne peut se faire au juste par $yy - 144 \propto 0$, on prendra un autre quarré 36 diviseur de qq ou de 144, & qui approche le plus de p ou de 68. Et on divisera la réduitte par $yy - 36 \propto 0$. Et la division qui est juste donnera la vraie racine yy ou $4aa \propto 36$. Et ainsi on aura 3 pour a. Et les valeurs de z seront $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto 3 + \sqrt{26}$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto 3 - \sqrt{26}$, $-a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto -3 + \sqrt{24}$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto -3 - \sqrt{24}$. Où l'on voit qu'il y en a trois vraies, & une fausse.

SIXIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * + 10zz - 145z + 96 \propto 0$ de la troisiéme forme. On prendra sa réduitte $y^6 + 20y^4 - 284yy - 21025 \propto 0$. Et on choisira le premier quarré 1 qui surpasse $-p$ ou -10. Mais parceque la division ne peut se faire au juste par $yy - 1 \propto 0$, on prendra le premier quarré 25 diviseur de qq ou de 21025. Et la réduitte sera divisée par $yy - 25 \propto 0$. Et la division qui est juste donnera la vraie racine yy ou $4aa \propto 25$. Et ainsi on aura $\frac{5}{2}$ pour a. Et les valeurs de z seront $a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, $a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$, $-a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto \frac{-5 + \sqrt{-103}}{2}$, $-a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto \frac{-5 - \sqrt{-103}}{2}$. Où l'on voit une racine vraie, & une racine fausse, & deux imaginaires.

SEPTIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * + 70zz - 3744z + 27993 \propto 0$ de la troisiéme forme. On prendra sa réduitte $y^6 + 140y^4 - 107072yy - 14017536 \propto 0$. Et lorsqu'on aura vû que les quarrez 1, 4, 9, 36, diviseurs de qq ou de 14017536 ne servent point pour faire une division sans reste, on trouvera qu'elle peut être éxacte par $yy - 324 \propto 0$. Ce qui donne une vraie racine yy ou $4aa \propto 324$. Et ainsi on aura 9 pour a, & les valeurs de z seront les quatre imaginaires $a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto 9 + \sqrt{-12}$, & $9 - \sqrt{-12}$, & $-a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto -9 + \sqrt{-220}$, & $-9 - \sqrt{-220}$.

COROLLAIRE ET PROBLEME XV.

50. *Pour trouver en toute égalité où le second terme est évanoüi une racine vraie, lorsqu'elle est commensurable, & qu'on apprend par la disposition des signes que toutes les autres sont fausses.*

On la divisera par une égalité feinte de l'inconnuë moins chaque quarré diviseur de son dernier terme. Comme pour trouver une valeur de z dans l'égalité $z^4 * - 59zz - 188z - 90 \propto 0$. On la divisera par $z - 9 \propto 0$. Et l'exposant $z^3 + 9zz + 22z + 10 \propto 0$ n'aura que trois degrez. Et 9 sera une valeur positive de z.

PROBLEME XVI.

51. *Pour résoudre généralement toute égalité réductible du quatriéme degré, où le second terme est évanoüi.*

On prendra [b] sa réduitte, & la préparée [c] de cette réduitte, en faisant évanoüir le second de ses termes. Et on cherchera [d] la résolution de cette préparée selon les régles prescrites pour les égalitez solides ou de trois degrez. Et le reste sera facile ensuitte. On voit ici chaque forme & sa réduitte & la préparée de la même réduitte. b. 39. c. 21. 8. d. 18. &c.

Proposée de la 1ere forme.

$$z^4 * - pzz - qz + r \propto 0.$$

Sa réduitte.

$$y^6 - 2py^4 \begin{array}{l} + ppyy \\ - 4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

Préparée de la réduitte.

$$x^3 * \begin{array}{l} - \frac{1}{3}ppx \\ - 4rx. \end{array} \begin{array}{l} + \frac{2}{27}p^3 \\ - \frac{8}{3}pr \\ - 1qq \end{array} \propto 0.$$

Proposée de la 2e forme.

$$z^4 * - pzz - qz - r \propto 0.$$

Sa réduitte.

$$y^6 - 2py^4 \begin{array}{l} + ppyy \\ + 4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

Préparée de la réduitte.

$$x^3 * \begin{array}{l} - \frac{1}{3}ppx \\ + 4rx \end{array} \begin{array}{l} + \frac{2}{27}p^3 \\ + \frac{8}{3}pr \\ - 1qq \end{array} \propto 0.$$

Proposée de la 3e forme.

$$z^4 * + pzz - qz + r \propto 0.$$

Sa réduitte.

$$y^6 + 2py^4 \begin{array}{l} + ppyy \\ - 4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

Préparée de la réduitte.

$$x^3 * \begin{array}{l} - \frac{1}{3}ppx \\ - 4rx \end{array} \begin{array}{l} - \frac{2}{27}p^3 \\ + \frac{8}{3}pr \\ - 1qq \end{array} \propto 0.$$

Proposée de la 4e forme.

$$z^4 * + pzz - qz - r \propto 0.$$

Sa réduitte.

$$y^6 + 2py^4 \begin{array}{l} + ppyy \\ + 4ryy \end{array} - qq \propto 0.$$

Préparée de la réduitte.

$$x^3 * \begin{array}{l} - \frac{1}{3}ppx \\ + 4rx \end{array} \begin{array}{l} - \frac{2}{27}p^3 \\ - \frac{8}{3}pr \\ - 1qq \end{array} \propto 0.$$

EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $z^4 * - 7zz - 26z - 4 \propto 0$. On prendra sa réduitte $y^6 - 14y^4 + 65yy - 676 \propto 0$, & la préparée de la même réduitte qui est $x^3 * - \frac{1}{3}x - \frac{15550}{27} \propto 0$. Et cette préparée étant multipliée par 27, ou chacune de ses racines par 3, pour ôter les fractions, on aura cette autre égalité $v^3 * - 3v - 15550 \propto 0$. Et choiſiſſant le quarré 625 diviſeur de 15550, & qui ſurpaſſe p ou 3, on prendra la différence ou l'excez 622 pour diviſer le dernier terme 15550. Et l'expoſant 25, qui eſt la racine même du quarré 625 ſera une vraie racine v de l'égalité $v^3 * - 3v - 15550 \propto 0$. Diviſant donc v ou 25 par 3, l'expoſant $\frac{25}{3}$ ſera la juſte valeur de l'inconnuë x. Et ſi on luy ajoûte $\frac{2}{3}p$ ou $\frac{14}{3}$; la ſomme $\frac{39}{3}$ ou 13 eſt la juſte valeur de la racine yy ou $4aa$. De ſorte qu'on aura $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ pour a, & les valeûrs de z ſeront $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto \frac{1}{2}\sqrt{13} + \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{13}}$, $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}} \propto \frac{1}{2}\sqrt{13} - \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{13}}$, $-a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto -\frac{1}{2}\sqrt{13} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{13}}$, $-a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}} \propto -\frac{1}{2}\sqrt{13} - \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{13}}$. On réſoudra de la même ſorte toute égalité réductible du quatriéme degré, que le problême précédent n'aura pû réſoudre.

I COROLLAIRE ET PROBLEME XVII.

POUR LE TROISIEME CAS.

52. *Pour réſoudre les égalitez ſurſolides du troiſiéme cas, où tout eſt imaginaire.*

On pourra reconnoître par le problême précédent ſi les racines de la préparée ſont toutes réelles; ou ſi l'une eſt réelle, & les deux autres imaginaires. Si les trois ſont réelles, & qu'il y ait $-p$ dans la propoſée, & b. 46. encore $-$ au troiſiéme terme de ſa réduitte; on pourra s'aſſurer [b] que les quatre racines qu'on vouloit découvrir, ſont toutes imaginaires. Et on ſçaura de la même ſorte qu'elles ſont [b] imaginaires, s'il y a $+p$, & que les trois racines de la réduitte ou de ſa préparée ſoient toutes réelles. De ſorte que par cette remarque on peut réſoudre toute égalité ſurſolide du troiſiéme genre, où les racines ſont toutes imaginaires; puiſqu'il ſuffit alors de ſçavoir que nulle grandeur vraie ni aucune fauſſe ne peut ſatisfaire au problême, ſans qu'il ſoit néceſſaire de déterminer en quoi conſiſtent les contradictions. On pourra pourtant les déterminer, quoique d'une c. 27 & 28. maniére impropre, en obſervant ce qui ſera preſcrit [c] au probleme ſuivant.

II COROLLAIRE ET PROBLÊME XVIII.

POUR LE SECOND CAS.

53. *Pour réſoudre généralement toute égalité ſurſolide, où deux racines ſont réelles, & les deux autres imaginaires.*

On ſçaura qu'une égalité ſurſolide, où le ſecond terme eſt évanoüi, entre dans [b] ce cas; ou qu'elle a deux racines réelles, & deux imaginaires: lorſque la réduitte ou ſa préparée aura une racine vraie & deux imaginaires, & même [b] lorſqu'il y aura $+p$ & $-r$. Et pour déterminer au juſte les racines pour chacune des formes, on ſe réglera [c] ſur les modéles des réſolutions générales qu'on expoſe ici, & qui ſont tirées des problêmes quatriéme & cinquiéme. b. 40. c. 15 & 16.

Réſolutions générales.

Pour la premiére forme $z^4 * - pzz - qz + r \infty 0$, la vraie racine $4aa$ ſera

$$+\frac{1}{3}p + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}} + \frac{1pp + 12r}{\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}}.$$

Pour la ſeconde forme $z^4 * - pzz - qz - r \infty 0$, la vraie racine $4aa$ ſera

$$+\frac{2}{3}p + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3 - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 + \frac{64}{27}r^3}} + \frac{1pp - 12r}{\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3 - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 + \frac{64}{27}r^3}}}.$$

Et dans ces deux formes, lorſqu'on aura déterminé la vraie racine $4aa$, ou la valeur $1a$; les racines réelles [c] ſeront $a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$ & $a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}$; & les imaginaires $-a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$ & $-a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}$. Et la contradiction ſera $-\frac{1}{2}p + aa + \frac{1q}{4a}$. c. 41.

Pour la troiſiéme forme $z^4 * + pzz - qz + r \infty 0$, la vraie racine $4aa$ ſera

$$-\frac{2}{3}p + \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}} + \frac{1pp + 12r}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}}.$$

Pour la 4[e] forme $z^4 * + pzz - qz - r \infty 0$, la vraie racine $4aa$ eſt toûjours

$$-\frac{2}{3}p + \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr + \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 + \frac{64}{27}r^3}} + \frac{1pp - 12r}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr + \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 + \frac{64}{27}r^3}}}.$$

que Monsieur Descartes en résolvant luy-même cette égalité $z^4 * - 4zz - 8z + 35 \propto 0$ en deux autres planes $zz - 4z + 5 \propto 0$ & $zz + 4z + 7 \propto 0$, croit avoir pleinement résolu le problême, lorsqu'il a reconnu dans ces deux égalitez planes, que les quatre racines sont toutes imaginaires, & que le problême pour lequel on a formé l'égalité sursolide, quoique le plan de sa nature, ne peut être construit en aucune maniére. Il ne se met point en peine de marquer en quoi consiste la contradiction. En effet nul, que je sçache, ne s'est avisé de parler avant nous de la détermination juste & exacte des racines imaginaires, ni de ce qui forme leur contradiction.

Monsieur Hudde remarque aussi que toute égalité reductible du quatriéme degré peut être abbaissée à un moindre degré par la régle de Monsieur Descartes. Mais il est aisé de voir le contraire dans le corollaire qui précéde ceci.

TABLE ABBREGEE

DES RESOLUTIONS DETERMINE'ES QU'ON A EXPLIQUE'ES.

Résolution générale des égalitez linéaires.

$$1az \propto 1n. \quad z \propto \frac{1n}{1a}.$$

Résolution générale des égalitez planes.

$$zz \propto nz - p. \quad z \propto \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \quad z \propto \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}.$$

Résolution générale des égalitez solides.

$$z^3 \propto pz - q. \quad z \propto \frac{1q}{dd - p} \propto 1d. \quad z \propto -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}. \quad z \propto -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1q}{1d}}.$$

$$\text{Ou } z \propto \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}} \propto 2a.$$

$$\textit{Racines fausses.} \quad z \propto -a + \sqrt{aa - \frac{1q}{2a}}. \quad z \propto -a - \sqrt{aa - \frac{1q}{2a}}.$$

Résolution générale des égalitez sursolides.

$$z^4 \propto pzz + qz - r. \quad 1d \propto \frac{-2p^3 + 62pr + 27qq}{27dd - 9pp - 108r}. \quad 4aa \propto 1d + \frac{2}{3}p. \quad \text{ou } 4aa \propto \frac{2}{3}p$$

$$+ \sqrt{C - \frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}$$

$$+ \frac{1pp + 12r}{\sqrt{C.\, -\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}}.$$

Racines.

$$1^{ere}\ z \propto a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}. \quad 2^{e}\ z \propto a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{1q}{4a}}.$$

$$3^{e}\ z \propto -a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}. \quad 4^{e}\ z \propto -a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa - \frac{1q}{4a}}.$$

56. LA Table qu'on vient de propoſer, préſente à l'œil & à l'imagination un abbrégé facile des principales régles, dont tout ce Livre & quelques-uns des précédens ont expliqué un détail éxact, & qu'on a eü ſoin d'éclaircir & de fixer par beaucoup d'éxemples. Elle comprend un modéle racourci des réſolutions générales & déterminées des égalitez linéaires, des planes, des ſolides, & des ſurſolides. Mais il faut prendre garde que chacune des quantitez connuës *a*, *n*, *p*, *q*, *r*, eſt indifféremment poſitive ou négative, quoique le ſigne + y paroiſſe exprimé ou ſousentendu, ou quoiqu'elles ſoient précédées par le ſigne —.

METHODE DE MONSIEUR VIETE.

POUR LA RESOLUTION GENERALE DES EGALITEZ.

57. SA méthode eſt formée ſur le modéle de la réſolution des puiſſances parfaites, & ſuppoſe des principes à peu prés ſemblables. Ce qu'elle a de particulier, c'eſt qu'elle conſidére avec la puiſſance inconnuë dans le premier terme de l'égalité tous les produits des grandeurs connuës dans les autres termes par les divers degrez de la racine inconnuë, & qu'elle ajoûte ou retranche par ordre & chacun dans ſon rang ces divers produits. Et les connuës entrent auſſi dans leurs rangs parmi les diviſeurs. Je me contenterai d'en fournir des éxemples, où j'aurai ſoin d'éviter l'obſcurité des termes & les maniéres embarraſſées, qu'affecte ordinairement cet illuſtre Auteur.

PREMIER EXEMPLE.

Pour réſoudre l'égalité *zz* + 7*z* ꝏ 60750. On tranchera le nombre connu 60750 de deux en deux caractéres. Et on tirera la racine quarrée ſelon les régles des puiſſances parfaites, en faiſant toûjours entrer 7 parmi les diviſeurs, & ôtant par ordre les produits de 7 par les chiffres écrits ſucceſſivement dans le demi-cercle. Comme on ſuppoſe que l'inconnuë *z* doit avoir trois chiffres, à cauſe des trois tranches, on diſpoſe *n* ou 7 au troiſiéme rang, où il doit multiplier le chiffre le plus reculé de *z*. On voit ici le cours entier de l'opération qui fournit 243 pour *z*.

+ ~~7~~ ꝏ 1*n*
+ 6 | 0 7 | 5 0 ꝏ *p*
— 4 ꝏ —*aa*
— 1 4 ꝏ —*na*
+ 1 | 9 3 | 5 0 1^er^ *reſte*
~~4~~ ~~0~~ ~~7~~ ꝏ 2*a* + 1*n* 1^er^ *diviſeur*
~~4~~ ꝏ 1*b* *expoſant*
— 1 | 7 8 | 8 . ꝏ — 2*ab* — *bb* — *nb*
+ 1 4 | 7 0 2^d^ *reſte*
~~4~~ | 8 ~~7~~ ꝏ 2 B + 1*n* 2^d^ *diviſeur*
3 ꝏ 1*c* *expoſant*
— 1 4 | 7 0 ꝏ — 2B*c* — *cc* — *nc*
0 0 0 0 3^e^ *reſte*

243 ꝏ 1*z*.
2 ꝏ *a*. 4 ꝏ *b*.
24 ꝏ B. 3 ꝏ *c*.

SECOND

SECOND EXEMPLE.

Si *n* est grand trop, ou qu'on ne puisse ôter *na* des premiéres tranches, parce que le moindre quarré 1 qu'on y pourroit prendre, est toûjours trop grand; c'est une marque qu'il y a moins de chiffres dans 1*z* que de tranches dans 1*p*, & qu'ainsi on doit avancer 1*n* autant qu'il est nécessaire, comme on le voit dans ce second éxemple, où l'on supose *zz* + 954*z* ꝏ 18487; & où l'on trouve 19 pour *z*, aprés avoir avancé 954 d'un rang.

+ 9 5 4 ꝏ 1*n*
+ 1 | 8 4 | 8 7 ꝏ *p* — 19 ꝏ 1*z*
— 1 ꝏ — *aa* — 1 ꝏ *a*. 9 ꝏ *b*.
— 9 5 4 ꝏ — *na*
+ 8 8 | 4 7 1^er^ *reste*
9 7 4 ꝏ 2*a* + 1*n* *diviseur*
9 ꝏ 1*b* *exposant*
— 8 8 4 7 ꝏ — 2*ab* — *bb* — *bn*
0 0 0 0 2^d^ *reste*

TROISIEME EXEMPLE.

S'il y a — *n*, comme dans l'égalité 1*zz* — 7*z* ꝏ 60750; on mettra — *n* avec ordre parmi les diviseurs, ou ce qui revient au même, on ôtera 1*n*, selon les divers rangs qu'elle doit occuper, de chaque diviseur. Et pour ôter les produits de — *n* par les chiffres successifs de *z*, on ajoûtera les produits de + *n* par les mêmes chiffres. Tout cela se voit à l'œil dans la résolution de l'éxemple qu'on vient de proposer, & qui est ici figurée toute entiére.

— 7 ꝏ — 1*n*
+ 6 | 0 7 | 5 0 ꝏ 1*p* — 250 ꝏ 1*z*.
— 4 ꝏ — *aa* — 2 ꝏ *a*. 5 ꝏ *b*.
+ 1 4 ꝏ + *na* — 25 ꝏ B. 0 ꝏ *c*.
+ 2 | 2 1 | 5 0 1^er^ *reste*
3 9 3 ꝏ 2*a* — 1*n* 1^er^ *diviseur*
5 ꝏ 1*b* *exposant*
— 2 | 2 1 | 5 ꝏ — 2*ab* + *nb* — *bb*
+ 0 | 0 0 2^d^ *reste*
4 9 3 ꝏ 2B — 1*n* 2^d^ *diviseur*
0 ꝏ 1*c* *exposant*
— 0 | 0 0 ꝏ — 2B*c* + *nc* — *cc*
+ 0 | 0 0 3^e^ *reste*

QUATRIEME EXEMPLE.

Et s'il y a plus de chiffres dans — *n* que de tranches dans *p*; la racine 1*z* vaudra moins que + *n*. Et il faudra restituer à 1*p* les tranches qui luy manquent, en reculant — *n* en telle sorte, que ses chiffres achevent de remplir les rangs, où *p* devoit s'étendre. Et pour commencer la résolution; on prendra pour *a* le premier chiffre de + *n*, ou par ordre l'un des plus approchans parmi ceux qui le surpassent. Tout cela peut s'observer à l'œil dans la résolution que l'on expose ici de l'égalité plane *zz* — 240*z* ꝏ 484.

— 2 | 4 0 ꝏ — 1*n*
+ 4 | 8 4 ꝏ 1*p* — 242 ꝏ 1*z*
— 4 ꝏ — *aa* — 2 ꝏ *a*. 4 ꝏ *b*.
+ 4 | 8 0 ꝏ + *na* — 24 ꝏ B. 2 ꝏ *c*
+ 8 4 | 8 4 1^er^ *reste aprés la restitution*
2 0 | 0 ꝏ 2*a* — 1*n* 1^er^ *diviseur*
4 ꝏ 1*b* *exposant*
— 8 0 | 0 ꝏ — 2*ab* + *bn* — *bb*
+ 4 | 8 4 2^d^ *reste aprés la restitution*
2 4 0 ꝏ 2B — 1*n* 2^d^ *diviseur*
2 ꝏ 1*c* *exposant*
— 4 | 8 4 ꝏ — 2B*c* + *cn* — *nn*
0 0 0 3^e^ *reste*

CINQUIEME EXEMPLE.

Pour résoudre l'égalité $370z - 1zz \propto 9261$. On ſçait déja qu'il y a deux racines, dont l'une vaut moins, & l'autre vaut plus que la moitié $\frac{1}{2}n$ ou 185 de $370 \propto 1n$. Et de plus l'une eſt encore moindre, & l'autre plus grande que $\sqrt{p} \propto \sqrt{9261}$. Et pour trouver la moindre on diſpoſera 370 au ſecond rang & dans les ſuivans, & on prendra pour a le plus grand chiffre 2, dont le produit par n eſt moindre que la tranche 92. Et aprés cela il ſera facile, comme on le voit ici, d'achever tout le reſte.

Mais pour trouver la plus grande racine, qui doit avoir trois chiffres, on diſpoſera 370 au troiſiéme rang & dans les ſuivans, afin que ſon chiffre 3 puiſſe avancer au delà de la tranche 92. Et on prendra pour a le même chiffre 3, ou par ordre un de ceux qui ſont moindres & qui en approchent plus. On ôtera enſuitte $1p$ & $1aa$ du premier plan an. Et aprés cela il ſera facile, comme on le voit ici, d'achever tout le reſte

$$\left\{\begin{array}{rl|ll}
 & \cancel{3}\,\cancel{7} & \cancel{0} & \propto 1n \\
+ & 9\,2 & 6\,1 & \propto 1p \\
+ & 4 & & \propto +aa \\
- & 7\,4 & 0 & \propto -na \\ \hline
+ & 2\,2 & 6\,1 & 1^{er}\ \textit{reſte} \\
 & \cancel{3} & \cancel{3}\,\cancel{0} & \propto -2a+1n\ \textit{diviſeur} \\
 & & \cancel{7} & \propto 1b\ \textit{expoſant} \\
- & 2\,2 & 6\,1 & \propto +2ab+bb-nb \\ \hline
 & 0\,0 & 0\,0 & 2^{d}\ \textit{reſte}
\end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} 27 \propto 1z. \\ 2 \propto a.\ 7 \propto b. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl|l|ll}
 & \cancel{3} & \cancel{7}\,\cancel{0} & & \propto 1n \\
- & & 9\,2 & 6\,1 & \propto -1p \\
- & 9 & & & \propto -aa \\
+ & 1\,1 & 1\,0 & 0\,0 & \propto +na \\ \hline
+ & 1 & 1\,7 & 3\,9 & 1^{er}\ \textit{reſte} \\
 & & \cancel{2}\,\cancel{3} & \cancel{0} & \propto +2a-1n\ \textit{diviſeur} \\
 & & \cancel{4} & & \propto 1b\ \textit{expoſant} \\
- & 1 & 0\,8 & 0 & \propto -2ab-bb+nb \\ \hline
 & + & 9 & 3\,9 & 2^{d}\ \textit{reſte} \\
 & & \cancel{3} & 1\,\cancel{0} & \propto 2B-1n\ 2^{d}\ \textit{diviſeur} \\
 & & & \cancel{3} & \propto 1c\ \textit{expoſant} \\
 & - & 9 & 3\,9 & \propto 2Bc-cc+nc \\ \hline
 & & 0 & 0\,0 & 3^{e}\ \textit{reſte}
\end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} 343 \propto 1z \\ 3 \propto a.\ 4 \propto b. \\ 34 \propto B.\ 3 \propto c. \end{array}\right.$$

SIXIEME EXEMPLE.

On réſoudra preſque de la même ſorte l'égalité cubique $13104z - 1z^3 \propto 155520$, où il y a deux racines, dont l'une eſt moindre & l'autre plus

$$\left\{\begin{array}{rl|ll}
 & \cancel{1}\,\cancel{3}\,\cancel{1} & \cancel{0}\,\cancel{4} & \propto 1p \\
+ & 1\,5\,5 & 5\,2\,0 & \propto 1q \\
+ & 1 & & \propto +a^3 \\
- & 1\,3\,1 & 0\,4 & \propto -pa \\ \hline
+ & 2\,5 & 4\,8\,0 & 1^{er}\ \textit{reſte} \\
 & 1\,2 & 8\,\cancel{0}\,\cancel{4} & \propto -3aa+1p\ \textit{diviſeur} \\
 & & \cancel{2} & \propto 1b\ \textit{expoſant} \\
- & 2\,5 & 4\,8\,0 & \propto +3aab+3abb+b^3-pb \\ \hline
 & & 0\,0\,0 & 2^{d}\ \textit{reſte}
\end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} 12 \propto 1z \\ 1 \propto a.\ 2 \propto b. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl|l|ll}
 & \cancel{1} & \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{0} & \cancel{4} & \propto 1p \\
- & & 1\,5\,5 & 5\,2\,0 & \propto -1q \\
- & 1 & & & \propto -a^3 \\
+ & 1 & 3\,1\,0 & 4\,0\,0 & \propto +pa \\ \hline
+ & & 1\,5\,4 & 8\,8\,0 & 1^{er}\ \textit{reſte} \\
 & & \cancel{1}\,\cancel{6}\,\cancel{8} & \cancel{9}\,\cancel{6} & \propto 3aa-1p\ 1^{er}\ \textit{diviſeur} \\
 & & \cancel{0} & & \propto 1b\ \textit{expoſant} \\
- & & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & \propto -3aab-3abb-b^3+pb \\ \hline
+ & & 1\,5\,4 & 8\,8\,0 & 2^{d}\ \textit{reſte} \\
 & & \cancel{1}\,\cancel{6} & 8\,\cancel{9}\,\cancel{6} & \propto 3BBB-1p\ 2^{d}\ \textit{diviſeur} \\
 & & & \cancel{8} & \propto 1c\ \textit{expoſant} \\
- & & 1\,5\,4 & 8\,8\,0 & \propto -3BBc-3Bcc-c^3+pc \\ \hline
 & & & 0\,0\,0 & 3^{e}\ \textit{reſte}
\end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} 108 \propto 1z \\ 1 \propto a.\ 0 \propto b \\ 10 \propto B.\ 8 \propto c. \end{array}\right.$$

grande que le tiers de $131042 \propto 1p$; ou l'une moindre & l'autre plus grande que $\frac{3q}{2p}$. Les tranches des chiffres ſeront de trois en trois, & on ſuivra à peu prés les régles de l'extraction des racines cubiques, ayant égard ſelon la remarque qu'on a déja faite, aux diviſeurs, & aux divers ſignes, ou aux divers produits qu'on doit ôter ou retrancher.

Il ſeroit inutile de s'arrêter ici à expliquer en détail tous les divers cas, que cette méthode peut comprendre dans chacun des degrez compoſez; puiſque ceux qui ſçauront bien les régles de la réſolution des puiſſances parfaites, ſe formeront aiſément un ordre pour réſoudre les égalitez compoſées, conforme à celuy que nous venons de ſuivre. Mais cela même n'eſt pas fort néceſſaire, puiſque le ſeul avantage que la méthode peut fournir, eſt l'approximation des racines incommenſurables, qu'on peut même trouver par une autre voie. Ceux qui veulent employer celle-ci à cet uſage, multiplient auparavant les racines des égalitez que l'on doit réſoudre, par 10, par 100, par 1000, &c, ſelon l'approximation que l'on s'eſt propoſée.

DES EGALITEZ,

QUI PASSENT LE QUATRIÉME DEGRÉ.

58. ON ſçait déja que toute égalité, où la méthode générale n'aura rien découvert, ne peut avoir aucune racine qui ne ſoit commenſurable. Mais il ſe peut ſouvent faire que la ſomme de deux, ou de trois, ou d'une partie des racines ſoit commenſurable. Et alors l'égalité pourra être abbaiſſée à une autre, où il y aura autant de degrez, que la ſomme commenſurable embraſſe de racines.

Il faudra pour cela faire évanoüir le ſecond terme de l'égalité qu'on propoſe, & trouver enſuitte par ordre pour ſes préparées autant de transformées générales que le nombre de ſes dimenſions pourra être différemment ſeparé en deux autres plus grands chacun que l'unité. Par éxemple, comme 5 peut être ſeulement ſeparé en 2 & 3 ou en 3 & 2; le cinquiéme degré n'aura qu'une transformée générale. Mais le ſixiéme & le ſeptiéme degré pourront avoir chacun deux transformées générales: parcequ'on peut ſéparer 6 en 2 & 4, & qu'on le peut encore ſéparer en 3 & 3; & qu'on peut ſéparer 7 de la même ſorte en 3 & 4, & encore en 2 & 5.

PROBLEME XIX.

59. *Pour transformer & réſoudre les égalitez du cinquième degré.*

La transformée du cinquiéme degré peut être toûjours ainſi découverte. On ſuppoſera que toute égalité du cinquiéme degré, où le ſecond terme eſt évanoüi, eſt un produit des deux égalitez $y^3 - xyy \begin{smallmatrix} +ay \\ +by \end{smallmatrix} + c \propto 0$ & $yy + xy \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} \propto 0$, ce qui fournit au juſte l'égalité de cinq degrez

$y^5 * \begin{array}{l} -xxy^3 \\ +2ay^3 \end{array} \begin{array}{l} +2bxyy \\ +1cyy \end{array} \begin{array}{l} +aay \\ -bby \\ +cxy \end{array} \begin{array}{l} +ac \\ -bc \end{array} = 0$, qui sera la transformée générale de toute égalité $y^5 * + py^3 + qyy + ry + s = 0$ du cinquiéme degré, en supposant que chacune des grandeurs p, q, r, s, est positive ou négative, quoiqu'il y ait par tout le signe $+$.

Ensuitte on comparera les termes de l'une avec ceux de l'autre, chacun à chacun, & selon le même ordre. Et les comparaisons fourniront ces quatre égalitez $a = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p$, $c = q - 2bx$, $aa - bb + cx = r$, $ac - bc = s$.

Et mettant pour a sa valeur $\frac{xx + p}{2}$, & pour c la sienne $q - 2bx$ dans les deux égalitez $aa - bb + cx = r$ & $ac - bc = s$; on aura les deux autres $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}pxx + \frac{1}{4}pp - bb + qx - 2bxx = r$, & $\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}qxx - pbx - bx^3 - bq + 2bbx = s$. Et si on prend dans la premiére de ces deux égalitez la valeur du quarré bb, & qu'on la mette pour bb dans la seconde; on formera l'égalité $\frac{1}{2}pq + \frac{5}{2}qxx - pbx - 5bx^3 - bq - s + \frac{1}{2}x^5 + px^3 + \frac{1}{2}ppx - 2rx = 0$, d'où l'on tire encore une nouvelle valeur $b = \frac{\frac{1}{2}x^5 + px^3 + \frac{1}{2}ppx - 2rx + \frac{5}{2}qxx + \frac{1}{2}pq - s}{5x^3 + px + q}$. Et si on prend f pour le numérateur, & g pour le dénominateur, afin d'abbréger, & qu'on mette pour b sa valeur $\frac{1f}{1g}$, & pour bb sa valeur $\frac{1ff}{1gg}$ dans la troisiéme égalité; on formera celle-ci $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}pxx + \frac{1}{4}pp + qx - r - \frac{1ff}{1gg} - \frac{2fxx}{1g} = 0$, & lorsqu'on l'aura délivrée des fractions, & qu'on aura mis pour f & pour g ce qui leur est égal; on aura enfin cette égalité de dix degrez

$$x^{10} * + 3px^8 - qx^7 \begin{array}{l} +3ppx^6 \\ -3rx^6 \end{array} \begin{array}{l} -2pqx^5 \\ +11sx^5 \end{array} \begin{array}{l} +p^3x^4 \\ -2prx^4 \\ -1qqx^4 \end{array} \begin{array}{l} -ppqx^3 \\ +4qrx^3 \\ +4psx^3 \end{array} \begin{array}{l} +pprxx \\ -pqqxx \\ +7qsxx \\ -4rrxx \end{array} \begin{array}{l} +q^3x \\ +ppsx \\ -4qrsx \end{array} \begin{array}{l} -qqr \\ +pqs \\ -ss \end{array} = 0.$$

Et on pourra la prendre pour réduitte de la proposée y^5 &c. Et pour les signes $+$ & $-$ qui ne sont pas assez déterminez, on se réglera selon la supposition qu'on a déja faite; en sorte qu'on ne changera rien, s'il y a $+p$. Mais s'il y a $-p$, on changera les signes de toutes les parties, où p aura un nombre impair de degrez. Et c'est la même chose des grandeurs q, r, s. Et la même remarque doit encore servir pour les égalitez du sixiéme degré.

Les dix racines de cette réduitte sont les dix sommes alternatives des cinq racines de l'égalité qu'on propose combinées deux à deux, ou trois à trois, en dix maniéres différentes. De sorte que si elle peut être divisée par x $+$ ou $-$ un diviseur de son dernier terme, on connoîtra une racine x, & l'égalité proposée y^5 &c, pourra être divisée sans reste par une égalité plane $yy + xy + \frac{2x^5 + 2px^3 - 2qxx - 2rx + s}{5x^3 + px + q} \propto 0$. Ce qui donnera deux des cinq racines que l'on cherche. Et la diviſion donnera pour expoſant une égalité de trois dimenſions, qui comprendra les trois autres racines.

PROBLEME XX.

60. *Pour transformer & réſoudre les égalitez du ſixiéme degré.*

Lorſque les racines d'une égalité de ſix dimenſions ſeront toutes incommenſurables, & que la ſomme de deux ou de quatre ſera commenſurable ; on ſuppoſera que cette égalité eſt un produit de deux, dont l'une a deux degrez, & l'autre quatre. Et par des comparaiſons ſemblables aux précédentes, on formera, comme l'a fait Monſieur Hudde, une égalité de 15 degrez, qu'on pourra prendre pour premiére réduite de celle qu'on propoſe, où il n'y en a que ſix. L'égalité de quinze degrez eſt

$$x^{15} \;*\; + 4qx^{13} - 2rx^{12} \begin{matrix} + 6qqx^{11} \\ - 2sx^{11} \end{matrix} \begin{matrix} + 10tx^{10} \\ - 6qrx^{10} \end{matrix} \begin{matrix} - 2qsx^{9} \\ - 26vx^{9} \\ + 4q^3x^{9} \end{matrix} \begin{matrix} + 12qtx^{8} \\ + 6rsx^{8} \\ - 6qqrx^{8} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - 3rtx^7 \\ - 24qvx^7 \\ - 7ssx^7 \\ + 2qqsx^7 \\ + q^4x^7 \end{matrix} \begin{matrix} + 10stx^6 \\ - 30rvx^6 \\ + 2qqtx^6 \\ + 4qrsx^6 \\ + 2r^3x^6 \\ - 2q^3rx^6 \end{matrix} \begin{matrix} - 12ttx^5 \\ + 6qrtx^5 \\ - 18qqvx^5 \\ - 6qssx^5 \\ - 6rrsx^5 \\ + 2q^3sx^5 \\ + 54svx^5 \end{matrix} \begin{matrix} + 2qstx^4 \\ - 6qrvx^4 \\ - 6rrtx^4 \\ + 8rssx^4 \\ - 2qqrsx^4 \\ + 2qr^3x^4 \\ - 18tvx^4 \end{matrix} \begin{matrix} - 5qttx^3 \\ + 7rstx^3 \\ + 3rrvx^3 \\ + qqrtx^3 \\ - 4q^3vx^3 \\ + qqssx^3 \\ + 18qsvx^3 \\ - 4s^3x^3 \\ - 2qrrsx^3 \\ - r^4x^3 \\ - 27vvx^3 \end{matrix} \begin{matrix} - 6rttxx \\ + 2r^3sxx \end{matrix} \begin{matrix} - qqttx \\ + 3sttx \\ + qrstx \\ + 3qrrvx \\ - 9rtvx \\ - r^3tx \\ - rrssx \end{matrix} \begin{matrix} - qrtt \\ + t^3 \\ + rrst \\ - r^3v \end{matrix} \propto 0.$$

Les 15 racines de cette égalité ſont les ſommes alternatives des ſix de celle qu'on propoſe combinées deux à deux ou quatre à quatre, autant de fois qu'elles peuvent l'être en diverſes maniéres. De ſorte que ſi l'une de ces diverſes ſommes peut être commenſurable, on pourra diviſer par $x +$ ou $-$ quelque diviſeur du dernier terme $qrtt - t^3 - rrst + r^3v$. Et la propoſée pourra par conſequent être diviſée par cette égalité plane $yy + xy + \frac{m}{n} \propto 0$, en prenant pour m la grandeur $5x^8 + 6px^6 - 4qx^5 \begin{matrix} + 5rx^4 \\ + ppx^4 \end{matrix} - 5sx^3 \begin{matrix} - qqxx \\ + prxx \\ - 9txx \end{matrix} \begin{matrix} - psx \\ + qrx \end{matrix} - qs$, & pour n la grandeur $14x^6 + 8px^4 + 5x^3 \begin{matrix} + 2ppxx \\ - 6rxx \end{matrix} \begin{matrix} + pqx \\ - 3sx \end{matrix} - qq$. Et la diviſion donnera pour expoſant une autre égalité de quatre degrez qui comprendra quatre des ſix racines que l'on cherche, comme la plane en comprend déja deux.

Et pour la seconde réduitte du sixiéme degré ; on supposera que la proposée est formée du produit de deux autres de trois degrez chacune. Et on en tirera une égalité de vingt degrez, qui ne passeront que pour dix, parceque les dimensions de l'inconnuë seront paires par tout. Les dix racines de cette égalité seront les dix sommes alternatives des six de celle qu'on propose combinées trois à trois en vingt maniéres différentes. Mais parcequ'on ne peut prendre la somme de trois racines d'une part sans prendre en même temps celle des trois qui restent, & qui est la même, à cause du second terme évanoüi ; ces vingt maniéres différentes seront réduittes à la moitié, c'est-à-dire à dix. Et pour trouver dans la réduitte quelqu'une des racines, il suffira de la diviser par $yy +$ ou $-$ chaque quarré diviseur de son dernier terme.

POUR LES TRANSFORME'ES PARTICULIERES.

Mais il faudroit avoir des transformées plus particuliéres que les précédentes, afin d'examiner en particulier chaque degré selon les divers genres qu'il embrasse, & afin d'y pouvoir découvrir les communications qui se trouvent entre toutes les diverses racines.

Il faudroit par éxemple trois transformées particuliéres pour le cinquiéme degré : parcequ'il renferme trois sortes d'égalitez ; celles où les cinq racines sont toutes réelles ; d'autres où il y a trois racines réelles, & deux imaginaires ; & les derniéres où une seule est réelle, & les quatre qui restent sont toutes imaginaires.

Pour trouver aisément ces trois diverses transformées. Lorsque les racines seront toutes réelles, on nommera $2a$ la somme de deux racines d'une part, ou des trois qui restent de l'autre, & pour exprimer toutes les différences alternatives de ces cinq racines, elles seront $a+b, a-b, -c-d, -c+d, -2a+2c$. Ce qui fournira les trois égalitez $yy-2ay+aa-bb \propto 0$, $yy+2cy+cc-dd \propto 0$, $y+2a-2c \propto 0$. Et leur produit fournira la transformée

$$y^5 * \begin{array}{llll} & & -72aabcy & +2a^3cc \\ -3aay^3 & +2a^3yy & +4a^3cy & -2a^3dd \\ +4acy^3 & -8aacyy & -4abccy & -2abbcc \\ -3ccy^3 & +8accyy & +3aaddy & +2abbdd \\ -1bby^3 & -2abbyy & +4ac^3y & -2aac^3 \\ -1ddy^3 & -2c^3yy & -4acddy & +2aacdd \\ & +2cddyy & +3bbccy & +2bbc^3 \\ & & +bbddy & -2bbcdd \end{array} \propto 0$$ du premier genre, où

nulle des cinq racines n'est imaginaire. Et si l'on y change tous les signes des parties où se trouve dd ; on aura la transformée du second genre, où il y a trois racines réelles $a+b$, $a-b$, $-2a+2c$, & deux imaginaires $-c+\sqrt{-dd}$, $-c-\sqrt{-dd}$. Et si l'on changeoit encore dans cette nouvelle transformée tous les signes des parties où se trouve bb ; on auroit la transformée du troisiéme genre, où il y a une racine réelle $-2a+2c$, & quatre imaginaires $a+\sqrt{-bb}$, $a-\sqrt{-bb}$, $-c+\sqrt{-dd}$, $-c-\sqrt{-dd}$.

Et pour avoir de la même sorte les quatre transformées particuliéres du ſixiéme degré, où l'on ſuppoſe toûjours que le ſecond terme eſt évanoüi. Lorſque les racines ſeront toutes réelles, ou qu'il n'y en aura point d'imaginaire, on pourra les nommer $a+b$, $a-b$, $-c+d$, $-c-d$, $-a+c+e$, $-a+c-e$. Ce qui fournira ces trois égalitez planes

$$yy - 2ay \begin{array}{l} +aa \\ -bb \end{array} \infty\, 0, \quad yy + 2cy \begin{array}{l} +cc \\ -dd \end{array} \infty\, 0, \quad yy \begin{array}{l} +2ay \\ -2cy \end{array} \begin{array}{l} +aa \\ -2ac \\ +cc \\ -ee \end{array} \infty\, 0.$$

Et leur produit

$$y^6 * \begin{array}{ll} -2aay^4 & -2aacy^3 \\ +2acy^4 & +2accy^3 \\ -1bby^4 & +2aeey^3 \\ -2ccy^4 & -2ceey^3 \\ -1ddy^4 & -2abby^3 \\ -1eey^4 & +2cddy^3 \end{array} \begin{array}{r} +a^4yy \\ -2a^3cyy \\ +3aaccyy \\ -aabbyy \\ +2aaddyy \\ -aaeeyy \\ -2acddyy \\ -2abbcyy \\ -2ac^3yy \\ +4aceeyy \\ +2bbccyy \\ +bbddyy \\ +bbeeyy \\ -ccddyy \\ -cceeyy \\ +c^4yy \\ +ddeeyy \end{array} \begin{array}{r} -4a^3ccy \\ +2a^4cy \\ -2aabbcy \\ -2aaceey \\ +4aac^3y \\ -2aacddy \\ +2abbccy \\ +2abbddy \\ +2accddy \\ +2acceey \\ -2addeey \\ -2ac^4y \\ -2bbcddy \\ +2bbceey \end{array} \begin{array}{r} +a^4cc \\ -a^4dd \\ -2a^3c^3 \\ +2a^3cdd \\ -aaccee \\ +aaddee \\ +aabbdd \\ -aabbcc \\ -aaccdd \\ +aac^4 \\ +2abbc^3 \\ -2abbcdd \\ -bbc^4 \\ +bbccdd \\ +bbccee \\ -bbddee \end{array} \infty\, 0$$

ſera la transformée de ce premier genre, où rien n'eſt imaginaire. Et ſi l'on changeoit tous les ſignes des parties où ſe trouve dd; on aura la transformée du genre, où il y a quatre racines réelles, & deux imaginaires. Et ſi on changeoit enſuitte tous les ſignes des parties, où ſe trouve bb; on auroit la transformée du genre, où il y a deux racines réelles, & quatre imaginaires. Et ſi on changeoit encore les ſignes des parties, où ſe trouve $1ee$; on auroit la transformée du genre, où les ſix racines ſont toutes imaginaires. Et c'eſt la même choſe des autres égalitez qui ſont plus composées.

On connoîtra facilement par les régles des combinaiſons, juſques à quels degrez pourront être élevées les réduittes des égalitez. Par éxemple la réduitte du ſeptiéme degré conſidéré comme un produit du ſecond par le cinquiéme doit avoir 21 degrez; & l'autre réduitte de ce même degré conſidéré comme un produit du troiſiéme par le quatriéme auroit 35 degrez. Et de la même ſorte la réduitte du huitiéme degré conſidéré comme un produit du ſecond par le ſixiéme auroit 28 degrez. Et ſa réduitte, en le conſidérant comme un produit du quatriéme par le quatriéme en auroit 70, qui paſſeroient ſeulement pour 35, parceque les dimenſions de l'inconnuë auroient un nombre pair par tout. Et par une raiſon ſemblable, la réduitte du dixiéme degré conſidéré comme un produit du cinquiéme par le cinquiéme auroit 352 degrez, qui paſſeroient ſeulement pour

126. Et on pourra déterminer en ſuivant le même ordre le nombre des dégrez de toutes les diverſes réduittes.

Mais il ſeroit inutile de s'amuſer à les chercher chacune en particulier au delà du ſixiéme degré, & même du cinquiéme : non ſeulement à cauſe des difficultez & des longueurs immenſes du calcul, qui laſſeroient & pouſſeroient à bout la patience la plus infatigable ; mais auſſi parce-qu'il eſt fort rare que l'on en ait beſoin, ou qu'on veüille ſe donner la peine d'en faire quelque uſage. Il ſuffit d'avoir reconnu juſques où peut s'étendre la pénétration naturelle avec toutes ſes lumiéres, lorſqu'elle eſt réglée par une méthode facile, éxacte, & tres-courte.

De ſorte qu'il eſt à propos de finir ce traitté. Mais en même temps il eſt tres-juſte de témoigner publiquement nôtre reconnoiſſance, en rendant à NOSTRE DIEU l'honneur, la gloire, & les actions de graces, dont nous luy ſommes entiérement redevables pour les diverſes connoiſſances qu'il luy plaît de nous communiquer. Car enfin tout ce que nous recevons de [a] ſcience & de lumiére n'eſt qu'un pur effet des libéralitez [b] du PERE DES LUMIERES. Il eſt ſeul [c] le SEIGNEUR & LE DIEU DES SCIENCES ; & [d] c'eſt par ſa LUMIERE, par ſon VERBE, & par ſa SAGESSE, qu'il éclaire & qu'il inſtruit tous ceux qui viennent dans ce monde, en faiſant réjaillir ſur eux [e] ce rayon vif & perçant de la raiſon ſuprême, par lequel il forme & ſoûtient leur raiſon, & les rend [f] ſemblables à luy-même.

a. *Omnis ſapientia à Domino Deo eſt.* Eccli. 1.
b. *Omne donum perfectum deſcendens à Patre luminum.* Jac. 1.
c. *Deus ſcientiarum Dominus eſt.* 1. Reg. 2.
d. *Lux vera quæ illuminat omnem hominem venientem in hunc mundum.* Joa. 1.
e. *Signatum eſt ſuper nos lumen vultus tui Domine.* Pſ. 4.
f. *Ad ſimilitudinem Dei fecit illum.* Geneſ. 5.

Et ſi l'on enviſage avec étonnement dans le corps entier des Mathématiques tout ce vaſte aſſemblage des véritez ſi claires, & qui s'étendent juſques à l'infini, & le petit nombre des principes généraux, auſquels on les rappelle, & où elles ſe reüniſſent toutes avec une ſimplité parfaite : il faut que ce ſoient comme autant de divers degrez, qui ſervent à nous élever vers la Souveraine Grandeur de nôtre unique & tout aimable Maître, & qui nous diſpoſent à une connoiſſance plus claire & plus diſtincte de l'Immenſité glorieuſe & des Perfections ineffables de ſon Eſtre éternel, qui bien qu'elles ſoient infinies, ſont néanmoins néceſſairement toutes raſſemblées & renfermées d'une maniére éminente & incomprehenſible dans l'Unité tres-ſimple & tres-indiviſible de ſa Divine Eſſence.

Qu'on rende donc à jamais toute ſorte d'honneur & de gloire à la Sageſſe Immuable & Toute-puiſſante de NOSTRE DIEU, & de ſon Fils unique JESUS-CHRIST NOSTRE SEIGNEUR.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

A PARIS, De l'Imprimerie d'Antoine Lambin 1687.

TABLE

TABLE
DES
QUARREZ PARFAITS
DE TOUS LES NOMBRES NATURELS
depuis 1 jusques à 10000.

DE LA FORMATION,
ET DES USAGES DE LA TABLE.

I PROBLEME.

1. P*Our trouver avec facilité les quarrez successifs des nombres entiers & naturels.*

On aura soin de disposer par ordre, & de rassembler successivement tous les nombres impairs. Et les sommes fourniront successivement & selon le même ordre les quarrez qu'on désire. Car, comme on l'a déja démontré dans la premiére Partie à la page 107, le premier impair 1 est le quarré parfait de l'unité. Et si on luy ajoûte le second impair 3, on aura le second quarré 4. Et 4 plus le troisiéme quarré impair 5 fournira le troisiéme quarré 9. Et 9 plus le quatriéme impair 7 fournira de la même sorte le quatriéme quarré 16. Et ainsi du reste jusques à l'infini. De sorte que connoissant tel quarré qu'on voudra, on trouvera le quarré qui le suit de plus prés, en ajoûtant à ce premier, qui est déja connu, une somme connuë des deux côtez, ou deux fois le premier côté & l'unité de plus, ce qui revient au même.

Cette maniére de former les quarrez par de ſimples additions addouciroit & faciliteroit extrêmement le travail de ceux qui voudroient entreprendre de pouſſer juſques au quarré de 100000 la Table, qui ne s'étend ici que juſques au quarré de 10000. Ce ſeroit un ouvrage d'un merveilleux ſecours, pour abbréger une infinité de recherches & de ſupputations longues & difficiles. Et la Table entiére n'auroit au juſte que 329 pages, c'eſt-à-dire les 29 que celle-ci comprend pour 10000 quarrez, & encore 300 qui auroient chacune ſix colomnes ou 300 quarrez, ou toutes enſemble 1800 colomnes ou 90000 quarrez.

Pour la Table.

Côtez.	Quarrez.
1	1
	+ 3
2	4
	+ 5
3	9
	+ 7
4	16
	+ 9
5	25
	+ 11
6	36
	+ 13
7	49
	+ 15
8	64
	+ 17
9	81
	+ 19
10	100
&c.	

Pour la continuer.

Côtez.	Quarrez.
9999	99980001
	+ 19999
10000	100000000
	+ 20001
10001	100020001
	+ 20003
10002	100040004
	+ 20005
10003	100060009
	+ 20007
10004	100080016
	+ 20009
10005	100100025
	+ 20011
10006	100120036
	+ 20013
10007	100140049
	+ 20015
10008	100160064
&c.	

II PROBLEME.

2. *Pour trouver dans la Table le quarré parfait d'un nombre entier & moindre que* 10000.

On couppera vers la droitte une tranche de deux chiffres. Et on cherchera la premiére tranche, ou celle qui reſte à gauche, au haut de l'une des deux pages où elle eſt en ſon rang ; & dans la même page, on prendra ſur le bord la ſeconde tranche, ou celle qu'on avoit couppée vers la droitte. Et le nombre de la page, qui répondra au juſte à ces deux tranches, ou qui ſera ſous l'une dans la même colomne, & vis à vis de l'autre au même rang parallèle, ſera le quarré parfait du nombre entier qu'on avoit propoſé. Les exemples éclairciront & fixeront ces régles.

Premier Exemple.

Pour trouver dans la Table le quarré de 357. On couppera vers la droitte une tranche 57 ; & on cherchera la tranche 3.. en ſon rang au haut de la page 445^{e}, & la tranche 57 encore en ſon rang ſur le bord de la même page. Et le nombre 127449 qui répond au juſte en cette page à 3.. & à 57, ou qui eſt ſous 3.. dans la même colomne, & vis-à-vis de 57 au même rang parallèle, eſt le quarré parfait de 357 ou de 300 + 57.

Second exemple.

Pour trouver dans la Table le quarré de 48 ɔ 048. On prendra la tranche 0.. au haut de la page 444^{e}, & l'autre 48 ſur le bord de la même page. Et le nombre 2304 qui répond au juſte à ces deux tranches, eſt le quarré parfait de 48. On trouvera de la même ſorte dans la page 445^{e} que le quarré de 89 eſt 7921.

Troisieme exemple.

Pour trouver le quarré de 9738. On couppera vers la droitte une tranche 38 ; & on cherchera la tranche 97.. en ſon rang au haut de la page 470^{e}, & la tranche 38 encore en ſon rang ſur le bord de la même page. Et le nombre 94828644, qui répond au juſte en cette page à 97 . . & à 38, eſt le quarré parfait de 9738, ou de 9700 + 38. Et on trouvera de la même ſorte dans la page 471^e, que le quarré parfait de 9756 ou de 9700 + 56 eſt 95179536.

Quatrieme exemple.

Pour trouver le quarré de 9060. On prendra la tranche 90 . . dans ſon rang au haut de la page 469^e, & la tráche 60 ſur le bord de la même page. Et le nombre 82083600, qui répond au juſte à ces deux tranches, eſt le quarré parfait de 9060 ou de 9000 + 60. Et on trouvera de la même ſorte dans la page 464^e que le quarré de 8007 eſt 64112049.

III PROBLEME.

3. *Et pour trouver avec le ſecours de la Table le quarré d'un des nombres, qui ſurpaſſent* 10000. On ſeparera le nombre en diverſes parties, dont les premiéres auront ordinairement chacune quatre chiffres. Enſuitte on diſpoſera par ordre & chacun dans ſon rang les quarrez des parties, plus auſſi dans ſon rang le double de chacun des plans alternatifs de ces mêmes parties. Et la ſomme entiére de tout ce qu'on aura diſpoſé de la ſorte réſoudra la queſtion. Les éxemples éclairciront & fixeront ces régles.

Premier exemple.

Pour trouver le quarré de 29947. On le tranchera entre 4 & 7. Et on prendra dans la Table le quarré 8964036 de la tranche 2994, & on écrira 6 au troiſiéme rang & le reſte aux rangs ſuivans. On écrira enſuitte le quarré 49 de 7 aux deux premiers rangs, & deux plans de 2994 dixaines par 7 unitez au ſecond & dans les ſuivans. Et la ſomme 896822809 ſera le quarré de 29947. Tous les quarrez des nombres, où il y aura cinq chiffres, & même ſix ou ſept, ſe trouveront facilement de la même ſorte.

```
Côté a + b ∞ 2994|7 ∞ 1B.              Côté a + b ∞ 9876|18 ∞ 1b.
             2994 . ∞ 1a.                           9876 . . ∞ 1a.
                  14 ∞ 2b.                                36 ∞ 2b.
            11976 .                                 59256 . .
            2994 . .                               29628 . . .
            41916 . ∞ 2ab.                       355536 . . ∞ 2ab.
          8964036|49 ∞ aa + bb.              97535376|.324 ∞ aa + bb.
Quarré    896822809 ∞ 1BB.            Quarré 975389313924 ∞ 1BB.
```

Second exemple.

Pour trouver le quarré de 578961372. On peut ſe régler à peu prés comme aux deux éxemples qu'on vient de figurer, ou plus facilement encore en cette ſorte. On couppera vers la droitte deux tranches de quatre chiffres chacune, & 5 reſtera ſeul dans la ſienne, parceque ſon double 10 multiplie facilement toute ſorte de nombres. Enſuitte on diſpoſera aux 17^e & 18^e rangs le quarré 25 de la tranche 5 reculée de 8 rangs, & au 8^e & dans les ſuivans le quarré 62346816 de la tranche 7896 ou *b* reculée de 4 rangs, & au premier & dans les ſuivans le quarré 01882384 de la tranche *c* ou des 1372 unitez. Et on diſpoſera de plus au 9^e & dans les ſuivans deux plans de 5 par 78961372, & au 5^e & dans les ſuivans deux autres plans de 7896 par 1372. Et raſſemblant ces diverſes parties, la ſomme entiére 335196270268122384 ſera au juſte le quarré que l'on cherche. Et on pourra trouver par de ſemblables voies divers abbrégemens, pour former les quarrez des nombres qui ont beaucoup de chiffres, en ſe ſervant du ſecours de la Table.

```
        Côté { 1a | + 1b | + 1c
             {  5 | 7896 | 1372 ∞ 1C.
   25|62346816|01882384 ∞ aa + bb + cc
     7896137200 . . . . . . . . ∞ 2ab + 2ac
          21666624 . . . . ∞ 2bc
Quarré 335196270268122384 CC ∞ aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc.
```

	0..	1..	2..	3..	4..	5..	6..	7..	8..	9..
00	0	10000	40000	90000	160000	250000	360000	490000	640000	810000
01	1	10201	40401	90601	160801	251001	361201	491401	641601	811801
02	4	10404	40804	91204	161604	252004	362404	492804	643204	813604
03	9	10609	41209	91809	162409	253009	363609	494209	644809	815409
04	16	10816	41616	92416	163216	254016	364816	495616	646416	817216
05	25	11025	42025	93025	164025	255025	366025	497025	648025	819025
06	36	11236	42436	93636	164836	256036	367236	498436	649636	820836
07	49	11449	42849	94249	165649	257049	368449	499849	651249	822649
08	64	11664	43264	94864	166464	258064	369664	501264	652864	824464
09	81	11881	43681	95481	167281	259081	370881	502681	654481	826281
10	100	12100	44100	96100	168100	260100	372100	504100	656100	828100
11	121	12321	44521	96721	168921	261121	373321	505521	657721	829921
12	144	12544	44944	97344	169744	262144	374544	506944	659344	831744
13	169	12769	45369	97969	170569	263169	375769	508369	660969	833569
14	196	12996	45796	98596	171396	264196	376996	509796	662596	835396
15	225	13225	46225	99225	172225	265225	378225	511225	664925	837225
16	256	13456	46656	99856	173056	266256	379456	512656	665856	839056
17	289	13689	47089	100489	173889	267289	380689	514089	667489	840889
18	324	13924	47524	101124	174724	268324	381924	515524	669124	842724
19	361	14161	47961	101761	175561	269361	383161	516961	670761	844561
20	400	14400	48400	102400	176400	270400	384400	518400	672400	846400
21	441	14641	48841	103041	177241	271441	385641	519841	674041	848241
22	484	14884	49284	103684	178084	272484	386884	521284	675684	850084
23	529	15129	49729	104329	178929	273529	388129	522729	677329	851929
24	576	15376	50176	104976	179776	274576	389376	524176	678976	853776
25	625	15625	50625	105625	180625	275625	390625	525625	680625	855625
26	676	15876	51076	106276	181476	276676	391876	527076	682276	857476
27	729	16129	51529	106929	182329	277729	393129	528529	683929	859329
28	784	16384	51984	107584	183184	278784	394384	529984	685584	861184
29	841	16641	52441	108241	184041	279841	395641	531441	687241	863041
30	900	16900	52900	108900	184900	280900	396900	532900	688900	864900
31	961	17161	53361	109561	185761	281961	398161	534361	690561	866761
32	1024	17424	53824	110224	186624	283024	399424	535824	692224	868624
33	1089	17689	54289	110889	187489	284089	400689	537289	693889	870489
34	1156	17956	54756	111556	188356	285156	401956	538756	695556	872356
35	1225	18225	55225	112225	189225	286225	403225	540225	697225	874225
36	1296	18496	55696	112896	190096	287296	404496	541696	698896	876096
37	1369	18769	56169	113569	190969	288369	405769	543169	700569	877969
38	1444	19044	56644	114244	191844	289444	407044	544644	702244	879844
39	1521	19321	57121	114921	192721	290521	408321	546121	703921	881721
40	1600	19600	57600	115600	193600	291600	409600	547600	705600	883600
41	1681	19881	58081	116281	194481	292681	410881	549081	707281	885481
42	1764	20164	58564	116964	195364	293764	412164	550564	708964	887364
43	1849	20449	59049	117649	196249	294849	413449	552049	710649	889249
44	1936	20736	59536	118336	197136	295936	414736	553536	712336	891136
45	2025	21025	60025	119025	198025	297025	416025	555025	714025	893025
46	2116	21316	60516	119716	198916	298116	417316	556516	715716	894916
47	2209	21609	61009	120409	199809	299209	418609	558009	717409	896809
48	2304	21904	61504	121104	200704	300304	419904	559504	719104	898704
49	2401	22201	62001	121801	201601	301401	421201	561001	720801	900601

	0..	1..	2..	3..	4..	5..	6..	7..	8..	9..
50	2500	22500	62500	122500	202500	302500	422500	562500	722500	902500
51	2601	22801	63001	123201	203401	303601	423801	564001	724201	904401
52	2704	23104	63504	123904	204304	304704	425104	565504	725904	906304
53	2809	23409	64009	124609	205209	305809	426409	567009	727609	908209
54	2916	23716	64516	125316	206116	306916	427716	568516	729316	910116
55	3025	24025	65025	126025	207025	308025	429025	570025	731025	912025
56	3136	24336	65536	126736	207936	309136	430336	571536	732736	913936
57	3249	24649	66049	127449	208849	310249	431649	573049	734449	915849
58	3364	24964	66564	128164	209764	311364	432964	574564	736164	917764
59	3481	25281	67081	128881	210681	312481	434281	576081	737881	919681
60	3600	25600	67600	129600	211600	313600	435600	577600	739600	921600
61	3721	25921	68121	130321	212521	314721	436921	579121	741321	923521
62	3844	26244	68644	131044	213444	315844	438244	580644	743044	925444
63	3969	26569	69169	131769	214369	316969	439569	582169	744769	927369
64	4096	26896	69696	132496	215296	318096	440896	583696	746496	929296
65	4225	27225	70225	133225	216225	319225	442225	585225	748225	931225
66	4356	27556	70756	133956	217156	320356	443556	586756	749956	933156
67	4489	27889	71289	134689	218089	321489	444889	588289	751689	935089
68	4624	28224	71824	135424	219024	322624	446224	589824	753424	937024
69	4761	28561	72361	136161	219961	323761	447561	591361	755161	938961
70	4900	28900	72900	136900	220900	324900	448900	592900	756900	940900
71	5041	29241	73441	137641	221841	326041	450241	594441	758641	942841
72	5184	29584	73984	138384	222784	327184	451584	595984	760384	944784
73	5329	29929	74529	139129	223729	328329	452929	597529	762129	946729
74	5476	30276	75076	139876	224676	329476	454276	599076	763876	948676
75	5625	30625	75625	140625	225625	330625	455625	600625	765625	950625
76	5776	30976	76176	141376	226576	331776	456976	602176	767376	952576
77	5929	31329	76729	142129	227529	332929	458329	603729	769129	954529
78	6084	31684	77284	142884	228484	334084	459684	605284	770884	956484
79	6241	32041	77841	143641	229441	335241	461041	606841	772641	958441
80	6400	32400	78400	144400	230400	336400	462400	608400	774400	960400
81	6561	32761	78961	145161	231361	337561	463761	609961	776161	962361
82	6724	33124	79524	145924	232324	338724	465124	611524	777924	964324
83	6889	33489	80089	146689	233289	339889	466489	613089	779689	966289
84	7056	33856	80656	147456	234256	341056	467856	614656	781456	968256
85	7225	34225	81225	148225	235225	342225	469225	616225	783225	970225
86	7396	34596	81796	148996	236196	343396	470596	617796	784996	972196
87	7569	34969	82369	159769	237169	344569	471969	619369	786769	974169
88	7744	35344	82944	150544	238144	345744	473344	620944	788544	976144
89	7921	35721	83521	151321	239121	346921	474721	622521	790321	978121
90	8100	36100	84100	152100	240100	348100	476100	624100	792100	980100
91	8281	36481	84681	152881	241081	349281	477481	625681	793881	982081
92	8464	36864	85264	153664	242064	350464	478864	627264	795664	984064
93	8649	37249	85849	154449	243049	351649	480249	628849	797449	986049
94	8836	37636	86436	155236	244036	352836	481636	630436	799236	988036
95	9025	38025	87025	156025	245025	354025	483025	632025	801025	990025
96	9216	38416	87616	156816	246016	355216	484416	633616	802816	992016
97	9409	38809	88209	157609	247009	356409	485809	635209	804609	994009
98	9604	39204	88804	158404	248004	357604	487204	636804	806404	996004
99	9801	39601	89401	159201	249001	358801	488601	638401	808201	998001

	10..	11..	12..	13..	14..	15..	16..	17..
50	1102500	1322500	1562500	1822500	2102500	2402500	2722500	3062500
51	1104601	1324801	1565001	1825201	2105401	2405601	2725801	3066001
52	1106704	1327104	1567504	1827904	2108304	2408704	2729104	3069504
53	1108809	1329409	1570009	1830609	2111209	2411809	2732409	3073009
54	1110916	1331716	1572516	1833316	2114116	2414916	2735716	3076516
55	1113025	1334025	1575025	1836025	2117025	2418025	2739025	3080025
56	1115136	1336336	1577536	1838736	2119936	2421136	2742336	3083536
57	1117249	1338649	1580049	1841449	2122849	2424249	2745649	3087049
58	1119364	1340964	1582564	1844164	2125764	2427364	2748964	3090564
59	1121481	1343281	1585081	1846881	2128681	2430481	2752281	3094081
60	1123600	1345600	1587600	1849600	2131600	2433600	2755600	3097600
61	1125721	1347921	1590121	1852321	2134521	2436721	2758921	3101121
62	1127844	1350244	1592644	1855044	2137444	2439844	2762244	3104644
63	1129969	1352569	1595169	1857769	2140369	2442969	2765569	3108169
64	1132096	1354896	1597696	1860496	2143296	2446096	2768896	3111696
65	1134225	1357225	1600225	1863225	2146225	2449225	2772225	3115225
66	1136356	1359556	1602756	1865956	2149156	2452356	2775556	3118756
67	1138489	1361889	1605289	1868689	2152089	2455489	2778889	3122289
68	1140624	1364224	1607824	1871424	2155024	2458624	2782224	3125824
69	1142761	1366561	1610361	1874161	2157961	2461761	2785561	3129361
70	1144900	1368900	1612900	1876900	2160900	2464900	2788900	3132900
71	1147041	1371241	1615441	1879641	2163841	2468041	2792241	3136441
72	1149184	1373584	1617984	1882384	2166784	2471184	2795584	3139984
73	1151329	1375929	1620529	1885129	2169729	2474329	2798929	3143529
74	1153476	1378276	1623076	1887876	2172676	2477476	2802276	3147076
75	1155625	1380625	1625625	1890625	2175625	2480625	2805625	3150625
76	1157776	1382976	1628176	1893376	2178576	2483776	2808976	3154176
77	1159929	1385329	1630729	1896129	2181529	2486929	2812329	3157729
78	1162084	1387684	1633284	1898884	2184484	2490084	2815684	3161284
79	1164241	1390041	1635841	1901641	2187441	2493241	2819041	3164841
80	1166400	1392400	1638400	1904400	2190400	2496400	2822400	3168400
81	1168561	1394761	1640961	1907161	2193361	2499561	2825761	3171961
82	1170724	1397124	1643524	1909924	2196324	2502724	2829124	3175524
83	1172889	1399489	1646089	1912689	2199289	2505889	2832489	3179089
84	1175056	1401856	1648656	1915456	2202256	2509056	2835856	3182656
85	1177225	1404225	1651225	1918225	2205225	2512225	2839225	3186225
86	1179396	1406596	1653796	1920996	2208196	2515396	2842596	3189796
87	1181569	1408969	1656369	1923769	2211169	2518569	2845969	3193369
88	1183744	1411344	1658944	1926544	2214144	2521744	2849344	3196944
89	1185921	1413721	1661521	1929321	2217121	2524921	2852721	3200521
90	1188100	1416100	1664100	1932100	2220100	2528100	2856100	3204100
91	1190281	1418481	1666681	1934881	2223081	2531281	2859481	3207681
92	1192464	1420864	1669264	1937664	2226064	2534464	2862864	3211264
93	1194649	1423249	1671849	1940449	2229049	2537649	2866249	3214849
94	1196836	1425636	1674436	1943236	2232036	2540836	2869636	3218436
95	1199025	1428025	1677025	1946025	2235025	2544025	2873025	3222025
96	1201216	1430416	1679616	1948816	2238016	2547216	2876416	3225616
97	1203409	1432809	1682209	1951609	2241009	2550409	2879809	3229209
98	1205604	1435204	1684804	1954404	2244004	2553604	2883204	3232804
99	1207801	1437601	1687401	1957201	2247001	2556801	2886601	3236401

	18..	19..	20..	21..	22..	23..	24..	25..
00	3240000	3610000	4000000	4410000	4840000	5290000	5760000	6250000
01	3243601	3613801	4004001	4414201	4844401	5294601	5764801	6255001
02	3247204	3617604	4008004	4418404	4848804	5299204	5769604	6260004
03	3250809	3621409	4012009	4422609	4853209	5303809	5774409	6265009
04	3254416	3625216	4016016	4426816	4857616	5308416	5779216	6270016
05	3258025	3629025	4020025	4431025	4862025	5313025	5784025	6275025
06	3261636	3632836	4024036	4435236	4866436	5317636	5788836	6280036
07	3265249	3636649	4028049	4439449	4870849	5322249	5793649	6285049
08	3268864	3640464	4032064	4443664	4875264	5326864	5798464	6290064
09	3272481	3644281	4036081	4447881	4879681	5331481	5803281	6295081
10	3276100	3648100	4040100	4452100	4884100	5336100	5808100	6300100
11	3279721	3651921	4044121	4456321	4888521	5340721	5812921	6305121
12	3283344	3655744	4048144	4460544	4892944	5345344	5817744	6310144
13	3286969	3659569	4052169	4464769	4897369	5349969	5822569	6315169
14	3290596	3663396	4056196	4468996	4901796	5354596	5827396	6320196
15	3294225	3667225	4060225	4473225	4906225	5359225	5832225	6325225
16	3297856	3671056	4064256	4477456	4910656	5363856	5837056	6330256
17	3301489	3674889	4068289	4481689	4915089	5368489	5841889	6335289
18	3305124	3678724	4072324	4485924	4919524	5373124	5846724	6340324
19	3308761	3682561	4076361	4490161	4923961	5377761	5851561	6345361
20	3312400	3686400	4080400	4494400	4928400	5382400	5856400	6350400
21	3316041	3690241	4084441	4498641	4932841	5387041	5861241	6355441
22	3319684	3694084	4088484	4502884	4937284	5391684	5866084	6360484
23	3323329	3697929	4092529	4507129	4941729	5396329	5870929	6365529
24	3326976	3701776	4096576	4511376	4946176	5400976	5875776	6370576
25	3330625	3705625	4100625	4515625	4950625	5405625	5880625	6375625
26	3334276	3709476	4104676	4519876	4955076	5410276	5885476	6380676
27	3337929	3713329	4108729	4524129	4959529	5414929	5890329	6385729
28	3341584	3717184	4112784	4528384	4963984	5419584	5895184	6390784
29	3345241	3721041	4116841	4532641	4968441	5424241	5900041	6395841
30	3348900	3724900	4120900	4536900	4972900	5428900	5904900	6400900
31	3352561	3728761	4124961	4541161	4977361	5433561	5909761	6405961
32	3356224	3732624	4129024	4545424	4981824	5438224	5914624	6411024
33	3359889	3736489	4133089	4549689	4986289	5442889	5919489	6416089
34	3363556	3740356	4137156	4553956	4990756	5447556	5924356	6421156
35	3367225	3744225	4141225	4558225	4995225	5452225	5929225	6426225
36	3370896	3748096	4145296	4562496	4999696	5456896	5934096	6431296
37	3374569	3751969	4149369	4566769	5004169	5461569	5938969	6436369
38	3378244	3755844	4153444	4571044	5008644	5466244	5943844	6441444
39	3381921	3759721	4157521	4575321	5013121	5470921	5948721	6446521
40	3385600	3763600	4161600	4579600	5017600	5475600	5953600	6451600
41	3389281	3767481	4165681	4583881	5722081	5480281	5958481	6456681
42	3392964	3771364	4169764	4588164	5026564	5484964	5963364	6461764
43	3396649	3775249	4173849	4592449	5031049	5489649	5968249	6466849
44	3400336	3779136	4177936	4596736	5035536	5494336	5973136	6471936
45	3404025	3783025	4182025	4601025	5040025	5499025	5978025	6477025
46	3407716	3786916	4186116	4605316	5044516	5503716	5982916	6482116
47	3411409	3790809	4190209	4609609	5049009	5508409	5987809	6487209
48	3415104	3794704	4194304	4613904	5053504	5513104	5992704	6492304
49	3418801	3798601	4198401	4618201	5058001	5517801	5997601	6497401

	18..	19..	20..	21..	22..	23..	24..	25..
50	3422500	3802500	4202500	4622500	5062500	5522500	6002500	6502500
51	3426201	3806401	4206601	4626801	5067001	5527201	6007401	6507601
52	3429904	3810304	4210704	4631104	5071504	5531904	6012304	6512704
53	3433609	3814209	4214809	4635409	5076009	5536609	6017209	6517809
54	3437316	3818116	4218916	4639716	5080516	5541316	6022116	6522916
55	3441025	3822025	4223025	4644025	5085025	5546025	6027025	6528025
56	3444736	3825936	4227136	4648336	5089536	5550736	6031936	6533136
57	3448449	3829849	4231249	4652649	5094049	5555449	6036849	6538249
58	3452164	3833764	4235364	4656964	5098564	5560164	6041764	6543364
59	3455881	3837681	4239481	4661281	5103081	5564881	6046681	6548481
60	3459600	3841600	4243600	4665600	5107600	5569600	6051600	6553600
61	3463321	3845521	4247721	4669921	5112121	5574321	6056521	6558721
62	3467044	3849444	4251844	4674244	5116644	5579044	6061444	6563844
63	3470769	3853369	4255969	4678569	5121169	5583769	6066369	6568969
64	3474496	3857296	4260096	4682896	5125696	5588496	6071296	6574096
65	3478225	3861225	4264225	4687225	5130225	5593225	6076225	6579225
66	3481956	3865156	4268356	4691556	5134756	5597956	6081156	6584356
67	3485689	3869089	4272489	4695889	5139289	5602689	6086089	6589489
68	3489424	3873024	4276624	4700224	5143824	5607424	6091024	6594624
69	3493161	3876961	4280761	4704561	5148361	5612161	6095961	6599761
70	3496900	3880900	4284900	4708900	5152900	5616900	6100900	6604900
71	3500641	3884841	4289041	4713241	5157441	5621641	6105841	6610041
72	3504384	3888784	4293184	4717584	5161984	5626384	6110784	6615184
73	3508129	3892729	4297329	4721929	5166529	5631129	6115729	6620329
74	3511876	3896676	4301476	4726276	5171076	5635876	6120676	6625476
75	3515625	3900625	4305625	4730625	5175625	5640625	6125625	6630625
76	3519376	3904576	4309776	4734976	5180176	5645376	6130576	6635776
77	3523129	3908529	4313929	4739329	5184729	5650129	6135529	6640929
78	3526884	3912484	4318084	4743684	5189284	5654884	6140484	6646084
79	3530641	3916441	4322241	4748041	5193841	5659641	6145441	6651241
80	3534400	3920400	4326400	4752400	5198400	5664400	6150400	6656400
81	3538161	3924361	4330561	4756761	5202961	5669161	6155361	6661561
82	3541924	3928324	4334724	4761124	5207524	5673924	6160324	6666724
83	3545689	3932289	4338889	4765489	5212089	5678689	6165289	6671889
84	3549456	3936256	4343056	4769856	5216656	5683456	6170256	6677056
85	3553225	3940225	4347225	4774225	5221225	5688225	6175225	6682225
86	3556996	3944196	4351396	4778596	5225796	5692996	6180196	6687396
87	3560769	3948169	4355569	4782969	5230369	5697769	6185169	6692569
88	3564544	3952144	4359744	4787344	5234944	5702544	6190144	6697744
89	3568321	3956121	4363921	4791721	5239521	5707321	6195121	6702921
90	3572100	3960100	4368100	4796100	5244100	5712100	6200100	6708100
91	3575881	3964081	4372281	4800481	5248681	5716881	6205081	6713281
92	3579664	3968064	4376464	4804864	5253264	5721664	6210064	6718464
93	3583449	3972049	4380649	4809249	5257849	5726449	6215049	6723649
94	3587236	3976036	4384836	4813636	5262436	5731236	6220036	6728836
95	3591025	3980025	4389025	4818025	5267025	5736025	6225025	6734025
96	3594816	3984016	4393216	4822416	5271616	5740816	6230016	6739216
97	3598609	3988009	4397409	4826809	5276209	5745609	6235009	6744409
98	3602404	3992004	4401604	4831204	5280804	5750404	6240004	6749604
99	3606201	3996001	4405801	4835601	5285401	5755201	6245001	6754801

..	26..	27..	28..	29.	30..	31..	32..
00	6760000	7290000	7840000	8410000	9000000	9610000	10240000
01	6765201	7295401	7845601	8415801	9006001	9616201	10246401
02	6770404	7300804	7851204	8421604	9012004	9622404	10252804
03	6775609	7306209	7856809	8427409	9018009	9628609	10259209
04	6780816	7311616	7862416	8433216	9024016	9634816	10265616
05	6786025	7317025	7868025	8439025	9030025	9641025	10272025
06	6791236	7322436	7873636	8444836	9036036	9647236	10278436
07	6796449	7327849	7879249	8450649	9042049	9653449	10284849
08	6801664	7333264	7884864	8456464	9048064	9659664	10291264
09	6806881	7338681	7890481	8462281	9054081	9665881	10297681
10	6812100	7344100	7896100	8468100	9060100	9672100	10304100
11	6817321	7349521	7901721	8473921	9066121	9678321	10310521
12	6822544	7354944	7907344	8479744	9072144	9684544	10316944
13	6827769	7360369	7912969	8485569	9078169	9690769	10323369
14	6832996	7365796	7918596	8491396	9084196	9696996	10329796
15	6838225	7371225	7924225	8497225	9090225	9703225	10336225
16	6843456	7376656	7929856	8503056	9096256	9709456	10342656
17	6848689	7382089	7935489	8508889	9102289	9715689	10349089
18	6853924	7387524	7941124	8514724	9108324	9721924	10355524
19	6859161	7392961	7946761	8520561	9114361	9728161	10361961
20	6864400	7398400	7952400	8526400	9120400	9734400	10368400
21	6869641	7403841	7958041	8532241	9126441	9740641	10374841
22	6874884	7409284	7963684	8538084	9132484	9746884	10381284
23	6880129	7414729	7969329	8543929	9138529	9753129	10387729
24	6885376	7420176	7974976	8549776	9144576	9759376	10394176
25	6890625	7425625	7980625	8555625	9150625	9765625	10400625
26	6895876	7431076	7986276	8561476	9156676	9771876	10407076
27	6901129	7436529	7991929	8567329	9162729	9778129	10413529
28	6906384	7441984	7997584	8573184	9168784	9784384	10419984
29	6911641	7447441	8003241	8579041	9174841	9790641	10426441
30	6916900	7452900	8008900	8584900	9180900	9796900	10432900
31	6922161	7458361	8014561	8590761	9186961	9803161	10439361
32	6927424	7463824	8020224	8596624	9193024	9809424	10445824
33	6932689	7469289	8025889	8602489	9199089	9815689	10452289
34	6937956	7474756	8031556	8608356	9205156	9821956	10458756
35	6943225	7480225	8037225	8614225	9211225	9828225	10465225
36	6948496	7485696	8042896	8620096	9217296	9834496	10471696
37	6953769	7491169	8048569	8625969	9223369	9840769	10478169
38	6959044	7496644	8054244	8631844	9229444	9847044	10484644
39	6964321	7502121	8059921	8637721	9235521	9853321	10491121
40	6969600	7507600	8065600	8643600	9241600	9859600	10497600
41	6974881	7513081	8071281	8649481	9247681	9865881	10504081
42	6980164	7518564	8076964	8655364	9253764	9872164	10510564
43	6985449	7524049	8082649	8661249	9259849	9878449	10517049
44	6990736	7529536	8088336	8667136	9265936	9884736	10523536
45	6996025	7535025	8094025	8673025	9272025	9891025	10530025
46	7001316	7540516	8099716	8678916	9278116	9897316	10536516
47	7006609	7546009	8105409	8684809	9284209	9903609	10543009
48	7011904	7551504	8111104	8690704	9290304	9909904	10549504
49	7017201	7557001	8116801	8696601	9296401	9916201	10556001

	26..	27..	28..	29..	30..	31..	32..
50	7022500	7562500	8122500	8702500	9302500	9922500	10562500
51	7027801	7568001	8128201	8708401	9308601	9928801	10569001
52	7033104	7573504	8133904	8714304	9314704	9935104	10575504
53	7038409	7579009	8139609	8720209	9320809	9941409	10582009
54	7043716	7584516	8145316	8726116	9326916	9947716	10588516
55	7049025	7590025	8151025	8732025	9333025	9954025	10595025
56	7054336	7595536	8156736	8737936	9339136	9960336	10601536
57	7059649	7601049	8162449	8743849	9345249	9966649	10608049
58	7064964	7606564	8168164	8749764	9351364	9972964	10614564
59	7070281	7612081	8173881	8755681	9357481	9979281	10621081
60	7075600	7617600	8179600	8761600	9363600	9985600	10627600
61	7080921	7623121	8185321	8767521	9369721	9991921	10634121
62	7086244	7628644	8191044	8773444	9375844	9998244	10640644
63	7091569	7634169	8196769	8779369	9381969	10004569	10647169
64	7096896	7639696	8202496	8785296	9388096	10010896	10653696
65	7102225	7645225	8208225	8791225	9394225	10017225	10660225
66	7107556	7650756	8213956	8797156	9400356	10023556	10666756
67	7112889	7656289	8219689	8803089	9406489	10029889	10673289
68	7118224	7661824	8225424	8809024	9412624	10036224	10679824
69	7123561	7667361	8231161	8814961	9418761	10042561	10686361
70	7128900	7672900	8236900	8820900	9424900	10048900	10692900
71	7134241	7678441	8242641	8826841	9431041	10055241	10699441
72	7139584	7683984	8248384	8832784	9437184	10061584	10705984
73	7144929	7689529	8254129	8838729	9443329	10067929	10712529
74	7150276	7695076	8259876	8844676	9449476	10074276	10719076
75	7155625	7700625	8265625	8850625	9455625	10080625	10725625
76	7160976	7706176	8271376	8856576	9461776	10086976	10732176
77	7166329	7711729	8277129	8862529	9467929	10093329	10738729
78	7171684	7717284	8282884	8868484	9474084	10099684	10745284
79	7177041	7722841	8288641	8874441	9480241	10106041	10751841
80	7182400	7728400	8294400	8880400	9486400	10112400	10758400
81	7187761	7733961	8300161	8886361	9492561	10118761	10764961
82	7193124	7739524	8305924	8892324	9498724	10125124	10771524
83	7198489	7745089	8311689	8898289	9504889	10131489	10778089
84	7203856	7750656	8317456	8904256	9511056	10137856	10784656
85	7209225	7756225	8323225	8910225	9517225	10144225	10791225
86	7214596	7761796	8328996	8916196	9523396	10150596	10797796
87	7219969	7767369	8334769	8922169	9529569	10156969	10804369
88	7225344	7772944	8340544	8928144	9535744	10163344	10810944
89	7230721	7778521	8346321	8934121	9541921	10169721	10817521
90	7236100	7784100	8352100	8940100	9548100	10176100	10824100
91	7241481	7789681	8357881	8946081	9554281	10182481	10830681
92	7246864	7795264	8363664	8952064	9560464	10188864	10837264
93	7252249	7800849	8369449	8958049	9566649	10195249	10843849
94	7257636	7806436	8375236	8964036	9572836	10201636	10850436
95	7263025	7812025	8381025	8970025	9579025	10208025	10857025
96	7268416	7817616	8386816	8976016	9585216	10214416	10863616
97	7273809	7823209	8392609	8982009	9591409	10220809	10870209
98	7279204	7828804	8398404	8988004	9597604	10227204	10876804
99	7284601	7834401	8404201	8994001	9603801	10233601	10883401

	33··	34··	35··	36··	37··	38··	39··
00	10890000	11560000	12250000	12960000	13690000	14440000	15210000
01	10896601	11566801	12257001	12967201	13697401	14447601	15217801
02	10903204	11573604	12264004	12974404	13704804	14455204	15225604
03	10909809	11580409	12271009	12981609	13712209	14462809	15233409
04	10916416	11587216	12278016	12988816	13719616	14470416	15241216
05	10923025	11594025	12285025	12996025	13727025	14478025	15249025
06	10929636	11600836	12292036	13003236	13734436	14485636	15256836
07	10936249	11607649	12299049	13010449	13741849	14493249	15264649
08	10942864	11614464	12306064	13017664	13749264	14500864	15272464
09	10949481	11621281	12313081	13024881	13756681	14508481	15280281
10	10956100	11628100	12320100	13032100	13764100	14516100	15288100
11	10962721	11634921	12327121	13039321	13771521	14523721	15295921
12	10969344	11641744	12334144	13046544	13778944	14531344	15303744
13	10975969	11648569	12341169	13053769	13786369	14538969	15311569
14	10982596	11655396	12348196	13060996	13793796	14546596	15319396
15	10989225	11662225	12355225	13068225	13801225	14554225	15327225
16	10995856	11669056	12362256	13075456	13808656	14561856	15335056
17	11002489	11675889	12369289	13082689	13816089	14569489	15342889
18	11009124	11682724	12376324	13089924	13823524	14577124	15350724
19	11015761	11689561	12383361	13097161	13830961	14584761	15358561
20	11022400	11696400	12390400	13104400	13838400	14592400	15366400
21	11029041	11703241	12397441	13111641	13845841	14600041	15374241
22	11035684	11710084	12404484	13118884	13853284	14607684	15382084
23	11042329	11716929	12411529	13126129	13860729	14615329	15389929
24	11048976	11723776	12418576	13133376	13868176	14622976	15397776
25	11055625	11730625	12425625	13140625	13875625	14630625	15405625
26	11062276	11737476	12432676	13147876	13883076	14638276	15413476
27	11068929	11744329	12439729	13155129	13890529	14645929	15421329
28	11075584	11751184	12446784	13162384	13897984	14653584	15429184
29	11082241	11758041	12453841	13169641	13905441	14661241	15437041
30	11088900	11764900	12460900	13176900	13912900	14668900	15444900
31	11095561	11771761	12467961	13184161	13920361	14676561	15452761
32	11102224	11778624	12475024	13191424	13927824	14684224	15460624
33	11108889	11785489	12482089	13198689	13935289	14691889	15468489
34	11115556	11792356	12489156	13205956	13942756	14699556	15476356
35	11122225	11799225	12496225	13213225	13950225	14707225	15484225
36	11128896	11806096	12503296	13220496	13957696	14714896	15492096
37	11135569	11812969	12510369	13227769	13965169	14722569	15499969
38	11142244	11819844	12517444	13235044	13972644	14730244	15507844
39	11148921	11826721	12524521	13242321	13980121	14737921	15515721
40	11155600	11833600	12531600	13249600	13987600	14745600	15523600
41	11162281	11840481	12538681	13256881	13995081	14753281	15531481
42	11168964	11847364	12545764	13264164	14002564	14760964	15539364
43	11175649	11854249	12552849	13271449	14010049	14768649	15547249
44	11182336	11861136	12559936	13278736	14017536	14776336	15555136
45	11189025	11868025	12567025	13286025	14025025	14784025	15563025
46	11195716	11874916	12574116	13293316	14032516	14791716	15570916
47	11202409	11881809	12581209	13300609	14040009	14799409	15578809
48	11209104	11888704	12588304	13307904	14047504	14807104	15586704
49	11215801	11895601	12595401	13315201	14055001	14814801	15594601

	33..	34..	35..	36..	37..	38..	39..
50	11222500	11902500	12602500	13322500	14062500	14822500	15602500
51	11229201	11909401	12609601	13329801	14070001	14830201	15610401
52	11235904	11916304	12616704	13337104	14077504	14837904	15618304
53	11242609	11923209	12623809	13344409	14085009	14845609	15626209
54	11249316	11930116	12630916	13351716	14092516	14853316	15634116
55	11256025	11937025	12638025	13359025	14100025	14861025	15642025
56	11262736	11943936	12645136	13366336	14107536	14868736	15649936
57	11269449	11950849	12652249	13373649	14115049	14876449	15657849
58	11276164	11957764	12659364	13380964	14122564	14884164	15665764
59	11282881	11964681	12666481	13388281	14130081	14891881	15673681
60	11289600	11971600	12673600	13395600	14137600	14899600	15681600
61	11296321	11978521	12680721	13402921	14145121	14907321	15689521
62	11303044	11985444	12687844	13410244	14152644	14915044	15697444
63	11309769	11992369	12694969	13417569	14160169	14922769	15705369
64	11316496	11999296	12702096	13424896	14167696	14930496	15713296
65	11323225	12006225	12709225	13432225	14175225	14938225	15721225
66	11329956	12013156	12716356	13439556	14182756	14945956	15729156
67	11336689	12020089	12723489	13446889	14190289	14953689	15737089
68	11343424	12027024	12730624	13454224	14197824	14961424	15745024
69	11350161	12033961	12737761	13461561	14205361	14969161	15752961
70	11356900	12040900	12744900	13468900	14212900	14976900	15760900
71	11363641	12047841	12752041	13476241	14220441	14984641	15768841
72	11370384	12054784	12759184	13483584	14227984	14992384	15776784
73	11377129	12061729	12766329	13490929	14235529	15000129	15784729
74	11383876	12068676	12773476	13498276	14243076	15007876	15792676
75	11390625	12075625	12780625	13505625	14250625	15015625	15800625
76	11397376	12082576	12787776	13512976	14258176	15023376	15808576
77	11404129	12089529	12794929	13520329	14265729	15031129	15816529
78	11410884	12096484	12802084	13527684	14273284	15038884	15824484
79	11417641	12103441	12809241	13535041	14280841	15046641	15832441
80	11424400	12110400	12816400	13542400	14288400	15054400	15840400
81	11431161	12117361	12823561	13549761	14295961	15062161	15848361
82	11437924	12124324	12830724	13557124	14303524	15069924	15856324
83	11444689	12131289	12837889	13564489	14311089	15077689	15864289
84	11451456	12138256	12845056	13571856	14318656	15085456	15872256
85	11458225	12145225	12852225	13579225	14326225	15093225	15880225
86	11464996	12152196	12859396	13586596	14333796	15100996	15888196
87	11471769	12159169	12866569	13593969	14341369	15108769	15896169
88	11478544	12166144	12873744	13601344	14348944	15116544	15904144
89	11485321	12173121	12880921	13608721	14356521	15124321	15912121
90	11492100	12180100	12888100	13616100	14364100	15132100	15920100
91	11498881	12187081	12895281	13623481	14371681	15139881	15928081
92	11505664	12194064	12902464	13630864	14379264	15147664	15936064
93	11512449	12201049	12909649	13638249	14386849	15155449	15944049
94	11519236	12208036	12916836	13645636	14394436	15163236	15952036
95	11526025	12215025	12924025	13653025	14402025	15171025	15960025
96	11532816	12222016	12931216	13660416	14409616	15178816	15968016
97	11539609	12229009	12938409	13667809	14417209	15186609	15976009
98	11546404	12236004	12945604	13675204	14424804	15194404	15984004
99	11553201	12243001	12952801	13682601	14432401	15202201	15992001

	40..	41..	42..	43..	44..	45..	46..
00	16000000	16810000	17640000	18490000	19360000	20250000	21160000
01	16008001	16818201	17648401	18498601	19368801	20259001	21169201
02	16016004	16826404	17656804	18507204	19377604	20268004	21178404
03	16024009	16834609	17665209	18515809	19386409	20277009	21187609
04	16032016	16842816	17673616	18524416	19395216	20286016	21196816
05	16040025	16851025	17682025	18533025	19404025	20295025	21206025
06	16048036	16859236	17690436	18541636	19412836	20304036	21215236
07	16056049	16867449	17698849	18550249	19421649	20313049	21224449
08	16064064	16875664	17707264	18558864	19430464	20322064	21233664
09	16072081	16883881	17715681	18567481	19439281	20331081	21242881
10	16080100	16892100	17724100	18576100	19448100	20340100	21252100
11	16088121	16900321	17732521	18584721	19456921	20349121	21261321
12	16096144	16908544	17740944	18593344	19465744	20358144	21270544
13	16104169	16916769	17749369	18601969	19474569	20367169	21279769
14	16112196	16924996	17757796	18610596	19483396	20376196	21288996
15	16120225	16933225	17766225	18619225	19492225	20385225	21298225
16	16128256	16941456	17774656	18627856	19501056	20394256	21307456
17	16136289	16949689	17783089	18636489	19509889	20403289	21316689
18	16144324	16957924	17791524	18645124	19518724	20412324	21325924
19	16152361	16966161	17799961	18653761	19527561	20421361	21335161
20	16160400	16974400	17808400	18662400	19536400	20430400	21344400
21	16168441	16982641	17816841	18671041	19545241	20439441	21353641
22	16176484	16990884	17825284	18679684	19554084	20448484	21362884
23	16184529	16999129	17833729	18688329	19562929	20457529	21372129
24	16192576	17007376	17842176	18696976	19571776	20466576	21381376
25	16200625	17015625	17850625	18705625	19580625	20475625	21390625
26	16208676	17023876	17859076	18714276	19589476	20484676	21399876
27	16216729	17032129	17867529	18722929	19598329	20493729	21409129
28	16224784	17040384	17875984	18731584	19607184	20502784	21418384
29	16232841	17048641	17884441	18740241	19616041	20511841	21427641
30	16240900	17056900	17892900	18748900	19624900	20520900	21436900
31	16248961	17065161	17901361	18757561	19633761	20529961	21446161
32	16257024	17073424	17909824	18766224	19642624	20539024	21455424
33	16265089	17081689	17918289	18774889	19651489	20548089	21464689
34	16273156	17089956	17926756	18783556	19660356	20557156	21473956
35	16281225	17098225	17935225	18792225	19669225	20566225	21483225
36	16289296	17106496	17943696	18800896	19678096	20575296	21492496
37	16297369	17114769	17952169	18809569	19686969	20584369	21501769
38	16305444	17123044	17960644	18818244	19695844	20593444	21511044
39	16313521	17131321	17969121	18826921	19704721	20602521	21520321
40	16321600	17139600	17977600	18835600	19713600	20611600	21529600
41	16329681	17147881	17986081	18844281	19722481	20620681	21538881
42	16337764	17156164	17994564	18852964	19731364	20629764	21548164
43	16345849	17164449	18003049	18861649	19740249	20638849	21557449
44	16353936	17172736	18011536	18870336	19749136	20647936	21566736
45	16362025	17181025	18020025	18879025	19758025	20657025	21576025
46	16370116	17189316	18028516	18887716	19766916	20666116	21585316
47	16378209	17197609	18037009	18896409	19775809	20675209	21594609
48	16386304	17205904	18045504	18905104	19784704	20684304	21603904
49	16394401	17214201	18054001	18913801	19793601	20693401	21613201

	40..	41..	42..	43..	44..	45..	46..
50	16402500	17222500	18062500	18922500	19802500	20702500	21622500
51	16410601	17230801	18071001	18931201	19811401	20711601	21631801
52	16418704	17239104	18079504	18939904	19820304	20720704	21641104
53	16426809	17247409	18088009	18948609	19829209	20729809	21650409
54	16434916	17255716	18096516	18957316	19838116	20738916	21659716
55	16443025	17264025	18105025	18966025	19847025	20748025	21669025
56	16451136	17272336	18113536	18974736	19855936	20757136	21678336
57	16459249	17280649	18122049	18983449	19864849	20766249	21687649
58	16467364	17288964	18130564	18992164	19873764	20775364	21696964
59	16475481	17297281	18139081	19000881	19882681	20784481	21706281
60	16483600	17305600	18147600	19009600	19891600	20793600	21715600
61	16491721	17313921	18156121	19018321	19900521	20802721	21724921
62	16499844	17322244	18164644	19027044	19909444	20811844	21734244
63	16507969	17330569	18173169	19035769	19918369	20820969	21743569
64	16516096	17338896	18181696	19044496	19927296	20830096	21752896
65	16524225	17347225	18190225	19053225	19936225	20839225	21762225
66	16532356	17355556	18198756	19061956	19945156	20848356	21771556
67	16540489	17363889	18207289	19070689	19954089	20857489	21780889
68	16548624	17372224	18215824	19079424	19963024	20866624	21790224
69	16556761	17380561	18224361	19088161	19971961	20875761	21799561
70	16564900	17388900	18232900	19096900	19980900	20884900	21808900
71	16573041	17397241	18241441	19105641	19989841	20894041	21818241
72	16581184	17405584	18249984	19114384	19998784	20903184	21827584
73	16589329	17413929	18258529	19123129	20007729	20912329	21836929
74	16597476	17422276	18267076	19131876	20016676	20921476	21846276
75	16605625	17430625	18275625	19140625	20025625	20930625	21855625
76	16613776	17438976	18284176	19149376	20034576	20939776	21864976
77	16621929	17447329	18292729	19158129	20043529	20948929	21874329
78	16630084	17455684	18301284	19166884	20052484	20958084	21883684
79	16638241	17464041	18309841	19175641	20061441	20967241	21893041
80	16646400	17472400	18318400	19184400	20070400	20976400	21902400
81	16654561	17480761	18326961	19193161	20079361	20985561	21911761
82	16662724	17489124	18335524	19201924	20088324	20994724	21921124
83	16670889	17497489	18344089	19210689	20097289	21003889	21930489
84	16679056	17505856	18352656	19219456	20106256	21013056	21939856
85	16687225	17514225	18361225	19228225	20115225	21022225	21949225
86	16695396	17522596	18369796	19236996	20124196	21031396	21958596
87	16703569	17530969	18378369	19245769	20133169	21040569	21967969
88	16711744	17539344	18386944	19254544	20142144	21049744	21977344
89	16719921	17547721	18395521	19263321	20151121	21058921	21986721
90	16728100	17556100	18404100	19272100	20160100	21068100	21996100
91	16736281	17564481	18412681	19280881	20169081	21077281	22005481
92	16744464	17572864	18421264	19289664	20178064	21086464	22014864
93	16752649	17581249	18429849	19298449	20187049	21095649	22024249
94	16760836	17589636	18438436	19307236	20196036	21104836	22033636
95	16769025	17598025	18447025	19316025	20205025	21114025	22043025
96	16777216	17606416	18455616	19324816	20214016	21123216	22052416
97	16785409	17614809	18464209	19333609	20223009	21132409	22061809
98	16793604	17623204	18472804	19342404	20232004	21141604	22071204
99	16801801	17631601	18481401	19351201	20241001	21150801	22080601

	47..	48..	49..	50..	51..	52..	53..
50	22562500	23522500	24502500	25502500	26522500	27562500	28622500
51	22572001	23532201	24512401	25512601	26532801	27573001	28633201
52	22581504	23541904	24522304	25522704	26543104	27583504	28643904
53	22591009	23551609	24532209	25532809	26553409	27594009	28654609
54	22600516	23561316	24542116	25542916	26563716	27604516	28665316
55	22610025	23571025	24552025	25553025	26574025	27615025	28676025
56	22619536	23580736	24561936	25563136	26584336	27625536	28686736
57	22629049	23590449	24571849	25573249	26594649	27636049	28697449
58	22638564	23600164	24581764	25583364	26604964	27646564	28708164
59	22648081	23609881	24591681	25593481	26615281	27657081	28718881
60	22657600	23619600	24601600	25603600	26625600	27667600	28729600
61	22667121	23629321	24611521	25613721	26635921	27678121	28740321
62	22676644	23639044	24621444	25623844	26646244	27688644	28751044
63	22686169	23648769	24631369	25633969	26656569	27699169	28761769
64	22695696	23658496	24641296	25644096	26666896	27709696	28772496
65	22705225	23668225	24651225	25654225	26677225	27720225	28783225
66	22714756	23677956	24661156	25664356	26687556	27730756	28793956
67	22724289	23687689	24671089	25674489	26697889	27741289	28804689
68	22733824	23697424	24681024	25684624	26708224	27751824	28815424
69	22743361	23707161	24690961	25694761	26718561	27762361	28826161
70	22752900	23716900	24700900	25704900	26728900	27772900	28836900
71	22762441	23726641	24710841	25715041	26739241	27783441	28847641
72	22771984	23736384	24720784	25725184	26749584	27793984	28858384
73	22781529	23746129	24730729	25735329	26759929	27804529	28869129
74	22791076	23755876	24740676	25745476	26770276	27815076	28879876
75	22800625	23765625	24750625	25755625	26780625	27825625	28890625
76	22810176	23775376	24760576	25765776	26790976	27836176	28901376
77	22819729	23785129	24770529	25775929	26801329	27846729	28912129
78	22829284	23794884	24780484	25786084	26811684	27857284	28922884
79	22838841	23804641	24790441	25796241	26822041	27867841	28933641
80	22848400	23814400	24800400	25806400	26832400	27878400	28944400
81	22857961	23824161	24810361	25816561	26842761	27888961	28955161
82	22867524	23833924	24820324	25826724	26853124	27899524	28965924
83	22877089	23843689	24830289	25836889	26863489	27910089	28976689
84	22886656	23853456	24840256	25847056	26873856	27920656	28987456
85	22896225	23863225	24850225	25857225	26884225	27931225	28998225
86	22905796	23872996	24860196	25867396	26894596	27941796	29008996
87	22915369	23882769	24870169	25877569	26904969	27952369	29019769
88	22924944	23892544	24880144	25887744	26915344	27962944	29030544
89	22934521	23902321	24890121	25897921	26925721	27973521	29041321
90	22944100	23912100	24900100	25908100	26936100	27984100	29052100
91	22953681	23921881	24910081	25918281	26946481	27994681	29062881
92	22963264	23931664	24920064	25928464	26956864	28005264	29073664
93	22972849	23941449	24930049	25938649	26967249	28015849	29084449
94	22982436	23951236	24940036	25948836	26977636	28026436	29095236
95	22992025	23961025	24950025	25959025	26988025	28037025	29106025
96	23001616	23970816	24960016	25969216	26998416	28047616	29116816
97	23011209	23980609	24970009	25979409	27008809	28058209	29127609
98	23020804	23990404	24980004	25989604	27019204	28068804	29138404
99	23030401	24000201	24990001	25999801	27029601	28079401	29149201

	54..	55..	56..	57..	58..	59..	60..
00	29160000	30250000	31360000	32490000	33640000	34810000	36000000
01	29170801	30261001	31371201	32501401	33651601	34821801	36012001
02	29181604	30272004	31382404	32512804	33663204	34833604	36024004
03	29192409	30283009	31393609	32524209	33674809	34845409	36036009
04	29203216	30294016	31404816	32535616	33686416	34857216	36048016
05	29214025	30305025	31416025	32547025	33698025	34869025	36060025
06	29224836	30316036	31427236	32558436	33709636	34880836	36072036
07	29235649	30327049	31438449	32569849	33721249	34892649	36084049
08	29246464	30338064	31449664	32581264	33732864	34904464	36096064
09	29257281	30349081	31460881	32592681	33744481	34916281	36108081
10	29268100	30360100	31472100	32604100	33756100	34928100	36120100
11	29278921	30371121	31483321	32615521	33767721	34939921	36132121
12	29289744	30382144	31494544	32626944	33779344	34951744	36144144
13	29300569	30393169	31505769	32638369	33790969	34963569	36156169
14	29311396	30404196	31516996	32649796	33802596	34975396	36168196
15	29322225	30415225	31528225	32661225	33814225	34987225	36180225
16	29333056	30426256	31539456	32672656	33825856	34999056	36192256
17	29343889	30437289	31550689	32684089	33837489	35010889	36204289
18	29354724	30448324	31561924	32695524	33849124	35022724	36216324
19	29365561	30459361	31573161	32706961	33860761	35034561	36228361
20	29376400	30470400	31584400	32718400	33872400	35046400	36240400
21	29387241	30481441	31595641	32729841	33884041	35058241	36252441
22	29398084	30492484	31606884	32741284	33895684	35070084	36264484
23	29408929	30503529	31618129	32752729	33907329	35081929	36276529
24	29419776	30514576	31629376	32764176	33918976	35093776	36288576
25	29430625	30525625	31640625	32775625	33930625	35105625	36300625
26	29441476	30536676	31651876	32787076	33942276	35117476	36312676
27	29452329	30547729	31663129	32798529	33953929	35129329	36324729
28	29463184	30558784	31674384	32809984	33965584	35141184	36336784
29	29474041	30569841	31685641	32821441	33977241	35153041	36348841
30	29484900	30580900	31696900	32832900	33988900	35164900	36360900
31	29495761	30591961	31708161	32844361	34000561	35176761	36372961
32	29506624	30603024	31719424	32855824	34012224	35188624	36385024
33	29517489	30614089	31730689	32867289	34023889	35200489	36397089
34	29528356	30625156	31741956	32878756	34035556	35212356	36409156
35	29539225	30636225	31753225	32890225	34047225	35224225	36421225
36	29550096	30647296	31764496	32901696	34058896	35236096	36433296
37	29560969	30658369	31775769	32913169	34070569	35247969	36445369
38	29571844	30669444	31787044	32924644	34082244	35259844	36457444
39	29582721	30680521	31798321	32936121	34093921	35271721	36469521
40	29593600	30691600	31809600	32947600	34105600	35283600	36481600
41	29604481	30702681	31820881	32959081	34117281	35295481	36493681
42	29615364	30713764	31832164	32970564	34128964	35307364	36505764
43	29626249	30724849	31843449	32982049	34140649	35319249	36517849
44	29637136	30735936	31854736	32993536	34152336	35331136	36529936
45	29648025	30747025	31866025	33005025	34164025	35343025	36542025
46	29658916	30758116	31877316	33016516	34175716	35354916	36554116
47	29669809	30769209	31888609	33028009	34187409	35366809	36566209
48	29680704	30780304	31899904	33039504	34199104	35378704	36578304
49	29691601	30791401	31911201	33051001	34210801	35390601	36590401

	54..	55..	56..	57..	58..	59..	60..
50	29702500	30802500	31922500	33062500	34222500	35402500	36602500
51	29713401	30813601	31933801	33074001	34234201	35414401	36614601
52	29724304	30824704	31945104	33085504	34245904	35426304	36626704
53	29735209	30835809	31956409	33097009	34257609	35438209	36638809
54	29746116	30846916	31967716	33108516	34269316	35450116	36650916
55	29757025	30858025	31979025	33120025	34281025	35462025	36663025
56	29767936	30869136	31990336	33131536	34292736	35473936	36675136
57	29778849	30880249	32001649	33143049	34304449	35485849	36687249
58	29789764	30891364	32012964	33154564	34316164	35497764	36699364
59	29800681	30902481	32024281	33166081	34327881	35509681	36711481
60	29811600	30913600	32035600	33177600	34339600	35521600	36723600
61	29822521	30924721	32046921	33189121	34351321	35533521	36735721
62	29833444	30935844	32058244	33200644	34363044	35545444	36747844
63	29844369	30946969	32069569	33212169	34374769	35557369	36759969
64	29855296	30958096	32080896	33223696	34386496	35569296	36772096
65	29866225	30969225	32092225	33235225	34398225	35581225	36784225
66	29877156	30980356	32103556	33246756	34409956	35593156	36796356
67	29888089	30991489	32114889	33258289	34421689	35605089	36808489
68	29899024	31002624	32126224	33269824	34433424	35617024	36820624
69	29909961	31013761	32137561	33281361	34445161	35628961	36832761
70	29920900	31024900	32148900	33292900	34456900	35640900	36844900
71	29931841	31036041	32160241	33304441	34468641	35652841	36857041
72	29942784	31047184	32171584	33315984	34480384	35664784	36869184
73	29953729	31058329	32182929	33327529	34492129	35676729	36881329
74	29964676	31069476	32194276	33339076	34503876	35688676	36893476
75	29975625	31080625	32205625	33350625	34515625	35700625	36905625
76	29986576	31091776	32216976	33362176	34527376	35712576	36917776
77	29997529	31102929	32228329	33373729	34539129	35724529	36929929
78	30008484	31114084	32239684	33385284	34550884	35736484	36942084
79	30019441	31125241	32251041	33396841	34562641	35748441	36954241
80	30030400	31136400	32262400	33408400	34574400	35760400	36966400
81	30041361	31147561	32273761	33419961	34586161	35772361	36978561
82	30052324	31158724	32285124	33431524	34597924	35784324	36990724
83	30063289	31169889	32296489	33443089	34609689	35796289	37002889
84	30074256	31181056	32307856	33454656	34621456	35808256	37015056
85	30085225	31192225	32319225	33466225	34633225	35820225	37027225
86	30096196	31203396	32330596	33477796	34644996	35832196	37039396
87	30107169	31214569	32341969	33489369	34656769	35844169	37051569
88	30118144	31225744	32353344	33500944	34668544	35856144	37063744
89	30129121	31236921	32364721	33512521	34680321	35868121	37075921
90	30140100	31248100	32376100	33524100	34692100	35880100	37088100
91	30151081	31259281	32387481	33535681	34703881	35892081	37100281
92	30162064	31270464	32398864	33547264	34715664	35904064	37112464
93	30173049	31281649	32410249	33558849	34727449	35916049	37124649
94	30184036	31292836	32421636	33570436	34739236	35928036	37136836
95	30195025	31304025	32433025	33582025	34751025	35940025	37149025
96	30206016	31315216	32444416	33593616	34762816	35952016	37161216
97	30217009	31326409	32455809	33605209	34774609	35964009	37173409
98	30228004	31337604	32467204	33616804	34786404	35976004	37185604
99	30239001	31348801	32478601	33628401	34798201	35988001	37197801

	61..	62..	63..	64..	65..	66..	67..
00	37210000	38440000	39690000	40960000	42250000	43560000	44890000
01	37222201	38452401	39702601	40972801	42263001	43573201	44903401
02	37234404	38464804	39715204	40985604	42276004	43586404	44916804
03	37246609	38477209	39727809	40998409	42289009	43599609	44930209
04	37258816	38489616	39740416	41011216	42302016	43612816	44943616
05	37271025	38502025	39753025	41024025	42315025	43626025	44957025
06	37283236	38514436	39765636	41036836	42328036	43639236	44970436
07	37295449	38526849	39778249	41049649	42341049	43652449	44983849
08	37307664	38539264	39790864	41062464	42354064	43665664	44997264
09	37319881	38551681	39803481	41075281	42367081	43678881	45010681
10	37332100	38564100	39816100	41088100	42380100	43692100	45024100
11	37344321	38576521	39828721	41100921	42393121	43705321	45037521
12	37356544	38588944	39841344	41113744	42406144	43718544	45050944
13	37368769	38601369	39853969	41126569	42419169	43731769	45064369
14	37380996	38613796	39866596	41139396	42432196	43744996	45077796
15	37393225	38626225	39879225	41152225	42445225	43758225	45091225
16	37405456	38638656	39891856	41165056	42458256	43771456	45104656
17	37417689	38651089	39904489	41177889	42471289	43784689	45118089
18	37429924	38663524	39917124	41190724	42484324	43797924	45131524
19	37442161	38675961	39929761	41203561	42497361	43811161	45144961
20	37454400	38688400	39942400	41216400	42510400	43824400	45158400
21	37466641	38700841	39955041	41229241	42523441	43837641	45171841
22	37478884	38713284	39967684	41242084	42536484	43850884	45185284
23	37491129	38725729	39980329	41254929	42549529	43864129	45198729
24	37503376	38738176	39992976	41267776	42562576	43877376	45212176
25	37515625	38750625	40005625	41280625	42575625	43890625	45225625
26	37527876	38763076	40018276	41293476	42588676	43903876	45239076
27	37540129	38775529	40030929	41306329	42601729	43917129	45252529
28	37552384	38787984	40043584	41319184	42614784	43930384	45265984
29	37564641	38800441	40056241	41332041	42627841	43943641	45279441
30	37576900	38812900	40068900	41344900	42640900	43956900	45292900
31	37589161	38825361	40081561	41357761	42653961	43970161	45306361
32	37601424	38837824	40094224	41370624	42667024	43983424	45319824
33	37613689	38850289	40106889	41383489	42680089	43996689	45333289
34	37625956	38862756	40119556	41396356	42693156	44009956	45346756
35	37638225	38875225	40132225	41409225	42706225	44023225	45360225
36	37650496	38887696	40144896	41422096	42719296	44036496	45373696
37	37662769	38900169	40157569	41434969	42732369	44049769	45387169
38	37675044	38912644	40170244	41447844	42745444	44063044	45400644
39	37687321	38925121	40182921	41460721	42758521	44076321	45414121
40	37699600	38937600	40195600	41473600	42771600	44089600	45427600
41	37711881	38950081	40208281	41486481	42784681	44102881	45441081
42	37724164	38962564	40220964	41499364	42797764	44116164	45454564
43	37736449	38975049	40233649	41512249	42810849	44129449	45468049
44	37748736	38987536	40246336	41525136	42823936	44142736	45481536
45	37761025	39000025	40259025	41538025	42837025	44156025	45495025
46	37773316	39012516	40271716	41550916	42850116	44169316	45508516
47	37785609	39025009	40284409	41563809	42863209	44182609	45522009
48	37797904	39037504	40297104	41576704	42876304	44195904	45535504
49	37810201	39050001	40309801	41589601	42889401	44209201	45549001

	61..	62..	63..	64..	65..	66..	67..
50	37822500	39062500	40322500	41602500	42902500	44222500	45562500
51	37834801	39075001	40335201	41615401	42915601	44235801	45576001
52	37847104	39087504	40347904	41628304	42928704	44249104	45589504
53	37859409	39100009	40360609	41641209	42941809	44262409	45603009
54	37871716	39112516	40373316	41654116	42954916	44275716	45616516
55	37884025	39125025	40386025	41667025	42968025	44289025	45630025
56	37896336	39137536	40398736	41679936	42981136	44302336	45643536
57	37908649	39150049	40411449	41692849	42994249	44315649	45657049
58	37920964	39162564	40424164	41705764	43007364	44328964	45670564
59	37933281	39175081	40436881	41718681	43020481	44342281	45684081
60	37945600	39187600	40449600	41731600	43033600	44355600	45697600
61	37957921	39200121	40462321	41744521	43046721	44368921	45711121
62	37970244	39212644	40475044	41757444	43059844	44382244	45724644
63	37982569	39225169	40487769	41770369	43072969	44395569	45738169
64	37994896	39237696	40500496	41783296	43086096	44408896	45751696
65	38007225	39250225	40513225	41796225	43099225	44422225	45765225
66	38019556	39262756	40525956	41809156	43112356	44435556	45778756
67	38031889	39275289	40538689	41822089	43125489	44448889	45792289
68	38044224	39287824	40551424	41835024	43138624	44462224	45805824
69	38056561	39300361	40564161	41847961	43151761	44475561	45819361
70	38068900	39312900	40576900	41860900	43164900	44488900	45832900
71	38081241	39325441	40589641	41873841	43178041	44502241	45846441
72	38093584	39337984	40602384	41886784	43191184	44515584	45859984
73	38105929	39350529	40615129	41899729	43204329	44528929	45873529
74	38118276	39363076	40627876	41912676	43217476	44542276	45887076
75	38130625	39375625	40640625	41925625	43230625	44555625	45900625
76	38142976	39388176	40653376	41938576	43243776	44568976	45914176
77	38155329	39400729	40666129	41951529	43256929	44582329	45927729
78	38167684	39413284	40678884	41964484	43270084	44595684	45941284
79	38180041	39425841	40691641	41977441	43283241	44609041	45954841
80	38192400	39438400	40704400	41990400	43296400	44622400	45968400
81	38204761	39450961	40717161	42003361	43309561	44635761	45981961
82	38217124	39463524	40729924	42016324	43322724	44649124	45995524
83	38229489	39476089	40742689	42029289	43335889	44662489	46009089
84	38241856	39488656	40755456	42042256	43349056	44675856	46022656
85	38254225	39501225	40768225	42055225	43362225	44689225	46036225
86	38266596	39513796	40780996	42068196	43375396	44702596	46049796
87	38278969	39526369	40793769	42081169	43388569	44715969	46063369
88	38291344	39538944	40806544	42094144	43401744	44729344	46076944
89	38303721	39551521	40819321	42107121	43414921	44742721	46090521
90	38316100	39564100	40832100	42120100	43428100	44756100	46104100
91	38328481	39576681	40844881	42133081	43441281	44769481	46117681
92	38340864	39589264	40857664	42146064	43454464	44782864	46131264
93	38353249	39601849	40870449	42159049	43467649	44796249	46144849
94	38365636	39614436	40883236	42172036	43480836	44809636	46158436
95	38378025	39627025	40896025	42185025	43494025	44823025	46172025
96	38390416	39639616	40908816	42198016	43507216	44836416	46185616
97	38402809	39652209	40921609	42211009	43520409	44849809	46199209
98	38415204	39664804	40934404	42224004	43533604	44863204	46212804
99	38427601	39677401	40947201	42237001	43546801	4487660[illegible]	46226401

	68..	69..	70..	71..	72..	73..	74..
00	46240000	47610000	49000000	50410000	51840000	53290000	54760000
01	46253601	47623801	49014001	50424201	51854401	53304601	54774801
02	46267204	47637604	49028004	50438404	51868804	53319204	54789604
03	46280809	47651409	49042009	50452609	51883209	53333809	54804409
04	46294416	47665216	49056016	50466816	51897616	53348416	54819216
05	46308025	47679025	49070025	50481025	51912025	53363025	54834025
06	46321636	47692836	49084036	50495236	51926436	53377636	54848836
07	46335249	47706649	49098049	50509449	51940849	53392249	54863649
08	46348864	47720464	49112064	50523664	51955264	53406864	54878464
09	46362481	47734281	49126081	50537881	51969681	53421481	54893281
10	46376100	47748100	49140100	50552100	51984100	53430100	54908100
11	46389721	47761921	49154121	50566321	51998521	53450721	54922921
12	46403344	47775744	49168144	50580544	52012944	53465344	54937744
13	46416969	47789569	49182169	50594769	52027369	53479969	54952569
14	46430596	47803396	49196196	50608996	52041796	53494596	54967396
15	46444225	47817225	49210225	50623225	52056225	53509225	54982225
16	46457856	47831056	49224256	50637456	52070656	53523856	54997056
17	46471489	47844889	49238289	50651689	52085089	53538489	55011889
18	46485124	47858724	49252324	50665924	52099524	53553124	55026724
19	46498761	47872561	49266361	50680161	52113961	53567761	55041561
20	46512400	47886400	49280400	50694400	52128400	53582400	55056400
21	46526041	47900241	49294441	50708641	52142841	53597041	55071241
22	46539684	47914084	49308484	50722884	52157284	53611684	55086084
23	46553329	47927929	49322529	50737129	52171729	53626329	55100929
24	46566976	47941776	49336576	50751376	52186176	53640976	55115776
25	46580625	47955625	49350625	50765625	52200625	53655625	55130625
26	46594276	47969476	49364676	50779876	52215076	53670276	55145476
27	46607929	47983329	49378729	50794129	52229529	53684929	55160329
28	46621584	47997184	49392784	50808384	52243984	53699584	55175184
29	46635241	48011041	49406841	50822641	52258441	53714241	55190041
30	46648900	48024900	49420900	50836900	52272900	53728900	55204900
31	46662561	48038761	49434961	50851161	52287361	53743561	55219761
32	46676224	48052624	49449024	50865424	52301824	53758224	55234624
33	46689889	48066489	49463089	50879689	52316289	53772889	55249489
34	46703556	48080356	49477156	50893956	52330756	53787556	55264356
35	46717225	48094225	49491225	50908225	52345225	53802225	55279225
36	46730896	48108096	49505296	50922496	52359696	53816896	55294096
37	46744569	48121969	49519369	50936769	52374169	53831569	55308969
38	46758244	48135844	49533444	50951044	52388644	53846244	55323844
39	46771921	48149721	49547521	50965321	52403121	53860921	55338721
40	46785600	48163600	49561600	50979600	52417600	53875600	55353600
41	46799281	48177481	49575681	50993881	52432081	53890281	55368481
42	46812964	48191364	49589764	51008164	52446564	53904964	55383364
43	46826649	48205249	49603849	51022449	52461049	53919649	55398249
44	46840336	48219136	49617936	51036736	52475536	53934336	55413136
45	46854025	48233025	49632025	51051025	52490025	53949025	55428025
46	46867716	48246916	49646116	51065316	52504516	53963716	55442916
47	46881409	48260809	49660209	51079609	52519009	53978409	55457809
48	46895104	48274704	49674304	51093904	52533504	53993104	55472704
49	46908801	48288601	49688401	51108201	52548001	54007801	55487601

	68..	69..	70..	71..	72..	73..	74..
50	46922500	48302500	49702500	51122500	52562500	54022500	55502500
51	46936201	48316401	49716601	51136801	52577001	54037201	55517401
52	46949904	48330304	49730704	51151104	52591504	54051904	55532304
53	46963609	48344209	49744809	51165409	52606009	54066609	55547209
54	46977316	48358116	49758916	51179716	52620516	54081316	55562116
55	46991025	48372025	49773025	51194025	52635025	54096025	55577025
56	47004736	48385936	49787136	51208336	52649536	54110736	55591936
57	47018449	48399849	49801249	51222649	52664049	54125449	55606849
58	47032164	48413764	49815364	51236964	52678564	54140164	55621764
59	47045881	48427681	49829481	51251281	52693081	54154881	55636681
60	47059600	48441600	49843600	51265600	52707600	54169600	55651600
61	47073321	48455521	49857721	51279921	52722121	54184321	55666521
62	47087044	48469444	49871844	51294244	52736644	54199044	55681444
63	47100769	48483369	49885969	51308569	52751169	54213769	55696369
64	47114496	48497296	49900096	51322896	52765696	54228496	55711296
65	47128225	48511225	49914225	51337225	52780225	54243225	55726225
66	47141956	48525156	49928356	51351556	52794756	54257956	55741156
67	47155689	48539089	49942489	51365889	52809289	54272689	55756089
68	47169424	48553024	49956624	51380224	52823824	54287424	55771024
69	47183161	48566961	49970761	51394561	52838361	54302161	55785961
70	47196900	48580900	49984900	51408900	52852900	54316900	55800900
71	47210641	48594841	49999041	51423241	52867441	54331641	55815841
72	47224384	48608784	50013184	51437584	52881984	54346384	55830784
73	47238129	48622729	50027329	51451929	52896529	54361129	55845729
74	47251876	48636676	50041476	51466276	52911076	54375876	55860676
75	47265625	48650625	50055625	51480625	52925625	54390625	55875625
76	47279376	48664576	50069776	51494976	52940176	54405376	55890576
77	47293129	48678529	50083929	51509329	52954729	54420129	55905529
78	47306884	48692484	50098084	51523684	52969284	54434884	55920484
79	47320641	48706441	50112241	51538041	52983841	54449641	55935441
80	47334400	48720400	50126400	51552400	52998400	54464400	55950400
81	47348161	48734361	50140561	51566761	53012961	54479161	55965361
82	47361924	48748324	50154724	51581124	53027524	54493924	55980324
83	47375689	48762289	50168889	51595489	53042089	54508689	55995289
84	47389456	48776256	50183056	51609856	53056656	54523456	56010256
85	47403225	48790225	50197225	51624225	53071225	54538225	56025225
86	47416996	48804196	50211396	51638596	53085796	54552996	56040196
87	47430769	48818169	50225569	51652969	53100369	54567769	56055169
88	47444544	48832144	50239744	51667344	53114944	54582544	56070144
89	47458321	48846121	50253921	51681721	53129521	54597321	56085121
90	47472100	48860100	50268100	51696100	53144100	54612100	56100100
91	47485881	48874081	50282281	51710481	53158681	54626881	56115081
92	47499664	48888064	50296464	51724864	53173264	54641664	56130064
93	47513449	48902049	50310649	51739249	53187849	54656449	56145049
94	47527236	48916036	50324836	51753636	53202436	54671236	56160036
95	47541025	48930025	50339025	51768025	53217025	54686025	56175025
96	47554816	48 44016	50353216	51782416	53231616	54700816	56190016
97	47568609	48958009	50367409	51796809	53246209	54715609	56205009
98	47582404	48972004	50381604	51811204	53260804	54730404	56220004
99	47596201	48986001	50395801	51825601	53275401	54745201	56235001

	75..	76..	77..	78..	79..	80..	81..
00	[illegible]	57760000	59290000	60840000	62410000	64000000	65610000
01	56265001	57775201	59305401	60855601	62425801	64016001	65626201
02	56280004	57790404	59320804	60871204	62441604	64032004	65642404
03	56295009	57805609	59336209	60886809	62457409	64048009	65658609
04	56310016	57820816	59351616	60902416	62473216	64064016	65674816
05	56325025	57836025	59367025	60918025	62489025	64080025	65691025
06	56340036	57851236	59382436	60933636	62504836	64096036	65707236
07	56355049	57866449	59397849	60949249	62520649	64112049	65723449
08	56370064	57881664	59413264	60964864	62536464	64128064	65739664
09	56385081	57896881	59428681	60980481	62552281	64144081	65755881
10	56400100	57912100	59444100	60996100	62568100	64160100	65772100
11	56415121	57927321	59459521	61011721	62583921	64176121	65788321
12	56430144	57942544	59474944	61027344	62599744	64192144	65804544
13	56445169	57957769	59490369	61042969	62615569	64208169	65820769
14	56460196	57972996	59505796	61058596	62631396	64224196	65836996
15	56475225	57988225	59521225	61074225	62647225	64240225	65853225
16	56490256	58003456	59536656	61089856	62663056	64256256	65869456
17	56505289	58018689	59552089	61105489	62678889	64272289	65885689
18	56520324	58033924	59567524	61121124	62694724	64288324	65901924
19	56535361	58049161	59582961	61136761	62710561	64304361	65918161
20	56550400	58064400	59598400	61152400	62726400	64320400	65934400
21	56565441	58079641	59613841	61168041	62742241	64336441	65950641
22	56580484	58094884	59629284	61183684	62758084	64352484	65966884
23	56595529	58110129	59644729	61199329	62773929	64368529	65983129
24	56610576	58125376	59660176	61214976	62789776	64384576	65999376
25	56625625	58140625	59675625	61230625	62805625	64400625	66015625
26	56640676	58155876	59691076	61246276	62821476	64416676	66031876
27	56655729	58171129	59706529	61261929	62837329	64432729	66048129
28	56670784	58186384	59721984	61277584	62853184	64448784	66064384
29	56685841	58201641	59737441	61293241	62869041	64464841	66080641
30	56700900	58216900	59752900	61308900	62884900	64480900	66096900
31	56715961	58232161	59768361	61324561	62900761	64496961	66113161
32	56731024	58247424	59783824	61340224	62916624	64513024	66129424
33	56746089	58262689	59799289	61355889	62932489	64529089	66145689
34	56761156	58277956	59814756	61371556	62948356	64545156	66161956
35	56776225	58293225	59830225	61387225	62964225	64561225	66178225
36	56791296	58308496	59845696	61402896	62980096	64577296	66194496
37	56806369	58323769	59861169	61418569	62995969	64593369	66210769
38	56821444	58339044	59876644	61434244	63011844	64609444	66227044
39	56836521	58354321	59892121	61449921	63027721	64625521	66243321
40	56851600	58369600	59907600	61465600	63043600	64641600	66259600
41	56866681	58384881	59923081	61481281	63059481	64657681	66275881
42	56881764	58400164	59938564	61496964	63075364	64673764	66292164
43	56896849	58415449	59954049	61512649	63091249	64689849	66308449
44	56911936	58430736	59969536	61528336	63107136	64705936	66324736
45	56927025	58446025	59985025	61544025	63123025	64722025	66341025
46	56942116	58461316	60000516	61559716	63138916	64738116	66357316
47	56957209	58476609	60016009	61575409	63154809	64754209	66373609
48	56972304	58491904	60031504	61591104	63170704	64770304	66389904
49	56987401	58507201	60047001	61606801	63186601	64786401	66406201

	75..	76..	77..	78..	79..	80..	81..
50	57002500	58522500	60062500	61622500	63202500	64802500	66422500
51	57017601	58537801	60078001	61638201	63218401	64818601	66438801
52	57032704	58553104	60093504	61653904	63234304	64834704	66455104
53	57047809	58568409	60109009	61669609	63250209	64850809	66471409
54	57062916	58583716	60124516	61685316	63266116	64866916	66487716
55	57078025	58599025	60140025	61701025	63282025	64883025	66504025
56	57093136	58614336	60155536	61716736	63297936	64899136	66520336
57	57108249	58629649	60171049	61732449	63313849	64915249	66536649
58	57123364	58644964	60186564	61748164	63329764	64931364	66552964
59	57138481	58660281	60202081	61763881	63345681	64947481	66569281
60	57153600	58675600	60217600	61779600	63361600	64963600	66585600
61	57168721	58690921	60233121	61795321	63377521	64979721	66601921
62	57183844	58706244	60248644	61811044	63393444	64995844	66618244
63	57198969	58721569	60264169	61826769	63409369	65011969	66634569
64	57214096	58736896	60279696	61842496	63425296	65028096	66650896
65	57229225	58752225	60295225	61858225	63441225	65044225	66667225
66	57244356	58767556	60310756	61873956	63457156	65060356	66683556
67	57259489	58782889	60326289	61889689	63473089	65076489	66699889
68	57274624	58798224	60341824	61905424	63489024	65092624	66716224
69	57289761	58813561	60357361	61921161	63504961	65108761	66732561
70	57304900	58828900	60372900	61936900	63520900	65124900	66748900
71	57320041	58844241	60388441	61952641	63536841	65141041	66765241
72	57335184	58859584	60403984	61968384	63552784	65157184	66781584
73	57350329	58874929	60419529	61984129	63568729	65173329	66797929
74	57365476	58890276	60435076	61999876	63584676	65189476	66814276
75	57380625	58905625	60450625	62015625	63600625	65205625	66830625
76	57395776	58920976	60466176	62031376	63616576	65221776	66846976
77	57410929	58936329	60481729	62047129	63632529	65237929	66863329
78	57426084	58951684	60497284	62062884	63648484	65254084	66879684
79	57441241	58967041	60512841	62078641	63664441	65270241	66896041
80	57456400	58982400	60528400	62094400	63680400	65286400	66912400
81	57471561	58997761	60543961	62110161	63696361	65302561	66928761
82	57486724	59013124	60559524	62125924	63712324	65318724	66945124
83	57501889	59028489	60575089	62141689	63728289	65334889	66961489
84	57517056	59043856	60590656	62157456	63744256	65351056	66977856
85	57532225	59059225	60606225	62173225	63760225	65367225	66994225
86	57547396	59074596	60621796	62188996	63776196	65383396	67010596
87	57562569	59089969	60637369	62204769	63792169	65399569	67026969
88	57577744	59105344	60652944	62220544	63808144	65415744	67043344
89	57592921	59120721	60668521	62236321	63824121	65431921	67059721
90	57608100	59136100	60684100	62252100	63840100	65448100	67076100
91	57623281	59151481	60699681	62267881	63856081	65464281	67092481
92	57638464	59166864	60715264	62283664	63872064	65480464	67108864
93	57653649	59182249	60730849	62299449	63888049	65496649	67125249
94	57668836	59197636	60746436	62315236	63904036	65512836	67141636
95	57684025	59213025	60762025	62331025	63920025	65529025	67158025
96	57699216	59228416	60777616	62346816	63936016	65545216	67174416
97	57714409	59243809	60793209	62362609	63952009	65561409	67190809
98	57729604	59259204	60808804	62378404	63968004	65577604	67207204
99	57744801	59274601	60824401	62394201	63984001	65593801	67223601

.	82..	83..	84..	85..	86..	87..	88..
00	67240000	68890000	70560000	72250000	73960000	75690000	77440000
01	67256401	68906601	70576801	72267001	73977201	75707401	77457601
02	67272804	68923204	70593604	72284004	73994404	75724804	77475204
03	67289209	68939809	70610409	72301009	74011609	75742209	77492809
04	67305616	68956416	70627216	72318016	74028816	75759616	77510416
05	67322025	68973025	70644025	72335025	74046025	75777025	77528025
06	67338436	68989636	70660836	72352036	74063236	75794436	77545636
07	67354849	69006249	70677649	72369049	74080449	75811849	77563249
08	67371264	69022864	70694464	72386064	74097664	75829264	77580864
09	67387681	69039481	70711281	72403081	74114881	75846681	77598481
10	67404100	69056100	70728100	72420100	74132100	75864100	77616100
11	67420521	69072721	70744921	72437121	74149321	75881521	77633721
12	67436944	69089344	70761744	72454144	74166544	75898944	77651344
13	67453369	69105969	70778569	72471169	74183769	75916369	77668969
14	67469796	69122596	70795396	72488196	74200996	75933796	77686596
15	67486225	69139225	70812225	72505225	74218225	75951225	77704225
16	67502656	69155856	70829056	72522256	74235456	75968656	77721856
17	67519089	69172489	70845889	72539289	74252689	75986089	77739489
18	67535524	69189124	70862724	72556324	74269924	76003524	77757124
19	67551961	69205761	70879561	72573361	74287161	76020961	77774761
20	67568400	69222400	70896400	72590400	74304400	76038400	77792400
21	67584841	69239041	70913241	72607441	74321641	76055841	77810041
22	67601284	69255684	70930084	72624484	74338884	76073284	77827684
23	67617729	69272329	70946929	72641529	74356129	76090729	77845329
24	67634176	69288976	70963776	72658576	74373376	76108176	77862976
25	67650625	69305625	70980625	72675625	74390625	76125625	77880625
26	67667076	69322276	70997476	72692676	74407876	76143076	77898276
27	67683529	69338929	71014329	72709729	74425129	76160529	77915929
28	67699984	69355584	71031184	72726784	74442384	76177984	77933584
29	67716441	69372241	71048041	72743841	74459641	76195441	77951241
30	67732900	69388900	71064900	72760900	74476900	76212900	77968900
31	67749361	69405561	71081761	72777961	74494161	76230361	77986561
32	67765824	69422224	71098624	72795024	74511424	76247824	78004224
33	67782289	69438889	71115489	72812089	74528689	76265289	78021889
34	67798756	69455556	71132356	72829156	74545956	76282756	78039556
35	67815225	69472225	71149225	72846225	74563225	76300225	78057225
36	67831696	69488896	71166096	72863296	74580496	76317696	78074896
37	67848169	69505569	71182969	72880369	74597769	76335169	78092569
38	67864644	69522244	71199844	72897444	74615044	76352644	78110244
39	67881121	69538921	71216721	72914521	74632321	76370121	78127921
40	67897600	69555600	71233600	72931600	74649600	76387600	78145600
41	67914081	69572281	71250481	72948681	74666881	76405081	78163281
42	67930564	69588964	71267364	72965764	74684164	76422564	78180964
43	67947049	69605649	71284249	72982849	74701449	76440049	78198649
44	67963536	69622336	71301136	72999936	74718736	76457536	78216336
45	67980025	69639025	71318025	73017025	74736025	76475025	78234025
46	67996516	69655716	71334916	73034116	74753316	76492516	78251716
47	68013009	69672409	71351809	73051209	74770609	76510009	78269409
48	68029504	69689104	71368704	73068304	74787904	76527504	78287104
49	68046001	69705801	71385601	73085401	74805201	76545001	78304801

	82..	83..	84..	85..	86..	87..	88..
50	68062500	69722500	71402500	73102500	74822500	76562500	78322500
51	68079001	69739201	71419401	73119601	74839801	76580001	78340201
52	68095504	69755904	71436304	73136704	74857104	76597504	78357904
53	68112009	69772609	71453209	73153809	74874409	76615009	78375609
54	68128516	69789316	71470116	73170916	74891716	76632516	78393316
55	68145025	69806025	71487025	73188025	74909025	76650025	78411025
56	68161536	69822736	71503936	73205136	74926336	76667536	78428736
57	68178049	69839449	71520849	73222249	74943649	76685049	78446449
58	68194564	69856164	71537764	73239364	74960964	76702564	78464164
59	68211081	69872881	71554681	73256481	74978281	76720081	78481881
60	68227600	69889600	71571600	73273600	74995600	76737600	78499600
61	68244121	69906321	71588521	73290721	75012921	76755121	78517321
62	68260644	69923044	71605444	73307844	75030244	76772644	78535044
63	68277169	69939769	71622369	73324969	75047569	76790169	78552769
64	68293696	69956496	71639296	73342096	75064896	76807696	78570496
65	68310225	69973225	71656225	73359225	75082225	76825225	78588225
66	68326756	69989956	71673156	73376356	75099556	76842756	78605956
67	68343289	70006689	71690089	73393489	75116889	76860289	78623689
68	68359824	70023424	71707024	73410624	75134224	76877824	78641424
69	68376361	70040161	71723961	73427761	75151561	76895361	78659161
70	68392900	70056900	71740900	73444900	75168900	76912900	78676900
71	68409441	70073641	71757841	73462041	75186241	76930441	78694641
72	68425984	70090384	71774784	73479184	75203584	76947984	78712384
73	68442529	70107129	71791729	73496329	75220929	76965529	78730129
74	68459076	70123876	71808676	73513476	75238276	76983076	78747876
75	68475625	70140625	71825625	73530625	75255625	77000625	78765625
76	68492176	70157376	71842576	73547776	75272976	77018176	78783376
77	68508729	70174129	71859529	73564929	75290329	77035729	78801129
78	68525284	70190884	71876484	73582084	75307684	77053284	78818884
79	68541841	70207641	71893441	73599241	75325041	77070841	78836641
80	68558400	70224400	71910400	73616400	75342400	77088400	78854400
81	68574961	70241161	71927361	73633561	75359761	77105961	78872161
82	68591524	70257924	71944324	73650724	75377124	77123524	78889924
83	68608089	70274689	71961289	73667889	75394489	77141089	78907689
84	68624656	70291456	71978256	73685056	75411856	77158656	78925456
85	68641225	70308225	71995225	73702225	75429225	77176225	78943225
86	68657796	70324996	72012196	73719396	75446596	77193796	78960996
87	68674369	70341769	72029169	73736569	75463969	77211369	78978769
88	68690944	70358544	72046144	73753744	75481344	77228944	78996544
89	68707521	70375321	72063121	73770921	75498721	77246521	79014321
90	68724100	70392100	72080100	73788100	75516100	77264100	79032100
91	68740681	70408881	72097081	73805281	75533481	77281681	79049881
92	68757264	70425664	72114064	73822464	75550864	77299264	79067664
93	68773849	70442449	72131049	73839649	75568249	77316849	79085449
94	68790436	70459236	72148036	73856836	75585636	77334436	79103236
95	68807025	70476025	72165025	73874025	75603025	77352025	79121025
96	68823616	70492816	72182016	73891216	75620416	77369616	79138816
97	68840209	70509609	72199009	73908409	75637809	77387209	79156609
98	68856804	70526404	72216004	73925604	75655204	77404804	79174404
99	68873401	70543201	72233001	73942801	75672601	77422401	79192201

	89..	90..	91..	92..	93..	94..	95..
00	79210000	81000000	82810000	84640000	86490000	88360000	90250000
01	79227801	81018001	82828201	84658401	86508601	88378801	90269001
02	79245604	81036004	82846404	84676804	86527204	88397604	90288004
03	79263409	81054009	82864609	84695209	86545809	88416409	90307009
04	79281216	81072016	82882816	84713616	86564416	88435216	90326016
05	79299025	81090025	82901025	84732025	86583025	88454025	90345025
06	79316836	81108036	82919236	84750436	86601636	88472836	90364036
07	79334649	81126049	82937449	84768849	86620249	88491649	90383049
08	79352464	81144064	82955664	84787264	86638864	88510464	90402064
09	79370281	81162081	82973881	84805681	86657481	88529281	90421081
10	79388100	81180100	82992100	84824100	86676100	88548100	90440100
11	79405921	81198121	83010321	84842521	86694721	88566921	90459121
12	79423744	81216144	83028544	84860944	86713344	88585744	90478144
13	79441569	81234169	83046769	84879369	86731969	88604569	90497169
14	79459396	81252196	83064996	84897796	86750596	88623396	90516196
15	79477225	81270225	83083225	84916225	86769225	88642225	90535225
16	79495056	81288256	83101456	84934656	86787856	88661056	90554256
17	79512889	81306289	83119689	84953089	86806489	88679889	90573289
18	79530724	81324324	83137924	84971524	86825124	88698724	90592324
19	79548561	81342361	83156161	84989961	86843761	88717561	90611361
20	79566400	81360400	83174400	85008400	86862400	88736400	90630400
21	79584241	81378441	83192641	85026841	86881041	88755241	90649441
22	79602084	81396484	83210884	85045284	86899684	88774084	90668484
23	79619929	81414529	83229129	85063729	86918329	88792929	90687529
24	79637776	81432576	83247376	85082176	86936976	88811776	90706576
25	79655625	81450625	83265625	85100625	86955625	88830625	90725625
26	79673476	81468676	83283876	85119076	86974276	88849476	90744676
27	79691329	81486729	83302129	85137529	86992929	88868329	90763729
28	79709184	81504784	83320384	85155984	87011584	88887184	90782784
29	79727041	81522841	83338641	85174441	87030241	88906041	90801841
30	79744900	81540900	83356900	85192900	87048900	88924900	90820900
31	79762761	81558961	83375161	85211361	87067561	88943761	90839961
32	79780624	81577024	83393424	85229824	67086224	88962624	90859024
33	79798489	81595089	83411689	85248289	87104889	88981489	90878089
34	79816356	81613156	83429956	85266756	87123556	89000356	90897156
35	79834225	81631225	83448225	85285225	87142225	89019225	90916225
36	79852096	81649296	83466496	85303696	87160896	89038096	90935296
37	79869969	81667369	83484769	85322169	87179569	89056969	90954369
38	79887844	81685444	83503044	85340644	87198244	89075844	90973444
39	79905721	81703521	83521321	85359121	87216921	89094721	90992521
40	79923600	81721600	83539600	85377600	87235600	89113600	91011600
41	79941481	81739681	83557881	85396081	87254281	89132481	91030681
42	79959364	81757764	83576164	85414564	87272964	89151364	91049764
43	79977249	81775849	83594449	85433049	87291649	89170249	91068849
44	79995136	81793936	83612736	85451536	87310336	89189136	91087936
45	80013025	81812025	83631025	85470025	87329025	89208025	91107025
46	80030916	81830116	83649316	85488516	87347716	89226916	91126116
47	80048809	81848209	83667609	85507009	87366409	89245809	91145209
48	80066704	81866304	83685904	85525504	87385104	89264704	91164304
49	80084601	81884401	83704201	85544001	87403801	89283601	91183401

	89..	90..	91..	92..	93..	94..	95..
50	80102500	81902500	83722500	85562500	87422500	89302500	91202500
51	80120401	81920601	83740801	85581001	87441201	89321401	91221601
52	80138304	81938704	83759104	85599504	87459904	89340304	91240704
53	80156209	81956809	83777409	85618009	87478609	89359209	91259809
54	80174116	81974916	83795716	85636516	87497316	89378116	91278916
55	80192025	81993025	83814025	85655025	87516025	89397025	91298025
56	80209936	82011136	83832336	85673536	87534736	89415936	91317136
57	80227849	82029249	83850649	85692049	87553449	89434849	91336249
58	80245764	82047364	83868964	85710564	87572164	89453764	91355364
59	80263681	82065481	83887281	85729081	87590881	89472681	91374481
60	80281600	82083600	83905600	85747600	87609600	89491600	91393600
61	80299521	82101721	83923921	85766121	87628321	89510521	91412721
62	80317444	82119844	83942244	85784644	87647044	89529444	91431844
63	80335369	82137969	83960569	85803169	87665769	89548369	91450969
64	80353296	82156096	83978896	85821696	87684496	89567296	91470096
65	80371225	82174225	83997225	85840225	87703225	89586225	91489225
66	80389156	82192356	84015556	85858756	87721956	89605156	91508356
67	80407089	82210489	84033889	85877289	87740689	89624089	91527489
68	80425024	82228624	84052224	85895824	87759424	89643024	91546624
69	80442961	82246761	84070561	85914361	87778161	89661961	91565761
70	80460900	82264900	84088900	85932900	87796900	89680900	91584900
71	80478841	82283041	84107241	85951441	87815641	89699841	91604041
72	80496784	82301184	84125584	85969984	87834384	89718784	91623184
73	80514729	82319329	84143929	85988529	87853129	89737729	91642329
74	80532676	82337476	84162276	86007076	87871876	89756676	91661476
75	80550625	82355625	84180625	86025625	87890625	89775625	91680625
76	80568576	82373776	84198976	86044176	87909376	89794576	91699776
77	80586529	82391929	84217329	86062729	87928129	89813529	91718929
78	80604484	82410084	84235684	86081284	87946884	89832484	91738084
79	80622441	82428241	84254041	86099841	87965641	89851441	91757241
80	80640400	82446400	84272400	86118400	87984400	89870400	91776400
81	80658361	82464561	84290761	86136961	88003161	89889361	91795561
82	80676324	82482724	84309124	86155524	88021924	89908324	91814724
83	80694289	82500889	84327489	86174089	88040689	89927289	91833889
84	80712256	82519056	84345856	86192656	88059456	89946256	91853056
85	80730225	82537225	84364225	86211225	88078225	89965225	91872225
86	80748196	82555396	84382596	86229796	88096996	89984196	91891396
87	80766169	82573569	84400969	86248369	88115769	90003169	91910569
88	80784144	82591744	84419344	86266944	88134544	90022144	91929744
89	80802121	82609921	84437721	86285521	88153321	90041121	91948921
90	80820100	82628100	84456100	86304100	88172100	90060100	91968100
91	80838081	82646281	84474481	86322681	88190881	90079081	91987281
92	80856064	82664464	84492864	86341264	88209664	90098064	92006464
93	80874049	82682649	84511249	86359849	88228449	90117049	92025649
94	80892036	82700836	84529636	86378436	88247236	90136036	92044836
95	80910025	82719025	84548025	86397025	88266025	90155025	92064025
96	80928016	82737216	84566416	86415616	88284816	90174016	92083216
97	80946009	82755409	84584809	86434209	88303609	90193009	92102409
98	80964004	82773604	84603204	86452804	88322404	90212004	92121604
99	80982001	82791801	84621601	86471401	88341201	90231001	92140801

	96 . .	97 . .	98 . .	99 . .
00	92160000	94090000	96040000	98010000
01	92179201	94109401	96059601	98029801
02	92198404	94128804	96079204	98049604
03	92217609	94148209	96098809	98069409
04	92236816	94167616	96118416	98089216
05	92256025	94187025	96138025	98109025
06	92275236	94206436	96157636	98128836
07	92294449	94225849	96177249	98148649
08	92313664	94245264	96196864	98168464
09	92332881	94264681	96216481	98188281
10	92352100	94284100	96236100	98208100
11	92371321	94303521	96255721	98227921
12	92390544	94322944	96275344	98247744
13	92409769	94342369	96294969	98267569
14	92428996	94361796	96314596	98287396
15	92448225	94381225	96334225	98307225
16	92467456	94400656	96353856	98327056
17	92486689	94420089	96373489	98346889
18	92505924	94439524	96393124	98366724
19	92525161	94458961	96412761	98386561
20	92544400	94478400	96432400	98406400
21	92563641	94497841	96452041	98426241
22	92582884	94517284	96471684	98446084
23	92602129	94536729	96491329	98465929
24	92621376	94556176	96510976	98485776
25	92640625	94575625	96530625	98505625
26	92659876	94595076	96550276	98525476
27	92679129	94614529	96569929	98545329
28	92698384	94633984	96589584	98565184
29	92717641	94653441	96609241	98585041
30	92736900	94672900	96628900	98604900
31	92756161	94692361	96648561	98624761
32	92775424	94711824	96668224	98644624
33	92794689	94731289	96687889	98664489
34	92813956	94750756	96707556	98684356
35	92833225	94770225	96727225	98704225
36	92852496	94789696	96746896	98724096
37	92871769	94809169	96766569	98743969
38	92891044	94828644	96786244	98763844
39	92910321	94848121	96805921	98783721
40	92929600	94867600	96825600	98803600
41	92948881	94887081	96845281	98823481
42	92968164	94906564	96864964	98843364
43	92987449	94926049	96884649	98863249
44	93006736	94945536	96904336	98883136
45	93026025	94965025	96924025	98903025
46	93045316	94984516	96943716	98922916
47	93064609	95004009	96963409	98942809
48	93083904	95023504	96983104	98962704
49	93103201	95043001	97002801	98982601

IV PROBLEME.

4. *Pour trouver dans la Table la racine quarrée d'un nombre entier plus petit que* 100000000.

On le cherchera dans son rang parmi les quarrez. Et les deux nombres, qui lui répondront, l'un au haut de la page dans la même colomne, & l'autre au bord dans le même rang paralléle, étant écrits de suitte résoudront la question. Et si le nombre n'est pas au juste parmi les quarrez ; on se contentera de prendre celui qui vaut moins, & qui en approche le plus : & sa racine sera la racine approchée du quarré imparfait qu'on propose.

PREMIER EXEMPLE.

Pour trouver la racine quarrée du nombre *62821476*. On cherchera ce nombre en son rang parmi les quarrez de la Table, & l'ayant trouvé dans la page 465[e] sous 79 dans la même colomne, & vis-à-vis de 26 au même rang paralléle ; le nombre 7926 sera au juste sa racine quarrée. On trouvera de la même sorte, que la racine quarrée de 1940449 est 1393. Et que celle de 714025 est 845. Et que celle de 361 est 19. Et ainsi des autres.

SECOND EXEMPLE.

Et pour trouver la racine quarrée du nombre 62831476. On le cherchera dans son rang parmi les quarrez. Et parcequ'on ne peut l'y trouver au juste; on sçaura déja que ce n'est pas un quarré parfait. C'est pourquoi on se contentera de prendre le quarré 62821476 qui vaut moins, & qui en approche le plus. Et le côté 7926 de ce même quarré sera une racine approchée du quarré imparfait qu'on propose. De sorte que la juste valeur de $\sqrt{62831476}$ sera nécessairement entre 7926 & 7927. On trouvera de la même sorte que la juste valeur de $\sqrt{382}$ est entre 19 & 20. Et que celle de $\sqrt{1943235}$ est entre 1393 & 1394. Et que celle de $\sqrt{714825}$ est entre 845 & 846. Et que celle de $\sqrt{92727641}$ est entre 98 & 99 ; parcequ'on trouve que la racine quarrée de 92727641 est 9629, & que celle

	96..	97..	98..	99..
50	93122500	95062500	97022500	99002500
51	93141801	95082001	97042201	99022401
52	93161104	95101504	97061904	99042304
53	93180409	95121009	97081609	99062209
54	93199716	95140516	97101316	99082116
55	93219025	95160025	97121025	99102025
56	93238336	95179536	97140736	99121936
57	93257649	95199049	97160449	99141849
58	93276964	95218564	97180164	99161764
59	93296281	95238081	97199881	99181681
60	93315600	95257600	97219600	99201600
61	93334921	95277121	97239321	99221521
62	93354244	95296644	97259044	99241444
63	93373569	95316169	97278769	99261369
64	93392896	95335696	97298496	99281296
65	93412225	95355225	97328225	99301225
66	93431556	95374756	97337956	99321156
67	93450889	95394289	97357689	99341089
68	93470224	95413824	97377424	99361024
69	93489561	95433361	97397161	99380961
70	93508900	95452900	97416900	99400900
71	93528241	95472441	97436641	99420841
72	93547584	95491984	97456384	99440784
73	93566929	95511529	97476129	99460729
74	93586276	95531076	97495876	99480676
75	93605625	95550625	97515625	99500625
76	93624976	95570176	97535376	99520576
77	93644329	95589729	97555129	99540529
78	93663684	95609284	97574884	99560484
79	93683041	95628841	97594641	99580441
80	93702400	95648400	97614400	99600400
81	93721761	95667961	97634161	99620361
82	93741124	95687524	97653924	99640324
83	93760489	95707089	97673689	99660289
84	93779856	95726656	97693456	99680256
85	93799225	95746225	97713225	99700225
86	93818596	95765796	97732996	99720196
87	93837969	95785369	97752769	99740169
88	93857344	95804944	97772544	99760144
89	93876721	95824521	97792321	99780121
90	93896100	95844100	97812100	99800100
91	93915481	95863681	97831881	99820081
92	93934864	95883264	97851664	99840064
93	93954249	95902849	97871449	99860049
94	93973636	95922436	97891236	99880036
95	93993025	95942025	97911025	99900025
96	94012416	95961616	97930816	99920016
97	94031809	95981209	97950609	99940009
98	94051204	96000804	97970404	99960004
99	94070601	96020401	97990201	99980001

de 9629 eſt entre 98 & 99. On trouvera de la même ſorte les valeurs approchées des nombres renfermez ſous le ſigne ✓, ou ſous le ſigne ✓✓.

V PROBLEME.

5. *Et pour faciliter avec le ſecours de la Table l'extraction des racines quarrées, lorſque les nombres ont plus de 8 chiffres, ou paſſent au delà de* 100000000.

On couppera, ſelon la coûtume, le nombre qu'on propoſe par diverſes tranches de deux chiffres chacune, en commençant à droitte, & conſidérant le nombre entier compris dans les quatre premiéres tranches, on prendra dans la Table le quarré qui en approche plus, & qui n'eſt pas plus grand; & le côté de ce même quarré fournira déja les quatre premiers chiffres du côté que l'on cherche. Et le reſte ſera cherché enſuitte par les régles ordinaires de l'extraction des racines quarrées.

Exemples.

Pour trouver la racine quarrée de 896822809. On le tranchera de deux en deux en commençant à droitte; ou parcequ'il y a ſeulement neuf chiffres, on ſe contentera de trancher les deux 09 du premier & du ſecond rang. Et on cherchera enſuitte dans la Table la racine quarrée 2994 de la tranche entiére 8968228 ou de 8964036 qui en approche plus. Et continuant le reſte ſelon les regles ordinaires de l'extraction des racines quarrées, on trouvera que la racine entiére de tout le nombre qu'on propoſe eſt 29947. Et on trouvera de la même ſorte que la racine quarrée d:8969226436 eſt 94706. Et que celle de 4107082814748676 eſt 64086526. Et que la quarrée d. 24432378433396 eſt 1563086.

Quarrez.	*Côtez.*
8968228|09.	2994|7.
89692264|36.	9470|6.

41070828|14|74|86|76.	6408|6526
2443237|84|33|96.	1563|086

6. TOut nombre quarré finit par l'un des six caractéres 0. 1. 4. 5. 6. 9. Et nul ne finit par aucun des quatre 2. 3. 7. 8. Et chacun finit aussi en l'une de ces vint-deux différentes maniéres. 00. 01. 04. 09. 16. 21. 24. 25. 29. 36. 41. 44. 49. 56. 61. 64. 69. 76. 81. 84. 89. 96.

Ou en l'une des cent cinquante-neuf que l'on expose ici.

000	044	100	161	216	276	329	396	444	500	561	609	664	724	784	844	900	961
001	049	104	164	224	281	336	400	449	504	564	616	676	729	796	849	904	964
004	056	116	169	225	284	344	401	456	516	569	624	681	736	801	856	916	969
009	064	121	176	236	289	356	404	464	521	576	625	684	744	804	864	921	976
016	076	124	184	241	296	361	409	476	524	584	636	689	756	809	876	924	984
024	081	129	196	244	304	364	416	481	529	596	641	696	761	816	881	929	996
025	084	136	201	249	316	369	424	484	536	600	644	704	764	824	884	936	
036	089	144	204	256	321	376	436	489	544	601	649	716	769	836	889	944	
041	096	156	209	264	324	384	441	496	556	604	656	721	776	841	896	956	

Et chacun finit encore en l'une de ces 1044 maniéres différentes.

0000	0304	0641	0969	1296	1641	2001	2321	2644	2976	3316	3649	4004	4324
0001	0321	0644	0976	1316	1649	2004	2324	2649	2996	3321	3664	4009	4329
0004	0324	0649	0996	1321	1664	2009	2329	2656	3001	3329	3681	4016	4336
0009	0329	0656	1001	1329	1681	2016	2336	2676	3009	3344	3684	4025	4356
0016	0336	0676	1009	1344	1684	2025	2356	2681	3024	3361	3689	4036	4361
0025	0356	0681	1024	1361	1689	2036	2361	2689	3025	3364	3696	4041	4369
0036	0361	0689	1025	1364	1696	2041	2369	2704	3041	3369	3716	4049	4384
0041	0369	0704	1041	1369	1716	2049	2384	2721	3044	3376	3721	4064	4400
0049	0384	0721	1044	1376	1721	2064	2400	2724	3049	3396	3729	4081	4401
0064	0400	0724	1049	1396	1729	2081	2401	2729	3056	3401	3744	4084	4404
0081	0401	0729	1056	1401	1744	2084	2404	2736	3076	3409	3761	4089	4409
0084	0404	0736	1076	1409	1761	2089	2409	2756	3081	3424	3764	4096	4416
0089	0409	0756	1081	1424	1764	2096	2416	2761	3089	3441	3769	4100	4436
0096	0416	0761	1089	1441	1769	2100	2436	2769	3104	3444	3776	4116	4441
0100	0436	0769	1104	1444	1776	2116	2441	2784	3121	3449	3796	4121	4449
0116	0441	0784	1121	1449	1796	2121	2449	2801	3124	3456	3801	4129	4464
0121	0449	0801	1124	1456	1801	2129	2464	2804	3129	3476	3809	4144	4481
0129	0464	0804	1129	1476	1809	2144	2481	2809	3136	3481	3824	4161	4484
0144	0481	0809	1136	1481	1824	2161	2484	2816	3156	3489	3841	4164	4489
0161	0484	0816	1156	1489	1841	2164	2489	2836	3161	3504	3844	4169	4496
0164	0489	0836	1161	1504	1844	2169	2496	2841	3169	3521	3849	4176	4516
0169	0496	0841	1169	1521	1849	2176	2500	2849	3184	3524	3856	4196	4521
0176	0516	0849	1184	1524	1856	2196	2516	2864	3201	3529	3876	4201	4529
0196	0521	0864	1201	1529	1876	2201	2521	2881	3204	3536	3881	4209	4544
0201	0529	0881	1204	1536	1881	2209	2529	2884	3209	3556	3889	4224	4561
0209	0544	0884	1209	1556	1889	2224	2544	2889	3216	3561	3904	4225	4564
0224	0561	0889	1216	1561	1904	2225	2561	2896	3225	3569	3921	4241	4569
0225	0564	0896	1225	1569	1921	2241	2564	2900	3236	3584	3924	4244	4576
0241	0569	0900	1236	1584	1924	2244	2569	2916	3241	3600	3929	4249	4596
0244	0576	0916	1241	1600	1929	2249	2576	2921	3249	3601	3936	4256	4601
0249	0596	0921	1249	1601	1936	2256	2596	2929	3264	3604	3956	4276	4609
0256	0601	0929	1264	1604	1956	2276	2601	2944	3281	3609	3961	4281	4624
0276	0609	0944	1281	1609	1961	2281	2609	2961	3284	3616	3969	4289	4641
0281	0624	0961	1284	1616	1969	2289	2624	2964	3289	3636	3984	4304	4644
0289	0625	0964	1289	1636	1984	2304	2641	2969	3296	3641	4001	4321	4649

4656	5044	5441	5809	6196	6569	6964	7344	7729	8116	8489	8889	9264	9649
4676	5049	5444	5824	6201	6576	6969	7361	7744	8121	8496	8896	9281	9664
4681	5056	5449	5841	6209	6596	6976	7364	7761	8129	8516	8900	9284	9681
4689	5076	5456	5844	6224	6601	6996	7369	7764	8144	8521	8916	9289	9684
4704	5081	5476	9849	6225	6609	7001	7376	7769	8161	8529	8921	9296	9689
4721	5089	5481	5856	6241	6624	7009	7396	7776	8164	8544	8929	9316	9696
4724	5104	5489	5876	6244	6641	7024	7401	7796	8169	8561	8944	9321	9716
4729	5121	5504	5881	6249	6644	7025	7409	7801	8176	8564	8961	9329	9721
4736	5124	5521	5889	6256	6649	7041	7424	7809	8196	8569	8964	9344	9729
4756	5129	5524	5904	6276	6656	7044	7441	7824	8201	8576	8969	9361	9744
4761	5136	5529	5921	6281	6676	7049	7444	7841	8209	8596	8976	9364	9761
4769	5156	5536	5924	6289	6681	7056	7449	7844	8224	8601	8996	9369	9764
4784	5161	5556	5929	6304	6689	7076	7456	7849	8225	8609	9001	9376	9769
4801	5169	5561	5936	6321	6704	7081	7476	7856	8241	8624	9009	9396	9776
4804	5184	5569	5956	6324	6721	7089	7481	7876	8244	8641	9024	9401	9796
4809	5201	5584	5961	6329	6724	7104	7489	7881	8249	8644	9025	9409	9801
4816	5204	5600	5969	6336	6729	7121	7504	7889	8256	8649	9041	9424	9809
4836	5209	5601	5984	6356	6736	7124	7521	7904	8276	8656	9044	9441	9824
4841	5216	5604	6001	6361	6756	7129	7524	7921	8281	8676	9049	9444	9841
4849	5225	5609	6004	6369	6761	7136	7529	7924	8289	8681	9056	9449	9844
4864	5236	5616	6009	6384	6769	7156	7536	7929	8304	8689	9076	9456	9849
4881	5241	5625	6016	6400	6784	7161	7556	7936	8321	8704	9081	9476	9856
4884	5249	5636	6025	6401	6801	7169	7561	7956	8324	8721	9089	9481	9876
4889	5264	5641	6036	6404	6804	7184	7569	7961	8329	8724	9104	9489	9881
4896	5281	5649	6041	6409	6809	7201	7584	7969	8336	8729	9121	9504	9889
4900	5284	5664	6049	6416	6816	7204	7600	7984	8356	8736	9124	9521	9904
4916	5289	5681	6064	6436	6836	7209	7601	8001	8361	8756	9129	9524	9921
4921	5296	5684	6081	6441	6841	7216	7604	8004	8369	8761	9136	9529	9924
4929	5316	5689	6084	6449	6849	7225	7609	8009	8384	8769	9156	9536	9929
4944	5321	5696	6089	6464	6864	7236	7616	8016	8400	8784	9161	9556	9936
4961	5329	5716	6096	6481	6881	7241	7636	8025	8401	8801	9169	9561	9956
4964	5344	5721	6100	6484	6884	7249	7641	8036	8404	8804	9184	9569	9961
4969	5361	5729	6116	6489	6889	7264	7649	8041	8409	8809	9201	9584	9969
4976	5364	5744	6121	6496	6896	7281	7664	8049	8416	8816	9204	9600	9984
4996	5369	5761	6129	6516	6900	7284	7681	8064	8436	8836	9209	9601	
5001	5376	5764	6144	6521	6916	7289	7684	8081	8441	8841	9216	9604	
5009	5396	5769	6161	6529	6921	7296	7689	8084	8449	8849	9225	9609	
5024	5401	5776	6164	6544	6929	7316	7696	8089	8464	8864	9236	9616	
5025	5409	5796	6169	6561	6944	7321	7716	8096	8481	8881	9241	9636	
5041	5424	5801	6176	6564	6961	7329	7721	8100	8484	8884	9249	9641	

TABLE

DES CUBES PARFAITS

DE TOUS LES NOMBRES NATURELS

depuis 1 jusques à 1000.

ON expliquera sur la fin de la Table la maniére de la former, & de la continuer avec facilité jusques où l'on voudra. Et on parlera aussi de ses principaux usages.

	0..	1..	2..	3..	4..	5..	6..
00	0	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000	216000000
01	1	1030301	8120601	27270901	64481201	125751501	217081801
02	8	1061208	8242408	27543608	64964808	126506008	218767208
03	27	1092727	8365427	27818127	65450827	127263527	219256227
04	64	1124864	8489664	28094464	65939264	128024064	220348864
05	125	1157625	8615125	28372625	66430125	128787625	221445125
06	216	1191016	8741816	28652616	66923416	129554216	222545016
07	343	1225043	8869743	28934443	67419143	130323843	223648543
08	512	1259712	8998912	29218112	67917312	131096512	224755712
09	729	1295029	9129329	29503629	68417929	131872229	225866529
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000	132651000	226981000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531	133432831	228099131
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528	134217728	229220928
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997	135005697	230346397
14	2744	1481544	9800344	30956144	70957944	135796744	231475544
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375	136590875	232608375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296	137388096	233744896
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713	138188413	234885113
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632	138991832	236029032
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059	139798359	237176659
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000	140608000	238328000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461	141420761	239483061
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448	142236648	240641848
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967	143055667	241804367
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024	143877824	242970624
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625	144703125	244140625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776	145531576	245314376
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483	146363183	246491883
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752	147197952	247673152
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589	148035889	248858189
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000	148877000	250047000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991	149721291	251239591
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568	150568768	252435968
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737	151419437	253636137
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504	152273304	254840104
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875	153130375	256047875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856	153990656	257259456
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453	154854153	258474853
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672	155720872	259694072
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519	156590819	260917119
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000	157464000	262144000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121	158340421	263374721
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888	159220088	264609288
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307	160103007	265847707
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384	160989184	267089984
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125	161878625	268336125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536	162771336	269586136
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623	163667323	270840023
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392	164566592	272097792
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849	165469149	273359449

	0..	1..	2..	3..	4..	5..	6..
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000	166375000	274625000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851	167284151	275894451
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408	168196608	277167808
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677	169112377	278445077
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664	170031464	279726264
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375	170953875	281011375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816	171879616	282300416
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993	172808693	283593393
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912	173741112	284890312
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579	174676879	286191179
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000	175616000	287496000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181	176558481	288804781
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128	177504328	290117528
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847	178453547	291434247
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344	179406144	292754944
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625	180362125	294079625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696	181321496	295408296
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563	182284263	296740963
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232	183250432	298077632
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709	184220009	299418309
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000	185193000	300763000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111	186169411	302111711
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048	187149248	303464448
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817	188132517	304821217
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424	189119224	306182024
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875	190109375	307546875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176	191102976	308915776
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333	192100033	310288733
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352	193100552	311665752
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239	194104539	313046839
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000	195112000	314432000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641	196122941	315821241
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168	197137368	317214568
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587	198155287	318611987
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904	199176704	320013504
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125	200201625	321419125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256	201230056	322828856
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303	202262003	324242703
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272	203297472	325660672
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169	204336469	327082769
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000	205379000	328509000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771	206425071	329939371
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488	207474688	331373888
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157	208527857	332812557
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784	209584584	334255384
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375	210644875	335702375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936	211708736	337153536
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473	212776173	338608873
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992	213847192	340068392
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499	214921799	341532099

	7..	8..	9..		7..	8..	9..
00	343000000	512000000	729000000	50	421875000	614125000	857375000
01	344472101	513922401	731432701	51	423564751	616295051	860085351
02	345948408	515849608	733870808	52	425259008	618470208	862801408
03	347428927	517781627	736314327	53	426957777	620650477	865523177
04	348913664	519718464	738763264	54	428661064	622835864	868250664
05	350402625	521660125	741217625	55	430368875	625026375	870983875
06	351895816	523606616	743677416	56	432081216	627222016	873722816
07	353393243	525557943	746142643	57	433798093	629422793	876467493
08	354894912	527514112	748613312	58	435519512	631628712	879217912
09	356400829	529475129	751089429	59	437245479	633839779	881974079
10	357911000	531441000	753571000	60	438976000	636056000	884736000
11	359425431	533411731	756058031	61	440711081	638277381	887503681
12	360944128	535387328	758550528	62	442450728	640503928	890277128
13	362467097	537367797	761048497	63	444194947	642735647	893056347
14	363994344	539353144	763551944	64	445943744	644972544	895841344
15	365525875	541343375	766060875	65	447697125	647214625	898632125
16	367061696	543338496	768575296	66	449455096	649461896	901428696
17	368601813	545338513	771095213	67	451217663	651714363	904231063
18	370146232	547343432	773620632	68	452984832	653972032	907039232
19	371694959	549353259	776151559	69	454756609	656234909	909853209
20	373248000	551368000	778688000	70	456533000	658503000	912673000
21	374805361	553387661	781229961	71	458314011	660776311	915498611
22	376367048	555412248	783777448	72	460099648	663054848	918330048
23	377933067	557441767	786330467	73	461889917	665338617	921167317
24	379503424	559476224	788889024	74	463684824	667627624	924010424
25	381078125	561515625	791453125	75	465484375	669921875	926859375
26	382657176	563559976	794022776	76	467288576	672221376	929714176
27	384240583	565609283	796597983	77	469097433	674526133	932574833
28	385828352	567663552	799178752	78	470910952	676836152	935441352
29	387420489	569722789	801765089	79	472729139	679151439	938313739
30	389017000	571787000	804357000	80	474552000	681472000	941192000
31	390617891	573856191	806954491	81	476379541	683797841	944076141
32	392223168	575930368	809557568	82	478211768	686128968	946966168
33	393832837	578009537	812166237	83	480048687	688465387	949862087
34	395446904	580093704	814780504	84	481860304	690807104	952763904
35	397065375	582182875	817400375	85	483736625	693154125	955671625
36	398688256	584277056	820025856	86	485587656	695506456	958585256
37	400415553	586376253	822656953	87	487443403	697864103	961504803
38	401947272	588480472	825293672	88	489303872	700227072	964430272
39	403583419	590589719	827936019	89	491169069	702595369	967361669
40	405224000	592704000	830584000	90	493039000	704969000	970299000
41	406869021	594823321	833237621	91	494913671	707347971	973242271
42	408518488	596947688	835896888	92	496793088	709732288	976191488
43	410172407	599077107	838561807	93	498677257	712121957	979146657
44	411830784	601211584	841232384	94	500566184	714516984	982107784
45	413493625	603351125	843908625	95	502459875	716917375	985074875
46	415160936	605495736	846590536	96	504358336	719323136	988047936
47	416832723	607645423	849278123	97	506261573	721734273	991026973
48	418508992	609800192	851971392	98	508169592	724150792	994011992
49	420189749	611960049	854670349	99	510082399	726572699	997002999

VI PROBLEME.

7. P*Our trouver avec facilité les cubes successifs des nombres naturels.*

Lorsqu'on aura trouvé le cube a^3 de tel nombre a qu'on voudra, on luy ajoûtera trois quarrez aa du même côté a, plus 3 fois le côté a, plus encore l'unité. Et la somme $a^3 + 3aa + 3a + 1$ fournira le cube du nombre $a + 1$, qui suit de plus prés le côté a du cube connu a^3.

Par éxemple le premier cube est 1. Et si on luy ajoûte 3 fois le quarré 1 du côté cubique 1, plus 4 qui contient 3 fois le même côté 1 plus le cube 1 d'une nouvelle unité; la somme entiére 8 sera le cube de 2 qui suit 1 de plus prés. Et si on ajoûte au cube 8 de la même sorte 3 fois le quarré 4 du côté cubique 2, plus le nombre 7 qui contient 3 fois ce même côté 2 plus un cube 1 de l'unité nouvellement ajoûtée; la somme fournira le cube 27 du nombre 3 qui suit 2 de plus prés. Et le cube 27 plus 3 fois le quarré 9 de son côté cubique 3, plus 10 qui contient 3 fois le même côté 3 plus un cube 1 d'une nouvelle unité, donnera le cube 64 du nombre 4 qui suit 3 de plus prés. Et ainsi du reste, en se servant pour une plus grande facilité des quarrez successifs de la Table précédente, & de la suitte des nombres, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, &c; qui croissent de trois en trois.

Si on vouloit pousser la Table jusques au cube de 10000; il faudroit premiérement 16 pages semblables à celle-ci, & qui auroient chacune 250 cubes ou 5 colomnes; ce qui s'étendroit déja jusques au cube de 5000. Et il faudroit ensuitte 25 pages de 4 colomnes ou de 200 cubes chacune, pour venir jusques à celuy de 10000. De sorte que la Table entiére ne comprendroit que 44 pages ou 5 feüilles & demie.

Pour la Table.

Côtez	Cubes
1	$1 \propto 1z^3$
	$+ 3 \propto 3zz$
	$+ 4 \propto 3z + 1$
2	$8 \propto 1y^3$
	$+ 12 \propto 3yy$
	$+ 7 \propto 3y + 1$
3	$27 \propto 1x^3$
	$+ 27 \propto 3xx$
	$+ 10 \propto 3x + 1$
4	$64 \propto 1v^3$
	$+ 48 \propto 3vv$
	$+ 13 \propto 3v + 1$
5	$125 \propto 1e^3$
&c.	

Pour la continuer.

Côtez	Cubes
999	$997002999 \propto 1a^3$
	$+ 2994003 \propto 3aa$
	$+ 2998 \propto 3a + 1$
1000	$1000000000 \propto 1b^3$
	$+ 3000000 \propto 3bb$
	$+ 3001 \propto 3b + 1$
1001	$1003003001 \propto 1c^3$
	$+ 3006003 \propto 3cc$
	$+ 3004 \propto 3c + 1$
1002	$1006012008 \propto 1d^3$
	$+ 3012012 \propto 3dd$
	$+ 3007 \propto 3d + 1$
1003	$1009027027 \propto 1e^3$
&c.	

VII PROBLEME.

8. P*Our trouver dans la Table le cube parfait d'un nombre entier moindre que* 1000, *ou la racine cubique d'un nombre entier moindre* que 1000000000.

On suivra les régles qu'on a déja prescrites au second problême & dans le quatriéme, pour trouver le quarré d'un nombre plus petit que 10000, ou la racine quarrée d'un plus petit que 100000000.

Et on pourra encore imiter les régles du problême troisiéme & celles du quatriéme, lorsque le nombre proposé sera plus grand que ceux dont il s'agit ici.

VIII PROBLEME.

9. P*Our approcher de la juste valeur des nombres incommensurables renfermez sous le signe radical* √ *ou* √C.

On leur ajoûtera plusieurs tranches de deux ou de trois zéro chacune. Et le reste s'achêvera ensuitte comme au problême quatriéme ou cinquiéme.

Premier exemple.

Pour approcher de la juste valeur du nombre incommensurable $\sqrt{5}$. On ajoûtera au nombre 5 trois tranches de deux zéro chacune. Et cherchant dans la Table la racine approchée de 5000000, on trouvera parmi les quarrez que 4999696 est celuy qui en approche le plus. Et ainsi la racine quarrée 2236 de ce même nombre est une racine approchée de 5000000. Et par conséquent la juste valeur de $\sqrt{5}$ ou de $\sqrt{\frac{5000000}{1000000}}$ est entre $\frac{2236}{1000}$ & $\frac{2237}{1000}$. Et il ne s'en manque pas $\frac{1}{1000}$.

On trouvera de la même sorte que la juste valeur de $\sqrt{30}$ ou de $\sqrt{\frac{30000000}{1000000}}$ est entre $\frac{5478}{1000}$ & $\frac{5479}{1000}$. Et ainsi des autres incommensurables, où il n'y aura que le signe $\sqrt{}$.

Et s'ils avoient le signe radical $\sqrt{}\sqrt{}$, comme s'il falloit trouver une racine approchée de $\sqrt{}\sqrt{30}$. On chercheroit déja la racine approchée $\frac{54780}{10000}$ de $\sqrt{30}$; & ensuitte une racine approchée $\frac{234}{100}$ de $\sqrt{\frac{54780}{10000}}$. Et la question seroit résoluë.

Second exemple.

Pour approcher de la juste valeur de $\sqrt{C.5}$. On ajoûtera au nombre 5 deux tranches de trois zéro chacune. Et cherchant dans la Table des cubes la racine cubique approchée de 5000000, on trouvera parmi eux que 4913000 est celuy qui en approche plus. Et ainsi la racine cubique 170 de ce même nombre est une racine cubique approchée de 5000000. D'où il s'ensuit que la juste valeur de $\sqrt{C.5}$ ou de $\sqrt{C.\frac{5000000}{1000000}}$ est entre $\frac{170}{100}$ & $\frac{171}{100}$. On trouvera de la même sorte que la juste valeur de $\sqrt{C.30}$ ou de $\sqrt{C.\frac{30000000}{1000000}}$ est entre $\frac{310}{100}$ & $\frac{311}{100}$. Et ainsi des autres.

TABLE
DES
NOMBRES SIMPLES
plus petits que 10000.

Cette Table des nombres premiers ou simples est d'un secours extraordinaire à ceux qui opérent beaucoup sur les nombres, ou qui sont souvent obligez d'user de l'Analyse. On ne sçauroit croire qu'en l'éprouvant soi-même, combien on peut abbréger par leur secours toutes les diverses régles des proportions, toutes les opérations qu'on fait sur les fractions, les divisions des égalitez composées, la formation des divers logarithmes, & la plusspart des supputations rudes & difficiles. Et il n'y a presque rien de si nécessaire & de si important, lorsqu'on veut former les résolutions les plus simples des questions, qu'on propose par nombres, ou d'une maniére abstraite & générale. La Table suivante comprend tous ceux de ces nombres simples qui se peuvent trouver parmi les naturels depuis 1 jusques à 10000. On en trouve au juste jusques à 1231.

1	233	547	877	1223	1583	1979	2347	2719	3137	3541	3929	4349
2	239	557	881	1229	1597	1987	2351	2729	3163	3547	3931	4357
3	241	563	883	1231	—	1993	2357	2731	3167	3557	3943	4363
5	251	569	887	1237	1601	1997	2371	2741	3169	3559	3947	4373
7	257	571	—	1249	1607	1999	2377	2749	3181	3571	3967	4391
11	263	577	907	1259	1609	—	2381	2753	3187	3581	3989	4397
13	269	587	911	1277	1613	2003	2383	2767	3191	3583	—	—
17	271	593	919	1279	1619	2011	2389	2777	—	3593	4001	4409
19	277	599	929	1283	1621	2017	2393	2789	3203	—	4003	4421
23	281	—	937	1289	1627	2027	2399	2791	3209	3607	4007	4423
29	283	601	941	1291	1637	2029	—	2797	3217	3613	4013	4441
31	293	607	947	1297	1657	2039	2411	—	3221	3617	4019	4447
37	—	613	953	—	1663	2053	2417	2801	3229	3623	4021	4451
41	307	617	967	1301	1667	2063	2423	2803	3251	3631	4027	4457
43	311	619	971	1303	1669	2069	2437	2819	3253	3637	4049	4463
47	313	631	977	1307	1693	2081	2441	2833	3257	3643	4051	4481
53	317	641	983	1319	1697	2083	2447	2837	3259	3659	4057	4483
59	331	643	991	1321	1699	2087	2459	2843	3271	3671	4073	4493
61	337	647	997	1327	—	2089	2467	2851	3299	3673	4079	—
67	347	653	—	1361	1709	2099	2473	2857	—	3677	4091	4507
71	349	659	1009	1367	1721	—	2477	2861	3301	3691	4093	4513
73	353	661	1013	1373	1723	2111	—	2879	3307	3697	4099	4517
79	359	673	1019	1381	1733	2113	2503	2887	3313	—	—	4519
83	367	677	1021	1399	1741	2129	2521	2897	3319	3701	4111	4523
89	373	683	1031	—	1747	2131	2531	—	3323	3709	4127	4547
97	379	691	1033	1409	1753	2137	2539	2903	3329	3719	4129	4549
—	383	—	1039	1423	1759	2141	2543	2909	3331	3727	4133	4561
101	389	701	1049	1427	1777	2143	2549	2917	3343	3733	4139	4567
103	397	709	1051	1429	1783	2153	2551	2927	3347	3739	4153	4583
107	—	719	1061	1433	1787	2161	2557	2939	3359	3761	4157	4591
109	401	727	1063	1439	1789	2279	2579	2953	3361	3767	4159	4597
113	409	733	1069	1447	—	—	2591	2957	3371	3769	4177	—
127	419	739	1087	1451	1801	2203	2593	2963	3373	3779	—	4603
131	421	743	1091	1453	1811	2207	—	2969	3389	3793	4201	4621
137	431	751	1093	1459	1823	2213	2609	2971	3391	3797	4211	4637
139	433	757	1097	1471	1831	2221	2617	2999	3407	—	4217	4639
149	439	761	—	1481	1847	2237	2621	—	3413	3803	4219	4643
151	443	769	1103	1483	1861	2239	2633	3001	3433	3821	4229	4649
157	449	773	1109	1487	1867	2243	2647	3011	3449	3823	4231	4651
163	457	787	1117	1489	1871	2251	2657	3019	3457	3833	4241	4657
167	461	797	1123	1493	1873	2267	2659	3023	3461	3847	4243	4663
173	463	—	1129	1499	1877	2269	2663	3037	3463	3851	4253	4673
179	467	809	1151	—	1879	2273	2671	3041	3467	3853	4259	4679
181	479	811	1153	1511	1889	2281	2677	3049	3469	3863	4261	4691
191	487	821	1163	1523	—	2287	2683	3061	3491	3877	4271	—
193	491	823	1171	1531	1901	2293	2687	3067	3499	3881	4273	4703
197	499	827	1181	1543	1907	2297	2689	3079	—	3889	4283	4721
199	—	829	1187	1549	1913	—	2693	3083	3511	—	4289	4723
—	503	839	1193	1553	1931	2309	2699	3089	3517	3907	4297	4729
211	509	853	—	1559	1933	2311	—	—	3527	3911	—	4733
223	521	857	1201	1567	1949	2333	2707	3109	3529	3917	4327	4751
227	523	859	1213	1571	1951	2339	2711	3119	3533	3919	4337	4759
229	541	863	1217	1579	1973	2341	2713	3121	3539	3923	4339	478

4787	5197	5639	6047	6451	6899	7333	7757	8231	8681	9109	9533
4789	—	5641	6053	6469	—	7349	7759	8233	8689	9127	9539
4793	5209	5647	6067	6473	6907	7351	7789	8237	8693	9133	9547
4799	5227	5651	6073	6481	6911	7369	7793	8243	8699	9137	9551
—	5231	5653	6079	6491	6917	7393	—	8263	—	9151	9587
4801	5233	5657	6089	—	6947	—	7817	8269	8707	9157	—
4813	5237	5659	6091	6521	6949	7411	7823	8273	8713	9161	9601
4817	5261	5669	—	6529	6959	7417	7829	8287	8719	9173	9613
4831	5273	5683	6101	6547	6961	7433	7841	8291	8731	9181	9619
4861	5279	5689	6113	6551	6967	7451	7853	8293	8737	9187	9623
4871	5281	5693	6121	6553	6971	7457	7867	8297	8741	9199	9629
4877	5297	—	6131	6563	6977	7459	7873	—	8747	—	9631
4889	—	5701	6133	6569	6983	7477	7877	8311	8753	9203	9643
—	5303	5711	6143	6571	6991	7481	7879	8317	8761	9209	9649
4903	5309	5717	6151	6577	6997	7487	7883	8329	8779	9221	9661
4909	5323	5737	6163	6581	❦	7489	—	8353	8783	9227	9677
4919	5333	5741	6173	6599	7001	7499	7901	8363	—	9239	9679
4931	5347	5743	6197	—	7013	—	7907	8369	8803	9241	9689
4933	5351	5749	6199	6607	7019	7507	7919	8377	8807	9257	9697
4937	5381	5779	—	6619	7027	7517	7927	8387	8819	9277	—
4943	5387	5783	6203	6637	7039	7523	7933	8389	8821	9281	9719
4951	5393	5791	6211	6653	7043	7529	7937	—	8831	9283	9721
4957	5399	—	6217	6659	7057	7537	7949	8419	8837	9293	9733
4967	—	5801	6221	6661	7069	7541	7951	8423	8839	—	9739
4969	5407	5807	6229	6673	7079	7547	7963	8429	8849	9311	9743
4973	5413	5813	6247	6679	—	7549	7993	8431	8861	9319	9749
4987	5417	5821	6257	6689	7103	7559	❦	8443	8863	9323	9767
4993	5419	5827	6263	6691	7109	7561	8009	8447	8867	9337	9769
4999	5431	5839	6269	—	7121	7573	8011	8461	8887	9341	9781
❦	5437	5843	6271	6701	7127	7577	8017	8467	8893	9343	9787
5003	5441	5849	6277	6703	7129	7583	8039	—	—	9349	9791
5009	5443	5851	6287	6709	7151	7589	8053	8501	8923	9371	—
5011	5449	5857	6299	6719	7159	7591	8059	8513	8929	9377	9803
5021	5471	5861	—	6733	7177	—	8069	8521	8933	9391	9811
5023	5477	5867	6301	6737	7187	7603	8081	8527	8941	9397	9817
5039	5479	5869	6311	6761	7193	7607	8087	8537	8951	—	9829
5051	5483	5879	6317	6763	—	7621	8089	8539	8963	9403	9833
5059	—	5881	6323	6779	7207	7639	8093	8543	8969	9413	9839
5077	5501	5897	6329	6781	7211	7643	—	8563	8971	9419	9851
5081	5503	—	6337	6791	7213	7649	8101	8573	8999	9421	9857
5087	5507	5903	6343	6793	7219	7669	8111	8581	❦	9431	9859
5099	5519	5923	6353	—	7229	7673	8117	8597	9001	9433	9871
—	5521	5927	6359	6803	7237	7681	8123	8599	9007	9437	9883
5101	5527	5939	6361	6823	7243	7687	8147	—	9011	9439	9887
5107	5531	5953	6367	6827	7247	7691	8161	8609	9013	9461	—
5113	5557	5981	6373	6829	7253	7699	8167	8623	9029	9463	9901
5119	5563	5987	6379	6833	7283	—	8171	8627	9041	9467	9907
5147	5569	❦	6389	6841	7297	7703	8179	8629	9043	9473	9923
5153	5573	6007	6397	6857	—	7717	8191	8641	9049	9479	9929
5167	5581	6011	—	6863	7307	7723	—	8647	9059	9491	9931
5171	5591	6029	6421	6869	7309	7727	8209	8663	9067	9497	9941
5179	—	6037	6427	6871	7321	7741	8219	8669	9091	—	9949
189	5623	6043	6449	6883	7331	7753	8221	8677	—	9511	9967
									9103	9521	9973

TABLE

TABLE

DES RESOLUTIONS NUMERIQUES CONTENUES DANS LES SIX LIVRES D'ANALYSE DE DIOPHANTE D'ALEXANDRIE,

Et des lieux où l'on en peut trouver la résolution dans ce volume.

Le premier chiffre marque l'ordre de la question dans celuy des Livres de Diophante, qui est en teste. Et le second marque l'ordre dans lequel on la trouve dans un Livre de cette seconde partie, qui est désigné par le troisiéme chiffre.

LIVRE I DE DIOPHANTE.

1.	3.	2.
2.	6.	2.
3.	8.	2.
4.	7.	2.
5.	18.	2.
6.	19.	2.
7.	12.	2.
8.	15.	2.
9.	13.	2.
10.	14.	2.
11.	16.	2.
12.	24.	2.
13.	25.	2.
14.	5.	2.
15.	23.	2.
16.	34.	2.
17.	35.	2.
18.	8.	1.
19.	8.	1.
20.	9.	1.
21.	9.	2.
22.	26.	2.
23.	27.	2.
24.	27.	2.
25.	28.	2.
26.	29.	2.
27.	30.	2.
28.	31.	2.
29.	45.	2.
30.	39.	2.
31.	46.	2.

3.	42.	5.
4.	43.	5.
5.	49.	6.
6.	50.	6.
7.	56.	3.
8.	45.	~~2~~ 7.
9.	46.	7.
10.	47 & 55.	7.
11.	47.	7.
12.	22.	3.
13.	23.	3.
14.	46.	5.
15.	46.	5.
16.	47.	5.
17.	48.	5.
18.	44.	6.
19.	46.	6.
20.	48.	6.
21.	41.	6.
22.	42.	6.

23.	43.	6.
24.	48.	7.
25.	49.	7.
26.	50.	7.
27.	51.	7.
28.	52.	7.
29.	53.	7.
30.	44.	5.
31.	45.	5.
32.	56.	5.
33.	18.	3.

LIVRE VI
DE DIOPHANTE.

1.	29.	7.
2.	30.	7.
3.	21.	7.
4.	22.	7.
5.	23.	7.
6.	3.	7.
7.	4.	7.
8.	6.	7.
9.	7.	7.
10.	15.	7.
11.	16.	7.
12.	24.	7.
13.	25.	7.
14.	26.	7.
15.	27.	7.
16.	28 & 57.	7.
17.	28.	7.
18.	54.	7.
19.	58.	7.
20.	59.	7.
21.	34.	7.
22.	35.	7.
23.	36.	7.
24.	37.	7.
25.	32.	7.
26.	33.	7.

TABLE

DES RESOLUTIONS ANALYTIQUES CONTENUES DANS LES CINQ LIVRES DES ZETETIQUES DE MONSIEUR VIETE,

Et des lieux où l'on en peut trouver la résolution dans ce volume.

LIVRE IV
DES ZETETIQUES.

LIVRE V
DES ZETETIQUES.

DES QUESTIONS ET DES RESOLUTIONS DE MONSIEUR DESCARTES.

IL y a dans ce volume quelques queſtions dont Monſieur Deſcartes a fourni la réſolution. Mais comme on prend un ſoin tout particulier de déveloper, d'éclaircir & de ſuivre ſa méthode par tout ; on ne s'arrête pas ici à citer les endroits de ſa Géométrie, où il propoſe ſes régles d'Analyſe., ou ceux des Auteurs qui rapportent quelques-unes de ſes réſolutions, ni les lieux où ces mêmes choſes ſont expliquées dans cette ſeconde partie. On ajoûte ſeulement quelque choſe en finiſſant ces Tables qui regarde ſa méthode en particulier des plus grandes & des moindres quantitez ; parce que la matiére eſt trop importante, pour la paſſer entiérement ſous ſilence, & qu'il n'y a rien dans l'Analyſe de ce ſçavant homme qui ne mérite d'être conſidéré.

DE LA METHODE
DE
MONSIEUR DESCARTES,

Pour trouver les plus grandes & les moindres quantitez.

IL eſt ſouvent néceſſaire, lorſque les queſtions ſont indéterminées, de reconnoître au juſte parmi les quantitez infinies qui peuvent ſatisfaire, qu'elles ſont les plus grandes ou les moindres de toutes. La méthode générale que Monſieur Deſcartes a donnée dans le ſecond Livre de ſa Géométrie pour déterminer ces ſortes de limites, eſt la plus belle & la meilleure, à mon avis, de toutes celles que l'on a inventées. Il eſt vrai qu'elle ne paroît pas d'abord, & que ce n'eſt qu'avec un peu d'attention qu'on en peut voir l'excellence & la ſimplicité, parce qu'il en parle aſſez légérement & comme en paſſant, & même ſans luy donner de nom.

Monſieur De Fermat, qui n'avoit pas, ce me ſemble, aſſez médité cet ouvrage, puis qu'il n'y avoit pas encore entrevû cette méthode, reprit l'Auteur de n'avoir rien dit ſur un ſujet de cette importance, & qui eſt d'un ſi grand ſecours en Géométrie. Il propoſa dans le même temps comme une invention nouvelle & tres-rare ſa méthode des plus grandes & des moindres quantitez. Divers Géométres qui étoient alors en réputation la receurent avec applaudiſſement, & ſur tout Meſſieurs Paſcal & de Roberval. Mais M^r^ Deſcartes l'éxaminant de prés, & avec une éxactitude un peu plus ſévére, n'en jugea pas comme eux. Elle luy parut défectueuſe & fauſſe en diverſes rencontres; & quoy qu'il enſeignât les moyens de la corriger & de la rendre juſte, il n'eſtima jamais qu'elle dût mériter ſon approbation, n'y trouvant de force pour conclure que celle qu'elle tire de la maniére imparfaite de prouver qui réduit à l'abſurde. Mais il négligea d'éclaircir la ſienne, & ne voulut pas même en fournir d'autres éxemples que ceux qui ſe trouvoient déja dans ſa Géométrie ; dédaignant par une fierté aſſez ordinaire aux eſprits nobles & du premier rang, de deſcendre juſques à l'explication des choſes trop faciles, lorſqu'on agiſſoit avec luy un peu trop cavaliérement, & qu'on ſe mêloit de le vouloir reprendre d'un air impérieux & par un eſprit ou d'oppoſition ou d'envie ; ou lors qu'on ſe vantoit de le pouvoir inſtruire ſur des ſujets qu'on ne ſçavoit qu'à demi, & qu'il pouvoit enſeigner en Maître même au plus ſçavans Géométres.

Ses réfléxions ne manquérent pas d'exciter des diſputes. Monſieur De Fermat & ceux qui s'étoient déclarez pour luy n'oubliérent rien de ce qui pouvoit leur donner gain de cauſe. Tout le bon droit à la vérité n'étoit pas pour eux, quoi que le parti fut gros & conſidérable. Mais comme le fort de la diſpute rouloit principalement ſur des équivoques, parce qu'ils étoient trop vivement preſſez ſur le point capital ; la facilité de leur plume & la vivacité d'une imagination délicate & brillante les ſoûtînt & augmenta de beaucoup le nombre de leurs approbateurs. Et le grand cœur de M[r] Deſcartes, qui mépriſoit trop certains petits ſecours, quoi que juſtes & légitimes, & même néceſſaires, ne voulant s'appliquer qu'à trancher les nœuds des difficultez principales, l'empêcha pour un temps de tirer tous les avantages qu'il étoit aſſuré d'emporter dans la ſuite. De ſorte même qu'il ſe trouve aujourd'huy beaucoup d'habiles gens qui balancent encore la victoire entre ces deux grands hommes. Je ſçai qu'il ne m'appartient pas d'en adjuger le prix, & qu'il m'eſt ſeulement permis de donner mon ſuffrage & ma voix à celuy qui m'en paroît plus digne. Mais j'oſe me flatter que ceux qui voudront juger équitablement & ſans préoccupation, ſans paſſion & ſans interêt, ne ſeront pas éloignez de mon ſentiment, lors qu'ils auront bien compris l'une & l'autre méthode, & qu'ils les auront ſoigneuſement comparées enſemble. Et pluſieurs, qui juſques ici n'en ont point connu ni employé d'autre que celle de M[r] De Fermat, la quitteront peut être ſans peine pour s'attacher uniquement à celle de M[r] Deſcartes, qui n'eſt jamais ſujette à l'erreur, & qui eſt plus courte. Je ne la propoſerai pas néanmoins tout-à-fait comme luy, parce qu'il eſt néceſſaire de ſuppléer à ce qu'il a voulu paſſer ſous ſilence, & d'y ajoûter même, comme l'a fait M[r] Hudde, un moyen tres-ſimple d'en faciliter la pratique.

REGLES.

Pour trouver les plus grandes quantitez, qui peuvent ſatisfaire à certaines ſuppoſitions.

On dénommera toutes les quantitez, & on exprimera comme à l'ordinaire toutes les ſuppoſitions. Et marquant alors par une autre lettre la plus grande qu'on veut découvrir, on prendra deux valeurs de cette-même lettre ; l'une qui ſe préſente d'abord, & qui exprime & renferme les

ſuppoſitions, & l'autre par le moyen d'une progreſſion arithmétique où zéro ſe rencontre, & dont les termes multiplient par ordre ceux de l'éga-
b. 18. 8. lité, comme on l'enſeigne au huitiéme[b] Livre. On aura ſoin de comparer enſuite ces deux valeurs d'une même inconnuë; ce qui fournira une nouvelle égalité dont la réſolution doit ſatisfaire à ce qu'on déſire. Les exemples éclairciront & fixeront ces régles.

PREMIER EXEMPLE QUESTION XXV.

Pour coupper en telle ſorte une ligne droite BD ſur un certain point C, que le plan des deux parties BC & CD ſoit le plus grand de tous ceux qu'on pourra former en couppant la droitte BD ſur tel autre point qu'on voudra.

Ayant nommé b toute la ligne entiére BD, & z ſa partie inconnuë BC; l'autre partie CD ſera $b - z$, & le plan des deux parties BC & CD ou de leurs valeurs z & $b - z$ ſera $bz - zz$ que j'égale à une lettre inconnuë y. Enſuite conſidérant l'égalité $bz - zz \propto y$, ou $zz - bz + y \propto 0$, je multiplie ſes termes par ceux d'une progreſſion arithmétique $\div\ 0 \cdot 1 \cdot 2$. D'où je tire une autre égalité $* - 1bz + 2y \propto 0$, ou $1y \propto \frac{1bz}{2} \propto bz - zz$.

Et $1bz \propto 2bz - 2zz$, qui fournit une valeur $z \propto \frac{1}{2}b$. De ſorte que la partie BC ou z doit être au juſte la moitié de la droite BD ou b. On eût auſſi trouvé la même choſe, ſi on eût voulu multiplier les termes de l'égalité $zz - bz + y \propto 0$ par ceux de la progreſſion arithmétique $\div\ 1 \cdot 0 \cdot -1$. On ne doit pas mettre 0 ſous y, de qui l'on cherche encore une valeur.

B C D

Suppoſitions. {BD $\propto b$. BC $\propto z$. CD $\propto b - z$. *Le plus grand plan* $1y \propto bz - zz$.

Réſolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} zz - bz + 1y \propto 0. \\ \underline{\ 0. \quad 1. \quad 2\ } \\ * - 1bz + 2y \propto 0.\ \textit{Et}\ 1y \propto \frac{bz}{2} \propto bz - zz. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} zz - bz + 1y \propto 0. \\ \underline{\ 1. \quad 0. -1.\ } \\ 1zz - 0 - 1y.\ \textit{Et}\ 1y \propto 1zz \propto bz - zz. \end{array}\right.$$

Donc BC $\propto 1z \propto \frac{1}{2}b \propto \frac{1}{2}$ BC $\propto$ CD.

AUTRE RESOLUTION.

Si on nomme $2d$ la droite BC, & $2x$ la différence des parties inconnuës BC & CD; l'une BC ſera $d + x$, & l'autre CD ſera $d - x$. Et leur plan y ſera $dd - xx$. Si donc les termes de l'égalité $xx\ * \begin{array}{l} -1dd \\ +1y \end{array} \propto 0$ ſont multipliez par ceux de la progreſſion arithmétique $\div\ 1 \cdot 0 \cdot -1$. Elle fournira celle-ci $1xx\ * \begin{array}{l} +1dd \\ -1y \end{array} \propto 0$. D'où l'on tirera une valeur $y \propto xx + dd$

$4dd \propto dd - xx$, & $2xx \propto o$. De sorte que la demie-différence x des deux parties BC & CD est nulle. Et on verra la même chose, si les termes de l'égalité $xx * \begin{matrix}-1dd\\+1y\end{matrix} \propto o$ sont multipliez par ceux de la progression arithmétique $\div$ o. 1. 2. Car les produits fourniront celle-ci $* * \begin{matrix}-2dd\\+2y\end{matrix} \propto o$, qui donne une valeur $y \propto dd \propto dd - xx$, ou $-xx \propto o$. Et ainsi les deux parties BC & CD sont chacune une juste moitié de la ligne entiére BD, puis qu'elles ne peuvent avoir aucune différence.

On peut facilement reconnoître & prouver la justesse de la résolution. Car si on couppe b ou BD sur Z en deux parties inégales BZ & ZD, & qu'on nomme $2v$ leur différence; la plus grande partie BZ vaudra $\frac{1}{2}b + v$, & la moindre ZD vaudra $\frac{1}{2}b - v$. Et leur plan $\frac{1}{4}bb - vv$ sera nécessairement plus petit que le plan $\frac{1}{4}bb$ des deux moitiez BC & CD ou de leurs valeurs $\frac{1}{2}b$ & $\frac{1}{2}b$. Et par conséquent l'observation des régles donne au juste la résolution de la question qu'on a proposée.

B C Z D

Suppositions. {BD $\propto 2d$. BC $\propto d + x$. CD $\propto d - x$. *Le plus grand plan* $1y \propto dd - xx$.

Résolution générale.

$$\left\{\begin{array}{l} xx * \begin{matrix}-dd\\+1y\end{matrix} \propto o \\ 1.\ o. -1 \\ \hline 1xx * \begin{matrix}+dd\\-1y\end{matrix} \propto o. \end{array}\right. \text{Et } y \propto dd + xx \propto dd - xx. \quad \left\{\begin{array}{l} xx * \begin{matrix}-dd\\+1y\end{matrix} \propto o \\ o.\ 1.\quad 2. \\ \hline * * \begin{matrix}-2dd\\+2y\end{matrix} \propto o. \end{array}\right. \text{Et } y \propto dd - xx.$$

Donc BC $\propto d + x \propto 1d \propto \frac{1}{2}$ BD $\propto$ CD $\propto d - x$.

SECOND EXEMPLE
ET QUESTION XVI.

59. *Pour coupper en telle sorte une ligne droite BD sur un point C, que le solide formé par un produit du quarré de la partie BC par l'autre partie CD soit le plus grand de tous ceux qui seroient formez de la même sorte, en couppant la droite BD sur tel autre point qu'on voudra.*

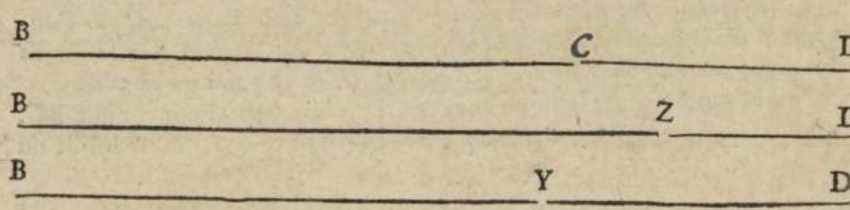
Ayant nommé b toute la ligne entiére BD, & z sa partie inconnuë BC, ou zz le quarré de BC; l'autre partie CD sera $b - z$, & le solide du

B C D

quarré zz de BC par CD ou par $b - z$ sera $bzz - z^3$, que j'égale à une lettre inconnuë y. Et considérant ensuite l'égalité $bzz - z^3 \propto y$, ou $z^3 - bzz * + 1y \propto 0$, je multiplie ses termes par ceux d'une progression arithmétique $\div$ 0. 1. 2. 3. Ce qui me donne une nouvelle égalité $- bzz * + 3y \propto 0$. D'où je tire une valeur $y \propto \frac{bzz}{3} \propto bzz - z^3$. Otant donc la fraction, l'égalité sera $bzz \propto 3bzz - 3z^3$, ou $2bzz - 3z^3 \propto 0$, qui fournit enfin une valeur $z \propto \frac{2}{3}b$.

Et j'aurois aussi trouvé la même chose, si j'eusse voulu multiplier les termes de l'égalité $z^3 - bzz * + 1y \propto 0$ par ceux de la progression arithmétique $- 1.\ 0.\ 1.\ 2.$ qui fait évanoüir le second terme $- bzz$. Car j'aurois eü l'égalité $- 1z^3 * * + 2y \propto 0$, ou la valeur $y \propto \frac{1z^3}{2} \propto bzz - z^3$. Et $1z^3 \propto 2bzz - 2z^3$, ou $3z^3 \propto 2bzz$. Et $z \propto \frac{2}{3}b$. De sorte que la partie BC vaut au juste les deux tiers de la ligne entiére BD. Et on trouveroit toûjours la même chose, si on dénommoit les grandeurs d'une autre maniére. Les termes évanoüis dans les égalitez doivent être contez & considérez, quand on dispose par ordre sous l'égalité les termes d'une proportion arithmétique, comme on peut l'observer ici.

On peut facilement reconnoître & prouver la justesse de la résolution. Car si on couppe la ligne droite BD ou b en deux autres parties BZ & ZD, dont l'une ait plus que ses 2 tiers, & l'autre moins par conséquent que son autre tiers; si l'excez sur les 2 tiers de b est v; la plus grande partie BZ est $\frac{2}{3}b + v$, & la moindre ZD est $\frac{1}{3}b - v$. Et le quarré $\frac{4bb + 12bv + 9vv}{9}$ de la grande BZ étant multiplié par la moindre ZD ou $\frac{1}{3}b - v$, le solide est $\frac{4b^3 - 27bvv - 27v^3}{27}$, qui vaut moins que le solide $\frac{4b^3}{27}$ du quarré $\frac{4bb}{9}$ de BC ou de $\frac{2}{3}b$ multiplié par CD ou par $\frac{1}{3}b$. Et si on veut que la grande partie comme BY ait t moins que les $\frac{2}{3}$ de b, ou qu'elle ait $\frac{2}{3}b - t$ pour valeur; la moindre YD aura $\frac{1}{3}b + t$ pour la sienne. Et le quarré $\frac{4bb - 12bt + 9tt}{9}$ de la grande partie BY ou $\frac{2b - 3t}{3}$ étant multipliée par



la moindre partie YD ou $\frac{1}{3}b + t$, le solide $\frac{4b^3 - 27btt + 27t^3}{27}$ vaudra moins que l'autre $\frac{4b^3}{27}$ du quarré de BC par CD ; puis que $- 27btt + 27v^3$ ou $- 1b + 1t$ doit valoir moins que rien. Et par conséquent l'observation des régles donne au juste la résolution de la question proposée.

Suppositions. {BD $\propto b$. BC $\propto z$. CD $\propto b - z$. *Le plus grand solide* $1y \propto bzz - z^3$.

Résolution générale.

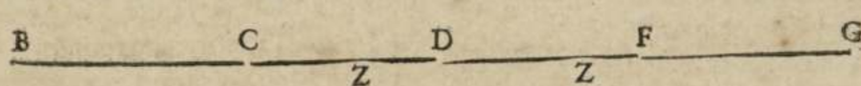
$$\left\{\begin{array}{l} z^3 - bzz * + 1y \propto 0. \\ 0. \quad 1. \ 2. \quad 3. \\ * - 1bzz * + 3y \propto 0. \\ \textit{Ou } 3y \propto bzz \propto 3bzz - 3z^3. \ \textit{Et } z \propto \frac{2}{3}b. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z^3 - bzz * + 1y \propto 0. \\ -1. \quad 0. \ 1. \quad 2. \\ -1z^3 \quad * \quad * + 2y \propto 0. \\ \textit{Ou } 2y \propto 1z^3 \propto 2bzz - 2z^3. \ \textit{Et } z \propto \frac{2}{3}b. \end{array}\right.$$

Donc BC $\propto 1z \propto \frac{2}{3}b$. *Et* CD $\propto b - z \propto \frac{1}{3}b$.

TROISIEME EXEMPLE
ET QVESTION XXVII.

SI quatre points B, C, F, G, d'une ligne droite BG sont déterminez, ou qu'elle soit couppée en trois petites parties déterminées BC, CF, FG; pour coupper en telle sorte sa partie du milieu CF sur un certain point D, que le rapport du plan BDG des deux parties BD & DG au plan CDF des deux parties CD & DF soit plus petit que le rapport de tel plan BZG qu'on voudra de deux autres parties BZ & ZG au plan CZF des deux CZ & ZF, qu'on aura pû marquer en couppant la partie CF sur un point arbitraire Z.

Ayant pris b pour la partie BC, & c pour la partie CG, & d pour la partie CF, & z pour la partie inconnuë CD; on aura $b + z$ pour la partie BD ou BC plus CD, & $c - z$ pour la partie DG ou CG moins CD, & $d - z$ pour la partie DF ou CF moins CD. Et par conséquent le plan des parties BD & DG ou de leurs valeurs $b + z$ & $c - z$ sera $bc - bz + cz - zz$, & celuy des parties CD & DF ou de leurs valeurs z & $d - z$ sera $dz - zz$. Comme donc le rapport du premier & du second de ces deux plans est moindre que celuy de deux autres plans arbitraires BZG & CZF ; il est visible que le rapport du second plan $dz - zz$ au premier $bc - bz + cz - zz$ est plus grand que celuy du plan CZF au plan BZG, ou que la fraction $\frac{dz - zz}{bc - bz + cz - zz}$ est la plus grande quantité qu'il faut déterminer. Et ainsi l'égalant à une lettre y. Et multipliant ensuite chacun des membres de l'égalité, on trouvera celle-ci $dz - zz \propto bcy - bzy$



$+ czy - zzy$, ou $\begin{matrix} 1yzz \\ -1zz \end{matrix} \begin{matrix} + byz \\ - cyz \\ + dz \end{matrix} - bcy \propto 0$. Si donc on multiplie par ordre ſes termes par ceux d'une progreſſion arithmétique $\div$ 1. 0. — 1. qui doit faire évanoüir le ſecond terme; les produits formeront l'égalité $\begin{matrix} 1yzz \\ -1zz \end{matrix} * + bcy \propto 0$. Et on en tirera une valeur $y \propto \frac{1zz}{1zz + bc} \propto \frac{dz - zz}{bc - bz + cz - zz}$. Et ſi on diviſe de part & d'autre par z, & qu'on multiplie en croix par les dénominateurs ; on trouvera encore l'égalité $bcz - bzz + czz - z^3 \propto dzz - z^3 + bcd - bcz$, laquelle étant ordonnée & diſpoſée par ordre ſera $\left\{ \begin{matrix} + bzz \\ - czz \\ + dzz \end{matrix} \right. - 2bcz + bcd \propto 0$. Et ſa réſolution fournira au juſte une valeur de z, ou de la partie CD.

M[r] De Fermat arrive à une égalité entiérement ſemblable à celle-ci, mais par une voye moins méthodique & beaucoup plus longue. Et il ajoûte qu'on en peut tirer la démonſtration d'une propoſition de Pappus, qui enſeigne que pour trouver le point D, il faut faire enſorte que le plan des parties BC & CG ſoit au plan des deux BF & FG, comme le quarré de CD au quarré de DF. Et en effet le premier rapport eſt $\frac{bc}{bc - bd + cd - dd}$ & le ſecond eſt $\frac{zz}{dd - 2dz + zz}$. Et ſi on ſuppoſe ces deux rapports égaux, & qu'on multiplie d'une part les extrêmes, & de l'autre les moyens ; les deux produits formeront l'égalité $bczz - bdzz + cdzz - ddzz \propto bcdd - 2bcdz + bczz$, laquelle étant ordonnée & diviſée par d revient à la même $\left\{ \begin{matrix} + bzz \\ - czz \\ + dzz \end{matrix} \right. - 2bcz + bcd \propto 0$, qui devoit réſoûdre la queſtion précédente. Je ne rapporterai point ici la méthode de M[r] De Fermat. On la peut voir dans ſes ouvrages. J'avertirai ſeulement ceux qui la veulent lire de corriger à la page 67[e] une ligne avant la fin une faute d'impreſſion qui peut embarraſſer, & d'y lire le plan OMD au lieu du plan OND.